Construcţii geometrice

Paul A. Blaga

Cuprins

I Construcţii geometrice: Axiomatică şi metode de rezolvare a problemelor 7

1 Generalităţi despre teoria construcţiilor geometrice 9
1.1 Introducere . . . 9
1.2 Teoria generală a construcţiilor geometrice în planul euclidian . . . 10
1.2.1 Axiomele generale ale geometriei constructive . . . 10
1.3 Instrumente utilizate în construcţiile geometrice . . . 13
1.3.1 Rigla . . . 14
1.3.2 Compasul . . . 14
1.3.3 Rigla cu două muchii . . . 16
1.3.4 Echerul . . . 16
1.3.5 Construcţii fundamentale . . . 17
1.3.6 Problema de construcţie . . . 18
1.4 Probleme elementare de construcţii geometrice . . . 22
1.5 Metodica rezolvării problemelor de construcţii geometrice . . . 26
1.5.1 Analiza . . . 27
1.5.2 Construcţia . . . 29
1.5.3 Demonstraţia . . . 29
1.5.4 Discuţia . . . 30
1.6 Exemple de probleme de construcţii rezolvate . . . 30

2 Locuri geometrice 39
2.1 Noţiunea de loc geometric . . . 39
2.2 O provizie de locuri geometrice . . . 43
2.3 O selecţie a unor locuri geometrice foarte simple . . . 47

2.4 Metodica rezolvării problemelor de loc geometric 48
2.5 Metode analitice 53
2.6 Intersecţii de locuri geometrice 55

3 Transformări geometrice 61
3.1 Introducere 61
3.2 Translaţia 61
3.2.1 Exemple de probleme de construcţii rezolvate cu ajutorul translaţiei 62
3.3 Simetria axială 65
3.3.1 Noţiuni teoretice 65
3.3.2 Probleme de construcţii rezolvate folosind simetria axială . . . 66
3.4 Rotaţia faţă de un punct 70
3.4.1 Noţiuni teoretice 70
3.4.2 Probleme de construcţii rezolvate folosind rotaţia faţă de un punct 71
3.5 Omotetia 74
3.5.1 Noţiuni teoretice 74
3.5.2 Aplicaţii ale omotetiei la rezolvarea problemelor de construcţii geometrice 75
3.6 Inversiunea 78
3.6.1 Noţiuni teoretice 78
3.6.2 Aplicaţii ale inversiunii la rezolvarea problemelor de construcţii geometrice 80

II Constructibilitate cu rigla şi compasul 83

4 Fundamentele teoriei constructibilităţii 85
4.1 Puncte constructibile şi numere constructibile 85
4.2 Modalităţi elementare de construire a unor obiecte constructibile 87
4.3 Corpul numerelor constructibile 88
4.4 Caracterizarea numerelor constructibile 90
4.4.1 Extinderi de corpuri 90
4.5 Teorema (sau rezultatul) lui Wantzel 92
4.6 Aplicaţii ale rezultatului lui Wantzel 97
4.6.1 Cuadratura cercului 97
4.6.2 Dublarea cubului 97
4.6.3 Trisecţiunea unghiului 98

5 Poligoane regulate 101
5.1 Poligoane regulate constructibile 101
5.2 Teorema lui Gauss 102
5.3 Construcţii de poligoane regulate 105

5.3.1 Triunghiul echilateral, pătratul, pentagonul regulat 105
5.3.2 Poligonul cu 15 laturi 106

A Transcendenţa numărului π 109

Partea I

Construcţii geometrice: Axiomatică şi metode de rezolvare a problemelor

CAPITOLUL 1

Generalităţi despre teoria construcţiilor geometrice

1.1 Introducere

Problemele de construcţii geometrice (de regulă executate cu rigla şi compasul – vom vedea mai târziu care este semnificaţia acestor instrumente) se află, de peste două mii de ani, printre problemele esenţiale ale geometriei elementare (sau, dacă preferaţi, "sintetice").

