UNIVERSITATEA “BABEŞ-BOLYAI”
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

# Transformări spectrale ale imaginilor

*Referat de doctorat*

**Doctorand**
Radu-Lucian Lupşa

**Conducător ştiinţific**
Prof. dr. Leon Ţâmbulea

2003

# Cuprins

# Capitolul 1

# Introducere

Denumirea de *spectru* (fantomă, arătare scheletică) provine de la aspectul *spectrului optic* vizibil prin descompunerea luminii prin intermediul unei prisme optice. Lumina este, în general, compunerea unor radiaţii electromagnetice cu diferite lungimi de undă. *Distribuţia spectrală* este funcţia care dă puterea radiată pe fiecare lungime de undă, ca funcţie de lungimea de undă. *Spectrul* este mulţimea lungimilor de undă pentru care puterea este nenulă.

Un semnal electric periodic, privit ca o funcţie intensitate/timp, se poate scrie ca o sumă de semnale sinusoidale, cu diverse amplitudini şi cu frecvenţele multiplii ai frecvenţei principale a semnalului. Această scriere este aşanumita *serie Fourier*. Amplitudinile sinusoidelor, ca funcţie de frecvenţă, alcătuiesc, prin analogie cu cazul luminii, *distribuţia spectrală* (*spectrul*) semnalului.

Noţiunile de *spectru* şi de *distribuţie spectrală* au fost extinse la alte domenii în care un obiect supus studiului este alcătuit prin însumarea unor obiecte elementare, parametrizate. Ponderea obiectelor elementare, ca funcţie de parametrii ce le descriu, alcătuieşte *distribuţia spectrală* a obiectului supus studiului.

În prelucrările imaginilor, obiectele supuse studiului sunt *imaginile*, care sunt în general funcţii, definite pe $\mathbb{R}^2$ sau pe o submulţime a sa, şi cu valori reale. Transformările spectrale sunt operaţiile prin care se obţine o distribuţie spectrală pornind de la imaginea iniţială şi reciproc.

Capitolul 2 este consacrat transformărilor clasice (Fourier, cosinus, Walsh-Hadamard), în care funcţiile elementare sunt “distribuite uniform” pe domeniul imaginii. Capitolul 3 studiază transformările multirezoluţie (wavelets), în care funcţiile elementare sunt mai mult sau mai puţin localizate.

# Capitolul 2

# Transformări spectrale clasice

## 2.1 Transformata Fourier

Fiind dată o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *transformata Fourier (directă)* a lui $f$ este funcţia:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i u x} \mathrm{d}x$$

Fiind dată transformata Fourier $F$ a unei funcţii, funcţia originală se poate regăsi prin relaţia:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi i u x} \mathrm{d}u$$

numită *transformarea Fourier inversă.*

Transformarea Fourier este utilizată foarte adesea în studiul semnalelor analogice. În acest context, semnalul este privit ca o funcţie $f = f(t)$, iar variabila $u$ a transformatei Fourier reprezintă frecvenţa. Transformarea Fourier inversă reprezintă de fapt scrierea semnalului ca o sumă de semnale sinusoidale.

De remarcat că transformata Fourier a unei funcţii reale este, în general, o funcţie complexă (de variabilă reală), având însă proprietatea că $F(-u) = \overline{F(u)}$ (bara reprezentând conjugata complexă).

Transformata Fourier se poate extinde la funcţii reale de variabilă vectorială, în modul următor: fiind dată funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, transformata Fourier directă este

$$F(u,v) = \int\int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)e^{-2\pi ixu}e^{-2\pi iyv}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \int\int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)e^{-2\pi i(xu+yv)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

cu inversa

$$f(x,y) = \int\int_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} F(u,v)e^{2\pi i(xu+yv)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

### 2.1.1 Transformata Fourier discretă

Pentru cazul discret, al unei funcţii $f : \{0, 1, 2, \ldots, N-1\} \to \mathbb{R}$, transformata Fourier se defineşte prin

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{\frac{-2\pi iux}{N}}$$

pentru $u = \overline{0, N-1}$. Funcţia $f$ se poate reconstitui din $F$ prin

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{u=0}^{N-1} F(u)e^{\frac{2\pi iux}{N}}$$

Generalizarea în mai multe dimensiuni se face astfel:

Transformata Fourier directă a lui $f : \{0, 1, \ldots, M-1\} \times \{0, 1, \ldots, N-1\}$ este functia

$$F(u,v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

pentru $u = \overline{0, M-1}$ şi $v = \overline{0, N-1}$.

Reciproc, $f$ se poate regăsi din transformata Fourier prin

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{-2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

### 2.1.2 Proprietăţi ale transformatei Fourier

**Linearitatea** Transformarea Fourier este liniară, adică dacă $h = \alpha f + \beta g$ atunci transformata Fourier a lui $h$ este $H = \alpha F + \beta G$.

**Separabilitatea** Transformata Fourier (discretă) în mai multe dimensiuni are următoare proprietate de separabilitate:

$$F(u,v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} e^{\frac{-2\pi iux}{M}} \sum_{y=0}^{M-1} e^{\frac{-2\pi ivy}{N}} f(x,y)$$

**Translaţia** Dacă $g(x,y) = f(x+x_0, y+y_0)$, atunci transformata Fourier a lui $g$ este

$$G(u,v) = F(u,v)e^{-2\pi i(\frac{ux_0}{N}+\frac{vy_0}{M})}$$

**Convoluţia** Dacă $h = f * g$, adică

$$h(x,y) = \int\int f(t,w)g(x-t, y-w)\mathrm{d}t\mathrm{d}w$$

atunci transformata Fourier a lui $h$ este $H(u,v) = F(u,v)G(u,v)$.

În cazul discret, avem exact aceeaşi proprietate (aici convoluţia se scrie $h(x,y) = \sum_{t=0}^{M-1}\sum_{w=0}^{N-1} f(t,w)g(x-t, y-w)$).

