FILES D'ATTENTE DANS DES SYSTÈMES
DISTRIBUÉES DES SERVICES

Gr. MOLDOVAN* and I. RÂP*

Received: February 21, 1993

AMS Subject Classification: 68M20, 60K25

REZUMAT. - Così de așteptare în sisteme distribuite de servicii. Se consideră un sistem de așteptare distribuit ce are o topologie particulară determinată de matricea de rutaj dată. În anumite ipoteze ale sistemului de așteptare au loc teoremele 1 și 2 ce dau evaluări pentru unele caracteristici numerice mai importante.

L'étude des systèmes distribués des services exécutées à l'aide des ordinateurs a actuellement une importance de plus en plus grande. La réalisation des certains services distribués à l'aide des ordinateurs est possible grace au développement de la technologie de construction des ordinateurs basée sur l'utilisation de microprocesseurs de plus en plus performants. Plusieurs systèmes distribués des services correspondent aux réseaux des ordinateurs ayant des topologies connues.

Un système distribué des services exécutées à l'aide des ordinateurs suppose l'existence des certaines composants physiques (réseaux des ordinateurs) et des programmes assurant le traitement le transfert, le contrôle et la protection des données. Dans le transfert des données et des informations, qui est fait par certaines procédées de comutation, l'exécution des services suppose la consideration du caractère aléatoire de la réalisation des certains événements.

Dans ce qui suit on suppose que l'unité qui doit être traité dans un noeud du système distribué est le job.

* University of Cluj-Napoca, Department of Computer Science,
3400 Cluj-Napoca, Romania

Nous faisons les hypothèses suivantes:

- I1. Les jobs arrivent aléatoirement à aux ordinateurs du réseau en formant un flux poissonnéen.
- I2. Le temps d'exécution de n'importe quel job est aléatoire, ayant une répartition exponentielle.
- I3. Pour tous les ordinateurs du réseau les temps des services et les inter-arrival temps sont des variables aléatoires indépendantes.

Dans les hypothèses faites les ordinateurs qui existent dans les noeuds du réseau des ordinateurs sont les stations de service dans des files d'attente $M/M/1$.

Considérons un système distribué formé par les noeuds $C_0, C_1, \dots, C_n$ et supposons conues les probabilités p_{ij} q'un job qui a été exécuté dans le noeud C_i est dirigé vers le noeud C_j , pour $i, j = \overline{0, n}$.

La matrice $P = (p_{ij})$, $i, j = \overline{0, n}$ s'appelle la matrice de routage du réseau.

Dans le processus de passage des jobs d'un noeud a l'autre des agglomerations seront créés dans certains noeuds. Pour étudier cettes agglomerations nous considérons le réseau des ordinateurs comme un réseau d'attente exponentiel ayant les stations dans les noeuda et ayant la matrice de routage P . Ce réseau d'attente sera considéré en régime stationaire.

Il est utile de trouver le nombre des jobs qui attends à être exécutés dans les noeuds du réseau des ordinateurs.

Un état du réseau d'attente sera le vecteur $k = (k_0, k_1, \dots, k_n)$ où k_i est le nombre des jobs en cours d'exécution on

qui attendent à être exécutés par l'ordinateur C_i , $i = \overline{0, n}$.

Pour les réseaux exponentielles d'attente a lieu la théorème de forme produit du Jackson ([1], [2]). Donc, la probabilité que le réseau d'attente se trouve dans l'état k est

$$P(k) = \prod_{i=0}^n P_i(k_i)$$

où $P_i(k_i)$ est la probabilité que dans le système d'attente de l'ordinateur C_i se trouvent k_i jobs, $i = \overline{0, n}$. Dans le régime stationnaire ces probabilités ne dependent pas de temps.

Soit a le paramètre du flux poissonnéen des arrivées des jobs à l'ordinateur C_0 , soit b_i le paramètre du temps de service exponentiel de l'ordinateur C_i , $i = \overline{1, n}$ et soit p_i la probabilité que le job exécuté à l'ordinateur C_i quitte le réseau, $i = \overline{0, n}$.

Içi nous nous limitons au cas $p_{ij} = 0$ pour $|i-j| > 1$ et $p_{i0} = 0$ pour $i = \overline{1, n}$.