Se consideră că cel care a fixat cele două instrumente canonice a fost Platon, deşi dovezile cam lipsesc (deşi mare parte din opera filozofului s-a păstrat, nu există menţiuni explicite în ea la problemele de construcţii geometrice). Cartea care a "popularizat" problemele de construcţii geometrice este, fără îndoială, cartea care stă la baza geometriei elementare şi în zilele noastre, *Elementele* lui Euclid.

Nu intenţionăm să dăm o "definiţie" foarte precisă a unei probleme de construcţii geometrice. Conform lui Euclid însuşi, o problemă de construcţii geometrice este una în care se dau o serie de elemente geometrice (pe care le vom numi figuri) şi se cere să se construiască o serie de alte figuri geometrice, de regulă impunându-se restricţii asupra instrumentelor care sunt admise pentru realizarea construcţiei.

Cărţile vechi, în special, dar şi multe dintre cărţile moderne, omit anumite precizări, care sunt absolut esenţiale.

(i) A "rezolva" o problemă de construcţii geometrice nu înseamnă, neapărat, să desenezi figurile cerute pe foaia de desen, ci să furnizezi un algoritm prin care orice punct al figurii sau figurilor de desenat să poată fi desenat.

(ii) Problemele de construcţii geometrice sunt probleme "finite": atât figurile date, cât şi cele ce trebuie construite trebuie să fie în număr finit. De asemenea, algoritmul furnizat pentru construcţie trebuie să aibă un număr finit de paşi.

Încă din antichitate a devenit clar că fixarea setului de instrumente de construcţie reprezintă o restricţie foarte importantă. Deşi nu au fost capabili să demonstreze acest fapt, mulţi dintre marii matematicienii greci au înţeles că anumite construcţii geometrice (altminteri foarte "simple": cuadratura cercului, trisecţiunea unghiului, dublarea cubului) nu se pot realiza utilizând doar rigla negradată şi compasul (deşi ele pot fi realizate utilizând şi alte instrumente).

Abia Gauss a fost capabil să stabilească în ce condiţii o problemă de construcţii geometrice cu rigla şi compasul se poate, efectiv, rezolva.

De regulă, rezolvarea unei probleme de construcţii geometrice presupune, pe lângă elaborarea algoritmului de construcţie, demonstrarea corectitudinii acestui algoritm şi o discuţie a diferitelor situaţii speciale care pot apărea (de exemplu, soluţiile multiple, întrucât rezolvarea unei probleme de construcţii geometrice înseamnă determinarea *tuturor* soluţiilor posibile).

1.2 Teoria generală a construcţiilor geometrice în planul euclidian

1.2.1 Axiomele generale ale geometriei constructive

În acest curs, prin *geometrie constructivă* înţelegem, fără a încerca să dăm o definiţie extrem de precisă, acea partea a geometriei elementare care se ocupă cu construcţiile geometrice. Vom prezenta un sistem axiomatic minimal, preluat din [1] care, în stilul caracteristic al acestei abordări, menţionează care sunt elementele primare şi care sunt axiomele care leagă între ele elementele nedefinite. Axiomele descrise în această secţiune nu au de-a face cu nici un instrument particular. Axiomele principalelor instrumente (care precizează ce construcţii sunt posibile cu un anumit tip de instrument) vor fi tratate într-o secţiune separată.

Obiectul fundamental cu care vom lucra în acest curs este acela de *figură geometrică*. O figură geometrică este orice mulţime nevidă de puncte. Astfel, figurile geometrice cu care vom lucra cel mai frecvent vor fi: puncte, segmente de dreaptă, semidrepte, drepte, arce de cerc şi cercuri. Figurile geometrice vor fi notate, de regulă, cu majuscule greceşti: $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$.

Vom spune că o figură geometrică Φ_1 este o *parte* a unei figuri geometrice Φ_2 dacă, privite ca mulţimi de puncte, avem $\Phi_1 \subset \Phi_2$.

Presupunem că toate figurile geometrice pe care le vom întâlni sunt conţinute într-un acelaşi plan (care este, evident, şi el o figură geometrică), pe care îl vom numi *plan fundamental*.