## 2.2 Alte transformate spectrale globale

Transformata Fourier face parte dintr-o familie mai largă a transformărilor de forma:

$$T(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)g(x,u)$$

unde $g(x,u)$ este *nucleul transformării directe.* Inversa este de forma

$$f(x) = \sum_{x=0}^{N-1} T(u)h(x,u).$$

În cazul transformatei Fourier, nucleul este, după cum am văzut, $g(x,u) = \frac{1}{\sqrt{N}}e^{-2\pi ixu}$, iar nucleul invers este $h(x,u) = \frac{1}{\sqrt{N}}e^{2\pi ixu}$.

Să observăm că transformata $T$ este de fapt produsul lui $f$ văzut ca un vector (linie) de dimensiune $N$ cu $g$ văzută ca o matrice $N \times N$. Putem inversa o astfel de transformare dacă şi numai dacă matricea corespunzătoare lui $g$ este nesingulară. Nucleul invers $h$ va corespunde atunci inversei matricii corespunzătoare nucleului direct.

Un caz particular favorabil apare atunci când coloanele nucleului formează un sistem ortonormat, adică:

$$\sum_{k=0}^{N-1} g(k,u)\overline{g(k,v)} = \delta_{uv} \ , \ \forall u,v \in \{0,1,\ldots,N-1\}$$

unde

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1 \ , & u = v \\ 0 \ , & u \neq v \end{cases}$$

În cazul în care nucleul direct este ortonormat, se poate demonstra imediat că nucleul invers este conjugatul nucleului direct: $h(x,u) = \overline{g(x,u)}$.

Pentru funcţii de variabilă vectorială (în $n$ dimensiuni), nucleul va avea $2n$ variabile, transformata scriindu-se în 2 dimensiuni în modul următor:

$$T(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) g(x,u,y,v)$$

O asemenea transformare este *separabilă* dacă nucleul $g$ este de forma $g(x,u,y,v) = g_1(x,u)g_2(y,v)$ şi în plus este simetrică dacă $g_1 = g_2$.

Să observăm că dacă $g$ este nucleul unei transformări inversabile şi $h$ este nucleul invers, atunci $g_2(x,u,y,v) = g(x,u)g(y,v)$ este nucleul unei transformări bidimensionale al cărei nucleu invers este $h_2(x,u,y,v) = h(x,u)h(y,v)$.

### 2.2.1 Transformatele sinus şi cosinus

În timp ce transformata Fourier foloseşte perechea (sinus, cosinus) (sub forma exponenţialei complexe), transformatele sinus şi cosinus folosesc doar câte una dintre acestea. Aă cum arată numele, transformata sinus foloseşte numai funcţia sinus, iar transformata cosinus foloseşte doar funcţia cosinus.

Transformatele sinus şi cosinus au ca nucleu un sinus sau cosinus de un argument în care apar variabilele nucleului:

$$g(x,u) = \sin(E(x,u))$$

respectiv

$$g(x,u) = \cos(E(x,u)).$$

În [2] sunt citate 16 transformări trigonometrice, 8 sinus şi 8 cosinus, având nucleele date mai jos:

$$g(x,u) = c(x,u)\cos\frac{\pi x u}{N} \qquad g(x,u) = c(x,u)\sin\frac{\pi(x+1)(u+1)}{N+1}$$

$$g(x,u) = c(x,u)\sin\frac{\pi x(2u+1)}{2N} \qquad g(x,u) = c(x,u)\sin\frac{\pi(x+1)(2u+1)}{2N}$$

$$g(x,u) = c(x,u)\cos\frac{\pi(2x+1)u}{2N} \qquad g(x,u) = c(x,u)\sin\frac{\pi(2x+1)(u+1)}{2N}$$

$$g(x,u) = c(x,u)\cos\frac{\pi(2x+1)(2u+1)}{4N} \qquad g(x,u) = c(x,u)\sin\frac{\pi(2x+1)(2u+1)}{4N}$$

$$g(x,u) = c(x,u)\cos\frac{2\pi x u}{2N-1} \qquad g(x,u) = c(x,u)\sin\frac{2\pi(x+1)(u+1)}{2N+1}$$

$$g(x,u) = c(x,u)\cos\frac{\pi x(2u+1)}{2N-1} \qquad g(x,u) = c(x,u)\sin\frac{\pi(x+1)(2u+1)}{2N+1}$$

$$g(x,u) = c(x,u)\cos\frac{\pi(2x+1)u}{2N-1} \qquad g(x,u) = c(x,u)\sin\frac{\pi(2x+1)(u+1)}{2N+1}$$

$$g(x,u) = c(x,u)\cos\frac{\pi(2x+1)(2u+1)}{4N+2} \qquad g(x,u) = c(x,u)\sin\frac{\pi(2x+1)(2u+1)}{4N-2}$$

coeficientul $c(x,u)$ serveşte asigurării ortonormalităţii matricei, şi este constant cu excepţia primei sau ultimei coloane sau rând, după caz.

Transformata cosinus discretă unidimensională, folosită cel mai adesea în practică, în special pentru compresia *JPEG*, este:

$$C(u) = \alpha(u)\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\cos\left(\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right)$$

având inversa

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} \alpha(u)C(u)\cos\left(\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right)$$

unde

$$\alpha(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & , \ u = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{N}} & , u \neq 0 \end{cases}$$

### 2.2.2 Transformatele Walsh şi Hadamard

Transformatele Walsh şi Hadamard sunt definite pentru funcţii în care cardinalul domeniului este o putere a lui 2, adică $N = 2^n$. Ambele transformate au nucleul format din valori 1 şi $-1$, şi ortogonal, ceea ce face ca nucleul invers să coincidă cu nucleul direct până la un factor constant.

Transformata *Walsh* directă are nucleul

$$g(x,u) = (-1)^{\sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)}}$$

unde $b_i(x)$ reprezintă bitul $i$ al reprezentării binare a lui $x$.

Nucleul invers este $h(x,u) = \frac{1}{N}g(x,u)$.

Transformata *Hadamard* directă are nucleul

$$g(x,u) = (-1)^{\sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^{b_i(x)b_i(u)}}$$

Nucleul invers este, din nou, $h(x,u) = \frac{1}{N}g(x,u)$.