Les probabilités ci-dessous satisfont les relations

$$\begin{cases} p_0 = 1 - \sum_{j=1}^n p_{0j} \\ p_1 = 1 - p_{12} \\ p_j = 1 - (p_{j,j-1} + p_{j,j+1}), j = \overline{2, n-1} \\ p_n = 1 - p_{n,n-1} \end{cases}$$

Si a_i notte le paramètre du flux d'entrée dans le file d'attente de l'ordinateur C_i , $i = \overline{0, n}$, alors [3]

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_1 = p_{01}a_0 + p_{21}a_2 \\ a_j = p_{0j}a_0 + p_{j-1,j} a_{j-1} + p_{j+1,j} a_{j+1}, j = \overline{2, n-1} \\ a_n = p_{0n} a_0 + p_{n-1,n} a_{n-1} \end{cases}$$

Le facteur de service de l'ordinateur C_i sera

$r_i = \frac{a_i}{b_i}$, $i = \overline{0, n}$. L'existence du régime stationnaire exige que

$$r_i < 1, \quad i = \overline{0, n}.$$

Pour ce type de système distribué ont lieu les théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. Dans les hypothèses $I_1 - I_3$ et en régime stationnaire on a

$$i) \quad P(k_0, k_1, k_2) = \frac{a^{k_0+k_1+k_2} (b_0 - a)}{b_0^{k_0+1} b_1^{k_1+1} b_2^{k_2+1} (1-p_{12} p_{21})^2}.$$

$$\cdot [b_1 (1-p_{12} p_{21}) - a(p_{01} + p_{02} p_{21})].$$

$$\cdot [b_2 (1 - p_{21} p_{12}) - a(p_{02} + p_{01} p_{12})]$$

ii) L'espérance mathématique du nombre des jobs à l'ordinateur C_i est

$$N_i = \frac{r_i}{1 - r_i}, \quad i = 0, 1, 2$$

iii) Le facteur de nonutilisation de l'ordinateur C_i est

$$\theta_i = 1 - r_i, \quad i = 0, 1, 2$$

iv) L'espérance mathématique de nombre des jobs dans le réseau est

$$N = \frac{r_0}{1-r_0} + \frac{r_1}{1-r_1} + \frac{r_2}{1-r_2}$$

v) Si la discipline d'attente est FIFO, l'espérance mathématique du temps d'attente d'un job à l'ordinateur C_i est

$$T_i = \frac{1}{b_i(1-r_i)}, \quad i = 0, 1, 2.$$

THÉOREME 2. Dans les hypothèses $I_1 - I_3$ et en régime stationnaire ou

a

i)
$$P(k_0, k_1, \dots, k_n) = \prod_{i=0}^n (1-r_i) r_i^{k_i}$$

ii) L'espérance mathématique du nombre des jobs à l'ordinateur C_i est

$$N_i \approx \frac{r_i}{1-r_i}, \quad i = \overline{0, n}$$

iii) Le facteur de nonutilisation de l'ordinateur C_i est

$$\theta_i \approx 1-r_i, \quad i = \overline{0, n}$$

iv) L'espérance mathématique du nombre des jobs dans le réseau est

$$N \approx \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{1-r_i}$$

Si la discipline d'attente est FIFO, l'espérance mathématique du temps d'attente d'un job à l'ordinateur C_i est

$$T_i \approx \frac{1}{b_i(1-r_i)} \quad i = \overline{0, n}$$

Les approximations données correspondent aux approximations

$$a_i \approx \frac{A_i}{B_i} \quad i = \overline{1, n}$$

où

$$A_i = \sum_{j=1}^n \ell_{ij}, \quad i = \overline{1, n}$$

avec

$$l_{ij} = \begin{cases} p_{0i} \prod_{s=i}^{j+1} p_{s,s-1} & , \text{pour } j < i \\ p_{0i} & , \text{pour } j = i \\ p_{0i} \prod_{s=i}^{j-1} p_{s,s+1} & , \text{pour } j > i \end{cases}$$

et

$$B_i = \begin{cases} 1 - p_{12} p_{21} & , \text{pour } i = 1 \\ 1 - p_{i,i-1} p_{i-1,i} - p_{i,i+1} p_{i+1,i} & , \text{pour } i = \overline{2, n-1} \\ 1 - p_{n,n-i} p_{n-1,n} & , \text{pour } i = n \end{cases}$$

Les démonstrations des deux théorèmes consistent dans la résolution des équations de Chapman-Kolmogoroff d'un file d'attente $M/M/1$ en régime stationnaire et la résolution du système des équations satisfaites par a_i , $i = \overline{0, n}$.

Le cas particulier du théorème 1 est présenté en détail dans [4].

B I B L I O G R A P H I E

1. Jackson, R.R.P., *Networks of waiting lines*, JORSA, vol 5, nr. 4, pp. 518 (1957).
2. Jackson, R.R.P., *Job-shop like quening systems*, Management Science, vol. 10, pp. 131-142 (1963).
3. Vijbrands, R. J., *Quening Network Models and Performance Analysis of Computer Systems*, Technische Universiteit Eindhoven, Nederland, 1988.
4. Moldovan, Gr., Râp, I., *Asupra unei probleme de aşteptare în reţele de calculatoare*, Lucrările Conferinţei de Matematică Aplicată şi Mecanică, Cluj-Napoca, 21-23, octombrie 1988, Cluj-Napoca 1989, pp. 493-501.