Toate operaţiile care se execută cu mulţimi (reuniune, intersecţie, diferenţă) se pot executa, în egală măsură, şi cu figuri geometrice, întrucât, la urma urmei, figurile geometrice sunt cazuri particulare de mulţimi, ale căror elemente sunt, după cum am văzut, puncte.

În particular, operaţiile cu mulţimi pot fi utilizate pentru a defini noi figuri geometrice. Fie, de exemplu, punctele distincte din planul fundamental $A_1, A_2, \ldots, A_n$, unde $n \geq 3$ este un număr natural. Vom numi *poligon cu n laturi* figura geometrică

$$A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup \cdots \cup A_{n-1}A_n \cup A_nA_1.$$

Aici, fireşte, cu A_iA_{i+1} notăm segmentul de dreaptă determinat de cele două puncte[1].

Axioma I. *Planul fundamental este construit.*

Axioma II. *Dacă două figuri sunt construite, atunci se poate stabili dacă diferenţă lor este mulţimea vidă sau nu.*

Axioma III. *Dacă diferenţa a două figuri construite este nevidă, atunci această diferenţă este, de asemenea, construită.*

Axioma IV. *Dacă sunt construite două figuri cu intersecţia nevidă, atunci se poate construi cel puţin un punct din această intersecţie.*

Vom demonstra acum o serie de rezultate care rezultă direct din aceste axiome.

Propoziţia 1.1. *Dacă două figuri sunt construite, se poate stabili dacă diferenţa lor este mulţimea vidă sau nu.*

Demonstraţie. Să presupunem că figurile Φ_1 şi Φ_2 sunt construite. Fie $S_1 = \Phi_1 \setminus \Phi_2$ – diferenţa celor două figuri. Este clar că S_1 se poate reprezenta şi sub forma

$$S_1 = \Phi_1 \setminus (\Phi_1 \cap \Phi_2),$$

de unde rezultă că

$$\Phi_1 = S_1 \cup (\Phi_1 \cap \Phi_2).$$

Dacă figurile Φ_1 şi Φ_2 sunt construite, atunci, în virtutea axiomei II, putem spune dacă diferenţa lor, S_1, este vidă sau nu. Dacă $S_1 = \emptyset$, atunci, în mod evident, $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \Phi_1$, deci această intersecţie este nevidă, întrucât orice figură geometrică trebuie să conţină cel puţin un punct.

Dacă, în schimb, $S_1 \neq \emptyset$, atunci, în virtutea axiomei III, această figură se consideră construită iar, în virtutea axiomei II, putem spune dacă diferenţa $\Phi_1 \setminus S_1$ este vidă sau nu. Dar $\Phi_1 \setminus S_1 \equiv \Phi_1 \cap \Phi_2$, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

[1] Nu se presupune că poligonul este simplu, prin urmare, el poate avea auto-intersecţii

Propoziţia 1.2. *Dacă două figuri sunt construite, iar intersecţia lor este nevidă, atunci această intersecţie se poate presupune construită.*

Demonstraţie. Fie Φ_1 şi Φ_2 cele două figuri construite. Atunci

$$\Phi_1 \cap \Phi_2 = \Phi_1 \setminus (\Phi_1 \setminus \Phi_2),$$

iar figura din membrul drept este construită, conform axiomei III. $\square$

Propoziţia 1.3. *Dacă sunt construite două figuri, atunci şi reuniunea lor este construită.*

Demonstraţie. Fie Φ_1 şi Φ_2 cele două figuri construite. Notăm cu Π planul fundamental. Dacă una dintre figuri coincide cu planul fundamental, atunci reuniunea lor este egală cu acesta, care este deja construit (axiom I).

Să presupunem acum că nici una dintre cele două figuri construite nu coincide cu planul fundamental. Atunci, în virtutea axiomei III, sunt construite şi figurile $F_1 = \Pi \setminus \Phi_1$ şi $F_2 = \Pi \setminus \Phi_2$.