Să observăm că nucleul transformatelor Hadamard si Walsh diferă doar prin ordinea coloanelor matricei corespunzătoare. Într-adevăr, dacă înlocuim $u$ cu răsturnatul său, considerând reprezentarea lui $u$ în baza 2, obţinem transformata Walsh din transformata Hadamard şi reciproc. Acest fapt justifică adoptarea denumirii comune de *transformata Walsh-Hadamard* pentru orice transformare de acest tip.

O altă transformată Walsh-Hadamard notabilă este aceea în care coloanele sunt permutate în aşa fel încât numărul de schimbări de semn de pe o coloană să crească o dată cu numărul $u$ al coloanei. În acest fel, variabila $u$ are rolul unei frecvenţe, similar cu cazul transformatelor Fourier şi cosinus.

Această transformare este *transformata Hadamard ordonată* şi are nucleul direct

$$g(x,u) = (-1)^{\sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^{b_i(x)p_i(u)}}$$

unde $p_0(u) = b_n(u)$ şi $p_k(u) = b_{n-k}(u) + b_{n-k-1}(u),\ k = \overline{1, n-1}$.

## 2.3 Algoritmi de calcul

### 2.3.1 Transformata Fourier rapidă

Calculul transformatei Fourier discrete prin implementarea directă a definiţiei conduce, în cazul unidimensional, la $\Theta(N^2)$ operaţii pentru o funcţie definită pe $N$ puncte. În aplicaţii practice, $\Theta(N^2)$ reprezintă o complexitate prea mare.

Metoda clasică pentru a calcula eficient transformata Fourier este aşa-numita *transformata Fourier rapidă (FFT — Fast Fourier Transform).* Este aplicabilă pentru funcţii definite pe un număr de puncte egal cu o putere a lui 2 ($N = 2^n$) şi se bazează pe faptul că nucleul transformatei Fourier $g_N(x,u) = e^{-\frac{2\pi ixu}{N}}$ are pentru $\forall x, u \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, proprietăţile:

$$g_{2N}(2x,u) = g_N(x,u)$$

$$g_{2N}(2x+1,u) = c_N(u)g_N(x,u)$$
$$g_{2N}(2x,u+N) = -g_N(x,u)$$
$$g_{2N}(2x+1,u+N) = -c_N(u)g_N(x,u)$$

unde $c_N(u)$ nu depinde de $x$.

Atunci, notând $2M = N$,

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} g_M(x,u)f(2x) + c_M(u)\sum_{x=0}^{M-1} g_M(x,u)f(2x+1)$$

şi

$$F(u+N) = \sum_{x=0}^{M-1} g_M(x,u)f(2x) - c_M(u)\sum_{x=0}^{M-1} g_M(x,u)f(2x+1)$$

de unde rezultă că transformata Fourier pentru $N$ puncte se reduce la a calcula două transformate Fourier în $N/2$ puncte plus $2N$ operaţii (adunări, scăderi şi înmulţiri; considerăm că valorile $c_N(u)$ pot fi precalculate). Rezultă pentru complexitate recurenţa $T(N) = 2N + 2T(N/2)$ şi de aici $T(N) = \Theta(N\log N)$.

Algoritmul FFT este aplicabil pentru toate transformările ce au proprietăţile enunţate mai sus. În particular, se poate aplica transformatei Walsh.

### 2.3.2 Transformări bidimensionale

Transformările bidimensionale (separabile simetrice) de forma

$$T(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)g(x,u)g(y,v)$$

se pot calcula după schema

$$T(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}[\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)g(y,v)]g(x,u)$$

efectuând separat transformările pe cele două axe. Complexitatea este $\Theta(MN^2+M^2N) = \Theta(MN(M+N))$, în cazul în care algoritmul FFT nu este aplicabil, şi $\Theta(MN\log N + NM\log M) = \Theta(MN\log(MN))$ în cazul aplicării FFT.

### 2.3.3 Transformata cosinus

Algoritmul FFT nu este aplicabil în forma prezentată pentru a calcula transformata cosinus. Există o transformată cosinus rapidă, bazată pe o altă grupare a coeficienţilor. De asemenea, transformata cosinus se poate calcula pornind de la transformatele Fourier a funcţiei iniţiale $f$ şi a funcţiei $f_1(x) = f(x)e^{-\frac{\pi(2x+1)}{2N}}$.

## 2.4 Aplicaţii

### 2.4.1 Analiza spectrală

Transformata Fourier se foloseşte intens în electronică, teoria semnalelor şi teoria informaţiei datorită următorului fapt:

Un semnal se poate scrie ca suma unor sinusoide. Dacă semnalul este trecut numai prin componenete liniare, semnalul de la iesire poate fi văzut ca suma ieşirilor produse pentru fiecare componentă sinusoidală în parte (un circuit in care ieşirea este funcţie liniară de intrare are proprietarea ca funcţia aplicată sumei este suma rezultatelor aplicării funcţiei fiecărei componente în parte). Deoarece comportamentul circuitelor electronice se studiază mult mai uşor pentru semnale sinusoidale, este avantajos să studiem acţiunea circuitului asupra transformatei Fourier a semnalului decât asupra semnalului original.

În această ipostază, analiza spectrală este un instrument util în studiul sistemelor optice şi electronice (analogice) care contribuie la achiziţionarea imaginii. Aceste studii servesc la corectarea digitală a defectelor sistemului analogic de achiziţie.

### 2.4.2 Translaţii şi rotaţii

Translaţia unei imagini cu un număr întreg de pixeli este o simplă permutare (circulară) a pixelilor. Translaţia cu un număr neîntreg de pixeli este în schimb o operaţie mult mai delicată. S-ar putea defini spre exemplu translaţia cu 1/2 pixeli ca făcând o medie aritmetică între pixelii vecini. Ca orice mediere, are dezavantajul de-a micşora rezoluţia imaginii. Transtaţia pe această cale nu este reversibilă.

O metodă mai bună pentru translaţia cu număr fracţionar de pixeli se poate defini cu ajutorul transformatei Fourier. Anume, translaţia cu un deplasament $(x_0, y_0)$ se poate defini ca fiind funcţia care are transformata Fourier

$$G(u,v) = F(u,v)e^{-2\pi i(\frac{ux_0}{N}+\frac{vy_0}{M})}$$

unde $F$ este transformata Fourier a imaginii originale. Translaţia definită în acest mod este reversibilă, fară pierderea calităţii (în măsura în care valorile pixelilor sunt reprezentate ca numere reale şi erorile de rotunjire sunt suficient de mici). Imaginea rezultată este însa, în general, o funcţie complexă.

Rotaţia unei imagini se poate realiza prin translaţii ale liniilor şi coloanelor imaginii, în modul următor:

Dacă într-o imagine translatăm fiecare linie cu o cantitate $\Delta x = ay$ rezultă o imagine înclinată. Operaţia constă în translaţie linie cu linie, care se poate realiza exact prin procedeul sus amintit. Matricea transformării este

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Înclinarea similară pentru coloane are matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

Realizând o succesiune formată dintr-o înclinare după linii urmată de o înclinare după coloane, urmată de o nouă înclinare după linii folosind acelaşi coeficient ca şi prima înclinare după linii, obţinem o transformare a cărei matrice are forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab & 2a+a^2b \\ b & 1+ab \end{pmatrix}$$

Punând acum

$$a = \frac{\cos\,\alpha - 1}{\sin\,\alpha}$$

şi

$$b = \sin\alpha$$

avem

$$\begin{pmatrix} 1+ab & 2a+a^2b \\ b & 1+ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\,\alpha & -\sin\,\alpha \\ \sin\,\alpha & \cos\,\alpha \end{pmatrix}$$

adică am realizat o rotaţie de unghi $\alpha$.

### 2.4.3 Corectarea şi îmbunătăţirea imaginilor

Adesea, procesul de achiziţie a imaginii introduce erori. O parte din aceste erori sunt *zgomot*, adică un semnal mai mult sau mai puţin aleator suprapus peste imagine. O a doua parte o constituie *aberaţiile* sau focalizarea incorectă a sistemului de achiziţie. Acestea din urmă duc la faptul că imaginea unui punct din scena analizată este o pată mai mare sau mai mică pe imaginea rezultată.

Pentru micşorarea efectelor zgomotului, una dintre primele şi cele mai simple metode utilizabile este medierea fiecărui pixel cu valorile pixelilor vecini. Această operaţie reprezintă de fapt o convoluţie a imaginii cu o anumită funcţie. Faptul că o convoluţie echivalează cu o înmulţire punct cu punct a transformatelor Fourier oferă o metodă eficientă pentru realizarea convoluţiei şi în final filtrarea imaginii.

Corectarea aberaţiilor se bazează pe faptul că imaginea formată de un sistem cu aberaţii este de fapt rezultatul aplicării asupra imaginii iniţiale a unei convoluţii. Cazul cel mai simplu este al imaginii focalizate greşit, dacă eroarea de focalizare este aceeaşi în toată imaginea. Aici funcţia cu care s-a făcut convoluţia imaginii iniţiale este o constantă în interiorul unui cerc centrat în zero şi cu o rază dependentă de defocalizarea sistemului de achiziţie, şi zero în afara acestui cerc. Luând transformata Fourier a imaginii achiziţionate şi împărţind-o punct cu punct la transformata Fourier a funcţiei cu care s-a produs convoluţia obţinem transformata Fourier a imaginii corecte.

Reducerea zgomotului constă în reducerea componentelor corespunzătoare frecvenţelor ridicate din transformata Fourier. Corectarea aberaţiilor presupune de obicei dimpotrivă creşterea componentelor corespunzătoare frecvenţelor ridicate. Rezultă că metodele de corectare a aberaţiilor sunt sensibile la zgomot (şi au tendinţa de-a amplifica zgomotul), iar reducerea zgomotului duce la imagini mai puţin nete.

### 2.4.4 Compresia imaginilor

Reprezentarea pe pixeli a imaginilor necesită cantităţi mari de memorie. Aceasta a stimulat cercetări intense în domeniul compresiei imaginilor.

S-a observat că, în transformata Fourier a unei imagini, majoritatea valorilor care apar sunt apropiate de zero, iar neglijarea lor nu conduce, în general, la diferenţe vizibile faţă de imaginea originală. Aceasta este ideea care stă în spatele formatului *JPEG* pentru reprezentarea imaginilor [1], [10].

În locul transformării Fourier se foloseşte însă transformata cosinus, având proprietăţi similare dar este reală şi nu complexă.

Compresia *JPEG* constă din următoarea secvenţă de paşi:

1. imaginea se împarte în blocuri de $8 \times 8$ pixeli;
2. se calculează transformata cosinus a fiecărui bloc;
3. se cuantifică valorile coeficienţilor. Acesta este pasul la care intervine pierderea de informaţie. Precizia cuantificării depinde de poziţia coeficientului, precizia maximă fiind pentru frecvenţa zero;
4. valorile obţinute la pasul anterior se iau într-o anumită ordine "în zigzag", se aplică o compresie Run-Length Encoding (adică o secvenţă de mai multe valori egale se reprezintă prin valoare şi lungimea secvenţei), şi rezultatul se scrie în fişier.

# Capitolul 3

# Transformata Wavelets

Transformările spectrale clasice sunt *globale* în sensul că valoarea transformării în fiecare punct depinde de valoarea tuturor punctelor imaginii. În multe domenii în care sunt folosite transformările spectrale ar fi utilă un fel de "transformată spectrală locală". O asemenea transformare ar putea arata aspecte legate de oscilaţii locale în cadrul unei imagini, spre deosebire de transformările spectrale "globale" capabile doar să sumeze oscilaţiile locale în cadrul întregii imagini.

O asemenea transformare este *transformata wavelets*.

Primele cercetări legate de transformata wavelets au fost facute de Haar in 1909 şi de Levy în anii 1930; însă studierea intensivă a transformatelor wavelets a început abia la sfârşitul anilor 1980.

Este greu să dăm în momentul de faţă o definiţie a transformatelor wavelets [14]. Aceasta deoarece, pronind de la ideea localizării oscilaţiilor din transformatele de tip Fourier, s-au făcut numeroase generalizări, incluzând transformate wavelets in care funcţiile de bază nu sunt ortogonale, transformate pentru puncte de eşantionare neuniform spaţiate, transformate pentru funcţii definite pe varietăţi non-afine (de exemplu pe sfere), şi transformate wavelets neliniare.