Utilizăm acum identitatea $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Pi \setminus (F_1 \cap F_2)$. Dacă intersecţia este vidă, atunci $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Pi$, deci reuniunea este construită în virtutea axiomei I. Dacă, dimpotrivă, $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, atunci această intersecţie, după cum am văzut mai sus, este construită, iar $\Phi_1 \cup \Phi_2$ este construită în virtutea axiomei III. $\square$

Propoziţia 1.4. *Dacă sunt construite două figuri, iar n este un număr natural (nenul) oarecare, atunci întotdeauna se poate stabili dacă intersecţia celor două figuri conţine cel puţin n puncte sau conţine mai puţine.*

Demonstraţie. Remarcăm, înainte de toate că, în conformitate cu consecinţa 1.1, date fiind două figuri construite Φ_1 şi Φ_2, se poate stabili întotdeauna dacă intersecţia lor, $\Phi_1 \cap \Phi_2$, este vidă sau nu.

În primul caz, consecinţa este, în mod evident, demonstrată. În cel de-al doilea caz, în virtutea axiomei IV, se poate construi un punct P' al intersecţiei $\Phi_1 \cap \Phi_2$. Apoi, în virtutea axiomei II, se poate stabili dacă mulţimile $\Phi'_1 = \Phi_1 \setminus \{P'\}$ şi $\Phi'_2 = \Phi_2 \setminus \{P'\}$ sunt sau nu nevide şi, prin urmare, şi dacă $\Phi'_1 \cap \Phi'_2$ este vidă sau nu. Dacă această intersecţie este vidă, înseamnă că Φ_1 şi Φ_2 au un singur punct comun, anume P'. Dacă, în schimb, $\Phi'_1 \cap \Phi'_2 \neq \emptyset$, atunci, în virtutea axiomei IV, se poate construi cel puţin un punct, fie el P'', care aparţine atât lui Φ'_1, cât şi lui Φ'_2. Este clar atunci, din modul de construcţie, că punctele P' şi P'' aparţine atât lui Φ_1, cât şi lui Φ_2, prin urmare am reuşit să construim două puncte comune celor două figuri. Considerăm acum figurile

$$\Phi''_1 = \Phi_1 \setminus \{P', P''\}, \quad \text{şi} \quad \Phi''_2 = \Phi_2 \setminus \{P', P''\}.$$

Din nou, fie intersecţia lor este mulţimea vidă, şi atunci Φ_1 şi Φ_2 au în comun numai două puncte, adică P' şi P'', fie este nevidă, iar atunci se poate construi un al treilea punct comun al figurilor Φ_1 şi Φ_2.

Repetând acest raţionament, după un număr finit de paşi, putem răspunde la întrebarea dacă intersecţia $\Phi_1 \cap \Phi_2$ conţinea sau nu cel puţin n puncte distincte. Astfel, consecinţa este demonstrată. □

Propoziţia 1.5. *Se poate construi orice număr finit de puncte comune a două figuri construite, dacă astfel de puncte există.*

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă, în mod direct, din demonstraţia consecinţei precedente. □

Propoziţia 1.6. *Se poate construi un punct care să aparţină unei figuri construite.*

Demonstraţie. Fie Φ o figură construită. Reprezentăm figura Φ ca intersecţie a două figuri: $\Phi_1 = \Phi$ şi $\Phi_2 = \Phi$. Atunci, în mod evident, $\Phi = \Phi_1 \cap \Phi_2$. Cum, conform axiomei IV, se poate construi un punct comun a două figuri date, afirmaţia este demonstrată. □

Propoziţia 1.7. *Dacă este construită o figură care nu coincide cu întregul plan fundamental, atunci se poate construi un punct din planul fundamental care, în mod evident, nu aparţine figurii construite.*

Demonstraţie. Să presupunem că în planul fundamental s-a construit o figură Φ, care nu coincide cu întregul plan. Atunci, în virtutea axiomelor I şi III, se poate considera construită şi figura $\Pi \setminus \Phi$. În virtutea consecinţei 1.6, se poate construi un punct care să aparţină figurii $\Pi \setminus \Phi$, adică să nu aparţină figurii Φ. □

1.3 Instrumente utilizate în construcţiile geometrice

Cele mai importante instrumente utilizate în construcţiile geometrice sunt următoarele patru:

(i) rigla (cu o singură muchie);

(ii) compasul;

(iii) rigla cu două muchii (cu laturile paralele);

(iv) echerul.