## 3.1 Transformate wavelet ortogonale

Ideea de plecare a transformatelor wavelets a fost să se reprezinte funcţiile prin dezvoltare în serie Fourier după un sistem ortonormat complet generat prin scalarea şi translaţia unei singure funcţii de bază, sau eventual a unei familii finite de funcţii de bază.

Aceasta înseamnă, presupunând că lucrăm în $L^2(\mathbb{R})$, că se va alege o funcţie de bază, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de la care se va genera familia $(\psi_{jk})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ :

$$\psi_{jk}(x) = 2^{k/2}\psi(2^k x - j) \tag{3.1}$$

Funcţia de bază $\psi$ trebuie aleasă în aşa fel încât familia $(\psi_{jk})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ să formeze un sistem ortonormat complet pentru $L^2(\mathbb{R})$.

Condiţia anterioară este echivalentă cu faptul că orice funcţie $f \in L^2(\mathbb{R})$ se poate dezvolta în serie Fourier:

$$f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_{jk}\psi_{jk} \tag{3.2}$$

unde

$$c_{jk} = (f, \psi_{jk}) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi_{jk}(t)\mathrm{d}t \tag{3.3}$$

Familia *coeficienţilor wavelets* $c_{jk}$ se va numi atunci *transformata wavelets* a funcţiei $f$.

Cel mai simplu exemplu de trasnformată wavelets are ca funcţie de bază funcţia lui Haar:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 & , 0 \le x < 1/2 \\ -1 & , 1/2 \le x < 1 \\ 0 & , x \ge 1 \end{cases} \tag{3.4}$$

Construcţia prezentată se poate extinde şi la alte spaţii de funcţii, cum ar fi $L^2(I)$, unde $I$ este un interval real, sau pentru funcţii definite pe mulţimi discrete ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ sau $\{0, 1, \ldots, N-1\}$, $N \in \mathbb{N}$).

Coeficienţii wavelets caracterizează oscilaţiile, în diferite zone spaţiale (intervale din domeniul de definiţie) a oscilaţiilor funcţiei $f$.

## 3.2 Transformate wavelets liniare şi analiza multirezoluţie

Un alt unghi din care se poate privi transformata wavelets este următorul:

Fie $X$ spaţiul Hilbert al funcţiilor pe care le analizăm (de exemplu, $X = L^2(\mathbb{R})$). A privi o funcţie $f$ la un anumit nivel de rezoluţie înseamnă a găsi şi studia cea mai bună aproximare (proiecţia) funcţiei $f \in X$ pe un subspaţiu $S \subseteq X$ închis. Spre exemplu, dacă $f$ reprezintă un semnal pe care îl eşantionăm la momente de timp exprimate prin numere întregi, vom aproxima $f$ printr-o funcţie care pe fiecare interval delimitat de două numere întregi consecutive este constantă. Atunci

$$S = \{f(x) = x_{\lfloor x \rfloor} \ : \ (x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in l_2\}$$

şi funcţia $f$ va fi aproximată prin

$$\mathrm{pr}_S(f)(x) = \int\limits_{\lfloor x \rfloor}^{\lfloor x \rfloor + 1} f(t)\mathrm{d}t$$

Dacă vom dori însă să obţinem o aproximare mai bună a lui $f$ vom putea aproxima $f$ într-un spaţiu cu rezoluţie mai fină. Putem construi atunci o familie de spaţii

$$S_k = \{f(x) = x_{\lfloor kx \rfloor} \ : \ (x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in l_2\}\,, \ k \in \mathbb{Z}$$

de funcţii cu rezoluţie din ce în ce mai fină.

Conceptul intuitiv că $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ alcătuiesc spaţii de funcţii de rezoluţii din ce în ce mai fine se defineşte prin proprietăţile:

(i) $\forall j < k\,, \ S_j \subseteq S_k$

(ii) $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{Z}} S_k = \{0\}$ şi $\overline{\bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} S_k} = X$

(iii) dacă $f \in S_0$, atunci $\forall k \in \mathbb{Z}\,, \ f(\cdot - k) \in S_0$ (altfel spus, $S_0$ este invariant la translaţii cu cantităţi întregi)

(iv) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f \in S_k$ dacă şi numai dacă $f(2\cdot) \in S_{k+1}$ (adică spaţiul $S_{k+1}$ are rezoluţie dublă faţă de $S_k$).

Spaţiile $S_k$ se numesc *spaţii de scară*.

Conform teoremei de descompunere ortogonală a lui Riesz, fiecare $S_k \subseteq S_{k+1}$ are un complement ortogonal în $S_{k+1}$, $W_k = S_k^{\perp}$ astfel încât orice funcţie $f_{k+1} \in S_{k+1}$ se scrie în mod unic sub forma $f_{k+1} = f_k + w_k$, cu $f_k \in S_k$ şi $w_k \in W_k$.

Spaţiile $W_k$ se numesc *spatiile wavelets* asociate spaţiilor de scară $S_k$. Proprietăţile spaţiilor de scară determină pentru spaţiile wavelets următoarele proprietăţi:

(i) $\forall j \neq k\,, \ W_j \perp W_k$

(ii) dacă $w \in W_0$, atunci $\forall k \in \mathbb{Z}\,, \ w(\cdot - k) \in W_0$ ($W_0$ este invariant la translaţii cu cantităţi întregi)

(iii) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $w \in W_k$ dacă şi numai dacă $w(2\cdot) \in W_{k+1}$ (spaţiul $W_{k+1}$ este spaţiul oscilaţiilor de frecvenţă dublă faţă de $W_k$).

(iv) $X = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} W_k$, adică orice funcţie $f \in X$ se descompune unic sub forma $f = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} w_k$ cu $w_k \in W_k$.

**Demonstraţie**

Primele trei proprietăţi fiind imediate, vom demonstra doar ultima.

Fie $f \in X$. Notăm $f_n = \mathrm{pr}_{S_n}(f)$, $r_n = f - f_n$ şi fie $w_n = f_{n+1} - f_n$. Vom arăta că $f = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} w_k$. Pentru început, să arătăm că $f = f_0 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} w_k$. Deoarece $\overline{\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} S_k} = X$, deducem că există un şir $(g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ cu $g_k \in S_k$, convergent către $f$. Din definiţia proiecţiei rezultă $\|f - f_k\| \leq \|f - g_k\|$ şi deci $\|f - f_k\| \to 0$ când $k \to \infty$. Dar, pe de altă parte, $f_n = f_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} w_k$, $\forall n > 0$, de unde $f_0 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} w_k = f$.