Aceste instrumente se utilizează fie în mod individual, fie în diferite combinaţii. De regulă, dacă în formularea unei probleme de construcţii geometrice nu se precizează instrumentele ce trebuie utilizate, se presupune că aceste instrumente sunt rigla cu o singură muchie şi compasul.

1.3.1 Rigla

Rigla, în sensul utilizat în teoria construcţiilor geometrice, este un instrument abstract. Ea este, în esenţă, un instrument *de forma* unei rigle, de tipul celor utilizate la desen, cu următoarele precizări:

1. doar una dintre cele două muchii ale sale se consideră dreaptă, cealaltă putând avea orice formă;

2. rigla nu este gradată;

3. lăţimea riglei nu este importantă;

4. lungimea riglei poate fi oricât de mare (întrucât, după cum vom vedea mai jos, folosind o singură dată rigla, se pot uni oricare două puncte ale planului, indiferent cât de îndepărtate ar fi unele de altele).

Iată de ce trebuie să facem o distincţie netă între *construcţiile geometrice*, în care trebuie doar să descriem modul de construire a unei figuri şi *desenul geometric*, în care aceste figuri trebuie desenate în mod practic şi în care caracteristicile *concrete* ale instrumentelor geometrice sunt esenţiale. Următoarea axiomă precizează construcţiile elementare ce se pot realiza cu ajutorul unei rigle:

Axioma A (Axioma riglei)**.** *Cu rigla se pot efectua următoarele construcţii geometrice:*

a) construirea unui segment care uneşte două puncte construite;

b) construirea unei drepte care trece prin două puncte construite;

c) construirea unei semidrepte care pleacă dintr-un punct construit şi trece printr-un alt punct construit.

1.3.2 Compasul

Compasul utilizat în construcţiile geometrice poate fi de două tipuri:

1. compasul colapsant;

2. transportatorul de segmente.

Cu primul tip de compas se poate construi doar un cerc sau un arc de cerc. Imediat ce se ridică de pe hârtie, cele două braţe ale sale cad unul peste celălalt ("colapsează"). De aceea, cu acest instrument, nu este posibil să construim două cercuri de aceeaşi rază sau să determinăm, pe o dreaptă dată, un segment de dreaptă de lungime egală cu cea a unui segment dat (adică să "transportăm segmentul").

Cel de-al doilea compas este cel pe care îl ştim din şcoală. Cu el se pot executa operaţiile imposibile pentru celălalt tip de compas. Este interesant că, după cum vom vedea imediat, cele două tipuri de compase sunt, de fapt, echivalente (cu alte cuvinte, cu un compas colapsant se pot realiza toate construcţiile realizabile cu un transportator de segmente).

Trebuie să menţionăm şi aici, ca şi în cazul riglei, că un compas utilizat în teoria construcţiilor geometrice este, de asemenea, un instrument idealizat. Vom vedea, de exemplu, că cu compasul se pot construi cercuri de diametre oricât de mari, ceea ce, desigur, cu un instrument concret este imposibil.

Compasul la care se referă axioma următoare este transportatorul de segmente.

Axioma B (Axioma compasului)**.** *Cu compasul se pot realiza următoarele construcţii geometrice:*

a) construirea unui cerc, dacă este construit centrul său şi un segment de lungime egală cu raza cercului (sau, cel puţin, capetele acestui segment);

b) construirea oricăruia dintre cele două arce de cerc complementare, dacă este construit centrul cercului, precum şi capetele comune ale arcelor.

Propoziţia 1.8. *Compasul colapsant şi transportatorul de segmente sunt echivalente, în sensul că cu ajutorul unui compas colapsant se pot realiza toate construcţiile care se pot executa cu ajutorul transportatorului de segmente.*

Demonstraţie. Una dintre implicaţii este evidentă: este clar că orice construcţie realizabilă cu transportatorul de segmente se poate realiza şi cu ajutorul compasului colapsant, aşa că ne vom concentra asupra celeilalte implicaţii.

Construcţia b) din axioma compasului, se poate executa, desigur, şi cu compasul colapsant, prin urmare trebuie doar să demonstrăm că, cu acest tip de compas, se poate realiza şi construcţia a).

Fie A un punct dat din plan şi BC un segment dat. Ceea ce trebuie să facem este să construim cercul de rază BC şi de centru A, folosind compasul colapsant. Vom face asta folosind următoarea serie de construcţii:

1) Construim cercul cu centrul în A şi care trece prin B.

2) Construim cercul cu centrul în B şi care trece prin A. Aceste două cercuri se intersectează în punctele D şi E.

3) Construim cercul cu centrul în E şi care trece prin C.

4) Construim cercul cu centrul în D şi care trece prin C.

5) Cercurile de la paşii 3) şi 4) se intersectează din nou în punctul F. Cercul de centru A şi de rază AF este cercul care trebuia construit.

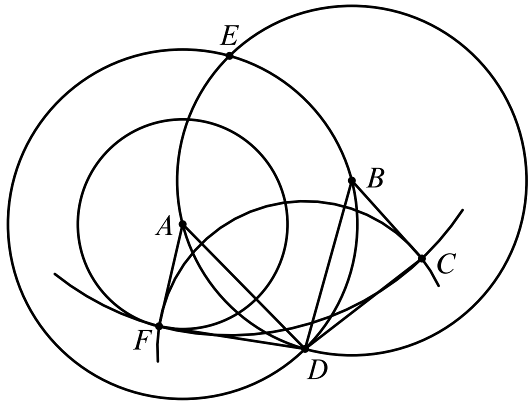

Figura 1.1

Lăsăm pe seama cititorului să demonstreze că triunghiurile (dreptunghice!) AFD şi BCD sunt congruente, ceea ce demonstrează că $AF = BC$, adică cercul de dentru A şi de rază BC este, într-adevăr, cercul care trebuia construit. □

1.3.3 Rigla cu două muchii

Rigla cu două muchii este, în fapt, o riglă pentru care şi cea de-a doua muchie este dreaptă, paralelă cu prima muchie. Ca şi în cazul riglei cu o singură muchie, şi aici se consideră că muchiile (ambele, de data aceasta) sunt infinite şi vom nota distanţa dintre ele cu h.

Axioma C (Axioma riglei cu două muchii)**.** *Cu ajutorul riglei cu două muchii se pot realiza următoarele construcţii:*

a) orice construcţie care se poate realiza cu rigla simplă;

b) în fiecare din cele două semiplane determinate de o dreaptă construită în planul fundamental, se poate construi câte o dreaptă situată la distanţa h de aceasta;

c) dacă sunt construite două puncte A şi B, atunci se poate stabili dacă distanţa AB este sau nu mai mare decât lăţimea h a riglei, iar dacă $AB > h$, atunci se pot construi două perechi de drepte paralele care trec, respectiv, prin punctele A şi B şi sunt situate, una faţă de cealaltă, la distanţa h.

1.3.4 Echerul

Echerul este, în esenţa lui, echerul pe care îl cunoaştem din geometria elementară, cu comentariile de rigoare privitoare la trasarea liniilor drepte pe care le-am făcut în cazul riglei. De asemenea, spre deosebire de echerele pe care le folosim în geometrie, în teoria abstractă a construcţiilor geometrice nu are importanţă ce unghiuri sunt în celelalte două vârfuri. De fapt, singurul lucru important este prezenţa unghiului drept.