Să demonstrăm acum că $f_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} w_{-k}$. Pentru aceasta să notăm $c_k = \|w_k\|^2$ şi să observăm că ortogonalitatea spaţiilor $S_{-k}, W_{-k}, \ldots, W_{-1}$ implică

$$\|f_{-n}\|^2 = \|f_0\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_{-k}$$

de unde rezultă că seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ este mărginită şi prin urmare convergentă. Acum, presupunând $m < n$, $\|f_{-m} - f_{-n}\|^2 = \sum\limits_{k=m}^{n} c_k$ şi de aici rezultă că şirul $(f_{-m})_{m\in\mathbb{N}}$ este fundamental. Rezultă că $(f_{-n})$ este convergent în $X$ şi fie $f_{-\infty}$ limita sa. Considerând subşirul $(f_{-k})_{k\geq n}$, pentru un $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrar, remarcăm $(f_{-k})_{k\geq n} \subseteq S_n$, de unde, întrucât $S_n$ este închis, $f_{-\infty} \in S_n$. Prin urmare $f_{-\infty} \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{Z}} S_k = \{0\}$ deci $f_{-\infty} = 0$. Din $f_{-n} = f_0 - \sum\limits_{k=1}^{n} w_k$ rezultă acum $f_0 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k = 0$.

Avem acum că $f = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} w_k$.

Pentru unicitate, să presupunem că există $(g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ cu $g_k \in W_k$ şi $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} = f$. Fie $n \in \mathbb{Z}$ arbitrar. Din închiderea lui $S_n$ rezultă $\sum\limits_{k=-\infty}^{n-1} g_k \in S_n$ şi din $W_k \perp$

$S_n$, $\forall k \geq n$ rezultă $\sum\limits_{k=n}^{\infty} g_k \in S_n^{\perp}$. Mai departe, din unicitatea descompunerii ortogonale după $S_k$ rezultă că $\sum\limits_{k=-\infty}^{n-1} g_k = f_n$ şi $\sum\limits_{k=n}^{\infty} g_k = r_n$, de unde reiese $\forall n \in \mathbb{Z}$, $g_n = w_n$. $\diamondsuit$

În analiza multirezoluţie se pune o condiţie suplimentară, şi anume ca mulţimea de scară $S_0$ să admită o bază ortonormată de forma $\phi_{j,0}(x) = \phi(x-j)$, $j \in \mathbb{Z}$, pentru o anumită funcţie $\phi$.

Condiţia de ortonormalitate este adesea prea restrictivă. O relaxare acceptabilă este să se ceară doar ca funcţiile $\phi_{j,0}$ să alcătuiască o bază Riesz a lui $S_0$, adică orice $f \in S_0$ să se poată scrie în mod unic sub forma $f = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j \phi_{j,0}$ şi în plus să existe $c_1, c_2 > 0$, independente de $f$, astfel încât

$$c_1 \|f\|^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|^2 \leq c_2 \|f\|^2.$$

Dacă $\phi_{j,0}$ formează o bază ortonormală (respectiv Riesz) pentru $S_0$, atunci se vede imediat că $\phi_{j,k}(x) = 2^{k/2}\phi(kx-j)$ formează o bază ortonormată (respectiv Riesz) pentru $S_k$.

Se poate arăta că relaxarea condiţiei de ortonormalitate asupra bazei $\phi_{j,0}$ nu este esenţială, o bază ortonormală putând fi construită pornind de la o bază Riesz. De asemenea, se arată existenţa unei baze similare $\psi_{j,0}$ pentru $W_0$.

Dacă $\psi$ este o funcţie astfel încât translaţiile cu catităţi întregi $\psi_{j,0}$ să formeze o bază ortonormată pentru $W_0$, atunci funcţia $\psi$ poate fi funcţia de bază a unei transformări wavelets definite în secţiunea precedentă.

În exemplul din secţiunea precedentă, $\psi$ era funcţia lui Haar. Spaţiul de scară $S_0$ este mulţimea funcţiilor din $L^2(\mathbb{R})$ care sunt constante pe fiecare interval $[k, k+1)$ cu $k \in \mathbb{Z}$. O posibilă bază ortonormată se poate construi prin translaţiile cu cantităţi întregi ale funcţiei $\psi = \chi_{[0,1)}$ (funcţia caracteristică a intervalului $[0,1)$ ).

## 3.3 Transformate wavelets biortogonale

Condiţia de ortonormalitate asupra bazelor $(\phi_{j,0})_{j\in\mathbb{Z}}$ şi $(\psi_{j,0})_{j\in\mathbb{Z}}$ este adesea greu de îndeplinit. Deşi s-a demonstrat că plecând de la o bază Riesz se poate construi o bază ortonormată, totuşi construcţia duce la pierderea unor proprietăţi dezirabile, cum ar fi compactitatea suportului.

În aceste condiţii, se iau funcţiile $\phi$ şi $\psi$ astfel încât $(\phi_{j,0})_{j\in\mathbb{Z}}$ să alcătuiască o bază Riesz pentru $S_0$ şi $(\psi_{j,0})_{j\in\mathbb{Z}}$ să alcătuiască o bază Riesz pentru $W_0$.