Axioma D (Axioma echerului). *Echerul permite:*

a) realizarea tuturor construcţiilor menţionate în axioma dreptei;

b) construirea unei drepte care trece printr-un punct dat şi este perpendiculară pe o dreaptă construită;

c) dacă sunt construite un segment AB şi o figură Φ, atunci se poate stabili dacă figura Φ conţine sau nu puncte din care segmentul AB se vede sub un unghi drept, iar dacă astfel de puncte există, se poate construi unul dintre ele.

1.3.5 Construcţii fundamentale

Noţiunea de *construcţie fundamentală* este o noţiune care depinde de sistemul de instrumente selectat. Astfel, pentru o selecţie de instrumente sunt acele construcţii menţionate în axiomele instrumentelor şi în axiomele VII–IX. Orice construcţie geometrică se poate realiza cu instrumentele selectate dacă şi numai dacă ea se poate reduce la o secvenţă finită de construcţii fundamentale. Vom enumera aici doar construcţiile fundamentale corespunzătoare celei mai comune selecţii de instrumente: rigla şi compasul.

Aşadar, cu ajutorul riglei şi compasului se pot realiza următoarele construcţii fundamentale:

1) construirea unui segment care uneşte două puncte date (axioma A, a));

2) construirea unei drepte care trece prin două puncte construite (axioma A, b));

3) construirea unei semidrepte care pleacă dintr-un punct construit şi trece printr-un alt punct construit (axioma A, c));

4) construirea unui cerc dacă sunt construite centrul cercului şi un segment de dreaptă a cărei lungime este egală cu raza cercului sau, cel puţin, capetele acestui segment (axioma B, a));

5) construirea oricăruia dintre cele două arce complementare de cerc dacă sunt construite capetele lor comune şi centrul cercului (axioma B, b));

6) construirea oricărui număr finit de puncte comune a două figuri construite, dacă astfel de puncte există (Propoziţia 1.5);

7) construirea unui punct care aparţine unei figuri construite (Propoziţia 1.6);

8) construirea unui punct care nu aparţine unei figuri construite dacă această figură nu coincide cu întreg planul fundamental (Propoziţia 1.7).

1.3.6 Problema de construcţie

Într-o problemă de construcţii geometrice se cere construirea unei figuri geometrice în condiţiile în care:

- se prescrie un set de instrumente (dacă nu se face acest lucru, se presupune, în mod implicit, că aceste instrumente sunt rigla şi compasul);
- în planul fundamental este construită o figură (*figura dată*);
- sunt indicate o serie de proprietăţi pe care trebuie să le aibă figura care trebuie construită (proprietăţi care, de regulă, leagă figura de construit cu figura dată).

O figură care îndeplineşte condiţiile problemei se numeşte *soluţie* a problemei de construcţie corespunzătoare.

A *rezolva* o problemă de construcţii geometrice înseamnă a găsi *toate* soluţiile problemei. A găsi o soluţie, înseamnă să realizăm respectiva construcţie printr-o secvenţă *finită* de construcţii fundamentale.

Vom da acum un exemplu de problemă de construcţii geometrice care va fi rezolvată cu diferite seturi de instrumente. În această problemă se cere, pur şi simplu, să se construiască mijlocul unui segment, dat prin capetele sale, A şi B. Pentru fiecare set de instrumente vom enumera construcţiile fundamentale care conduc la rezolvarea problemei.

1. **Realizarea construcţiei cu ajutorul riglei şi al compasului** Se construiesc, succesiv

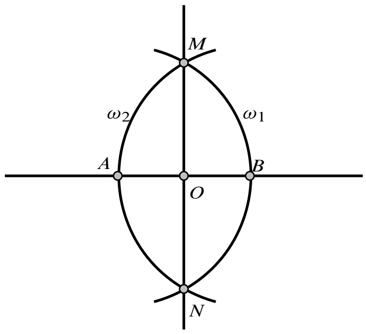

Figura 1.2

(vezi figura 1.2):

1) dreapta AB (construcţia fundamentală 2);
2) cercul $\omega_1(A, AB)$ (construcţia fundamentală 4);
3) cercul $\omega_2(B, AB)$ (construcţia fundamentală 4);
4) punctele comune M şi N ale cercurilor ω_1 şi ω_2 (construcţia fundamentală 6);

5) dreapta MN (construcţia fundamentală 2);
6) punctul comun O al dreptelor AB şi MN (construcţia fundamentală 6).