Fie acum $f \in S_0$, $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j \phi_{j,0}$. Pentru a determina coeficienţii $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ într-o bază ortonormată, aveam relaţia simplă $f_j = \langle f, \phi_{j,0}\rangle$. În cazul unei baze Riesz, întrucât $f \mapsto f_n$ este o funcţională liniară şi lipschitziană, rezultă (conform teoremei de reprezentare) că există $\tilde{\phi}_{j,0}$ astfel încât $f_j = \langle f, \tilde{\phi}_{j,0}\rangle$. Mai mult, se arată imediat că $\tilde{\phi}_{j,0}(x) = \tilde{\phi}_{0,0}(x-j)$ şi că dacă definim $\tilde{\phi}_{j,k}(x) = 2^{k/2}\tilde{\phi}_{0,0}(kx-j)$ atunci, în general, $(\tilde{\phi}_{j,k})_{j\in\mathbb{Z}}$ este baza Riesz pentru $S_k$ duală lui $(\phi_{j,k})_{j\in\mathbb{Z}}$. Adică, $\forall k \in \mathbb{Z}$ şi $\forall f \in S_k$ :

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\phi}_{j,k}\rangle \phi_{j,k}$$

şi

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k}\rangle \tilde{\phi}_{j,k}$$

Aceeaşi construcţie duce la construcţia funcţiilor $\tilde{\psi}_{j,k}(x) = 2^{k/2}\tilde{\psi}(kx-j)$ astfel încât $(\tilde{\psi}_{j,k})_{j\in\mathbb{Z}}$ să constituie baza Riesz pentru $W_k$ duală lui $(\psi_{j,k})_{j\in\mathbb{Z}}$.

Să remarcăm două lucruri importante:

1. Alegerea perechii de baze $(\phi, \tilde{\phi})$ pentru $S_0$ este independentă de alegerea perechii de baze $(\psi, \tilde{\psi})$ pentru $W_0$.

2. Chiar dacă funcţiile wavelet de pe acelaşi nivel $(\psi_{j,k})_{j\in\mathbb{Z}}$ nu sunt ortogonale, oricare două funcţii wavelet de nivele diferite rămân ortogonale: $\langle \psi_{j_1,k_1}, \psi_{j_2,k_2}\rangle = 0$, $\forall j_1, k_1, j_2, k_2 \in \mathbb{Z}$ cu $k_1 \neq k_2$.

## 3.4 Construcţia prin paşi de netezire (lifting)

Metoda netezirii (lifting) ([14], [13]) conduce la transformarea unei funcţii de variabilă discretă într-o secvenţă de coeficienţi care, se speră, sunt mai puţin intercorelaţi decât valorile funcţiei iniţiale. Construcţia, în anumite cazuri particulare, este echivalentă cu o transformată wavelets clasică.

Metoda netezirii decurge în modul următor:

Fie $\lambda_{0,k} = f(k)$ valorile funcţiei iniţiale. Setul de valori $\lambda_0$ se împarte în două subseturi, $\lambda'_{-1}$ şi $\gamma'_{-1}$ într-un mod care să permită reconstituirea lui $\lambda_0$ din $\lambda'_{-1}$ şi $\gamma'_{-1}$. Este preferabil ca seturile $\lambda'_{-1}$ şi $\gamma'_{-1}$ să fie puternic corelate, pentru ca din $\lambda'_{-1}$ să se poată construi o estimare bună pentru $\gamma'_{-1}$. Exemplul cel mai simplu este $\lambda'_{-1,k} = \lambda_{0,2k}$ şi $\gamma'_{-1,k} = \lambda_{0,2k+1}$, presupunând că valorile din punctele impare ale funcţiei nu vor fi departe de valorile ce se pot estima din valorile punctelor pare.

În continuare, se construieşte diferenţa $\gamma_{-1} = \gamma'_{-1} - \mathcal{P}(\lambda'_{-1})$ între valorile reale $\gamma'_{-1}$ şi valorile estimate pe baza valorilor $\lambda'_{-1}$. Continuând exemplul, putem estima valorile din punctele impare ca fiind media aritmetică a valorilor din punctele vecine: $\mathcal{P}_{2k+1}(\lambda'_{-1}) = \frac{1}{2}(\lambda_{-1,k} + \lambda_{-1,k+1}) = \frac{1}{2}(\lambda_{0,2k} + \lambda_{0,2k+2})$.

A treia etapă a "pasului de netezire" este actualizarea setului $\lambda_{-1} = \lambda'_{-1} + \mathcal{U}(\gamma_{-1})$. Această din urmă operaţie are ca scop păstrarea anumitor proprietăţi ale setului iniţial. De exemplu, dacă cerem ca setul $\lambda_{-1}$ să aibă aceeaşi medie aritmetică cu $\lambda_0$ putem pune, in exemplul de mai sus, $\mathcal{U}_k(\gamma_{-1}) = \frac{1}{2}(\gamma_{-1,k-1} + \gamma_{-1,k})$.

Aplicarea paşilor de netezire duce la înlocuirea treptată a valorilor $\lambda$ ale funcţiei iniţiale cu valorile coeficienţilor $\gamma$.

Etapele a doua (estimarea şi calculul diferenţei) şi a treia (actualizarea) se pot omite dacă decorelarea datelor se face din prima etapă (de diviziune). Spre exemplu, pentru a implementa transformata Haar prin paşi de netezire vom efectua diviziunea $\lambda'_{j,-1} = \frac{\lambda_{2j,0}+\lambda_{2j+1,0}}{2}$ şi $\gamma'_{j,-1} = \frac{\lambda_{2j,0}-\lambda_{2j+1,0}}{2}$, după care estimarea este $\mathcal{P} = 0$ ceea ce conduce la $\lambda_{j,-1} = \lambda'_{j,-1}$ şi actualizarea este din nou $\mathcal{U} = 0$ adică $\gamma_{j,-1} = \gamma'_{j,-1}$.

Desigur, trebuie să ne asigurăm asupra posibilităţii de-a reface $(\lambda_{j,0})_{j\in\mathbb{Z}}$ din $(\lambda'_{j,-1})_{j\in\mathbb{Z}}$ şi $(\gamma'_{j,-1})_{j\in\mathbb{Z}}$. Aceasta se face punând $\lambda_{2j,0} = \lambda'_{j,-1} + \gamma'_{j,-1}$ şi $\lambda_{2j+1,0} = \lambda_{j,-1} - \gamma'_{j,-1}$.

Este în general mai uşor să construim o transformată wavelets corectă (inversabilă) prin netezire (lifting) decât prin construcţia bazelor duale.

Dacă operaţiile din paşii de netezire sunt liniare, rezultatul este o transformată wavelets (liniară). Prin urmare mecanismul paşilor de netezire permite o mai mare generalitate.

Pentru a face transformata wavelets prin lifting, să presupunem că avem o funcţie $f$. Deoarece ne găsim în discret, nu vom putea avea reprezentarea exactă a lui $f$ ci doar reprezentarea proiecţiei ei pe un spaţiu de scară $S_n$ : $\mathrm{pr}_{S_n}(f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda_{j,n}\phi_{j,n}$ unde $\lambda_{j,n} = \langle f, \tilde{\phi}_{j,n}\rangle$.

Atunci

$$\lambda_{m,n-1} = \langle f, \tilde{\phi}_{m,n-1}\rangle = \langle \sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda_{j,n}\phi_{j,n}, \tilde{\phi}_{m,n-1}\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda_{j,n}\langle \phi_{j,n}, \tilde{\phi}_{m,n-1}\rangle$$

şi analog

$$\gamma_{m,n-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda_{j,n}\langle \phi_{j,n}, \tilde{\psi}_{m,n-1}\rangle$$

## 3.5 Aplicaţii

### 3.5.1 Compresia imaginilor

Probabil cea mai bine fructificată aplicaţie a transformării wavelet în domeniul procesării imaginilor este compresia imaginilor. Formatul *JPEG-2000* ([11], [12] ) este rezultatul cercetărilor din anii 1990 cu privire la folosirea transformatei wavelets în locul "clasicei" transformate cosinus (folosită de formatul *JPEG* clasic).

Ca şi compresia *JPEG* clasică, compresia *JPEG-2000* împarte mai întâi imaginea în blocuri; însă, spre deosebire de *JPEG*, în *JPEG-2000* dimensiunea blocurilor nu este impusă de standard ci este lăsată la latitudinea programului de compresie. Blocurile mici din *JPEG*-ul clasic erau impuse de faptul că transformata cosinus este globală. *JPEG-2000* profită de caracterul multirezoluţie a transformatei wavelets.

Fiecare bloc este apoi supus transformatei wavelets. Coeficienţii rezultaţi sunt ulterior cuantificaţi şi secvenţa lor comprimată asemănător cu cazul compresiei *JPEG* clasice.

Se estimează că ratele de compresie posibile la *JPEG-2000* sunt de până la 10 ori mai mari decât în cazul *JPEG*, la aceeaşi calitate. Desigur, calitatea rezultatului compresiei nu poate fi apreciat decât subiectiv, iar factorul de compresie obţinut depinde mult de imaginea supusă compresiei.

Standardul *JPEG-2000* prevede de asemenea posibilitatea de a realiza compresia fără pierdere de informaţie. În acest scop se foloseşte o transformată wavelet întreagă [15].

### 3.5.2 Recunoaşterea texturilor

Recunoaşterea texturilor este o altă aplicaţie majoră a transformatei wavelets. Descompunerea wavelets oferă coeficienţi care caracterizează oscilaţiile locale în cadrul unei imagini. Prin urmare, este natural să fie considerată un bun punct de plecare în caracterizarea texturilor, adică a unor modele repetitive.

Principalele informaţii oferite de descompunerea wavelets sunt distribuţia energiei după frecvenţă şi după orientare şi dispersia coeficienţilor wavelets ([17], [18]).

# Bibliografie


[1] Andrew B. Watson, *Image Compression Using the Discrete Cosine Transform*, Mathematica Journal, 4(1), 1994, p 81–88

[2] Markus Püskel, José M. F. Moura, *The Discrete Trigonometric Transforms and their Fast Algorithms: An Algebraic Symmetry Perspective*, http://www.ece.cmu.edu/ pueschel/papers/dtt.ps

[3] R. C. Gonzalez, R. E. Woods, *Digital Image Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, 1993

[4] V. Gui, D. Lacrămă, D. Pescaru, *Prelucrarea imaginilor*, Editura politehnica Timişoara, 1999

[5] J. Morel, F. Guichard, *Traitement d'Images*, curs, ENS-Ulm, Paris, 1998

[6] Ioan Muntean, *Analiză funcţională*, curs, Univ. Babeş-Bolyai Cluj-Napoca, 1993

[7] Octavian Agratini, Ioana Chiorean, Gheorghe Coman, Radu Trâmbiţaş, *Analiză numerică şi teoria aproximării*, Presa Universitară Clujeană, 2002, cap. 21 — Elemente de analiză Fourier şi wavelets

[8] Ronald A. DeVore, Bradley J. Lucier, *Wavelets* Acta Numerica, A. Iserles, ed., Cambridge University Press, v. 1 (1992), p. 1–56.

[9] Amara Graps, *An Introduction to Wavelets* IEEE Computational Science and Engineering, vol. 2, nr. 2, 1995

[10] http://www.ece.purdue.edu/ ace/jpeg-tut/jpegtut1.html

[11] http://www.jpeg.org

[12] Michael W. Marcellin, Michael J. Gormish, Ali Bilgin, Martin P. Boliek, *An Overwiev of JPEG-2000* Proc. of the IEEE Data Compression Conference, p. 523–541, 2000

[13] Ingrid Daubechies, Wim Sweldens, *Factoring Wavelets Transforms into Lifting Staps*, 1997 `http://cm.bell-labs.com/who/wim/papers/factor/factor.pdf`

[14] Wim Sweldens, *The Lifting Scheme: A New Philosophy in Biorthogonal Wavelet Constructions*, Journal of Appl. and Comput. Harmonic Analisys, vol. 3, p. 186–200, 1996

[15] Robert Caldenbank, Ingrid Daubechies, Wim Sweldens, Boon-Lock Yeo, *Wavelet transforms that map integers to integers*, Applied and Computational Harmonics Analysis 5 (no. 3), pp. 332–369, 1998.

[16] A. R. Calderbank, Ingrid Daubechies, Wim Sweldens, Boon-Lock Yeo, Lossless Image Compression using Integer to Integer Wavelet Transform

[17] G. Van de Wouwer, P. Scheunders, D. Van Dyck, *Statistical texture characterization from discrete wavelet reprezentations* IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 8, Nr. 4, p. 592-598, (1999)

[18] G. Van de Wouwer, P. Scheunders, S. Livens, D. Van Dyck, *Wavelet Correlation Signatures for Color Texture Characterization* Pattern Recognition, Vol. 32, Nr. 3, p. 443-451, (1999)