Este uşor să ne convingem că $AO = BO$, ceea ce înseamnă că O este punctul căutat.

2. **Realizarea construcţiei cu ajutorul compasului** Se construiesc succesiv (vezi fi-

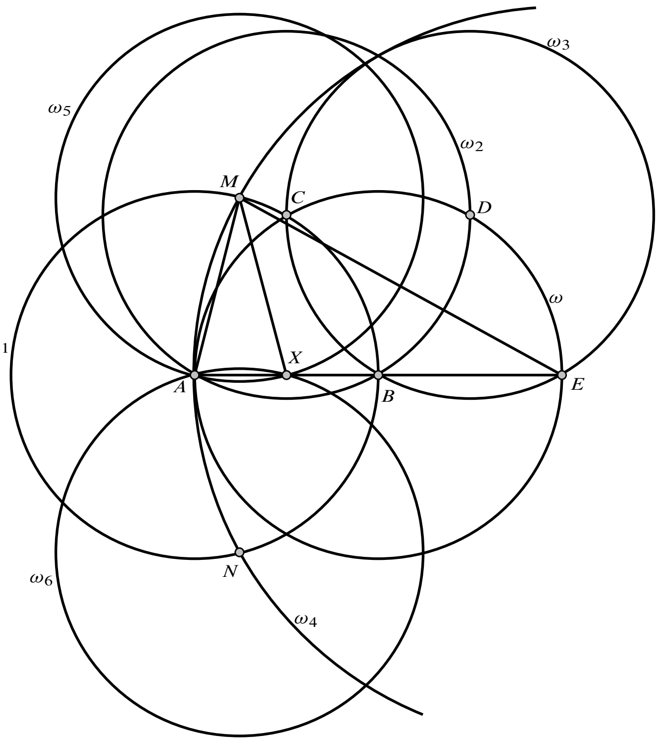

Figura 1.3

gura 1.3):

1) cercul $\omega(B, BA)$ (axioma A, a));
2) cercul $\omega_1(A, AB)$ (axioma A, a));
3) punctul comun C al cercurilor ω şi ω_1 (axioma VII);
4) cercul $\omega_2(C, CA)$ (axioma A, a));
5) punctul comun D al cercurilor ω şi ω_2, diferit de punctul A (axioma VII);
6) cercul $\omega_3(D, DB)$ (axioma A, a));
7) punctul comun E al cercurilor ω şi ω_3, diferit de punctul C (axioma- VII).

Remarcăm că punctele A, B, E sunt situate pe o dreaptă, iar $AE = 2AB$. Construim, mai departe:

8) cercul $\omega_4(E, EA)$ (axioma A, a));
9) punctele comune M şi N ale cercurilor ω_1 şi ω_4 (axioma VII);
10) cercul $\omega_5(M, MA)$ (axioma A, a));
11) cercul $\omega_6(N, NA)$ (axioma A, a));
12) punctul comun X al cercurilor ω_5 şi ω_6, diferit de A (axioma VII).

Nu este greu de constatat că punctul X se află pe dreapta B. În plus, triunghiul AMX este asemenea cu triunghiul AEM, întrucât ambele sunt isoscele şi au unghiul MAE de la baze comun. Prin urmare, avem:

$$\frac{AX}{AM} = \frac{AM}{AE} \quad \text{sau} \quad \frac{AX}{AB} = \frac{AB}{2AB},$$

astfel că

$$AX = \frac{1}{2}AB$$

şi, prin urmare, punctul X este cel căutat.

3. **Realizarea construcţiei cu ajutorul riglei cu două muchii**

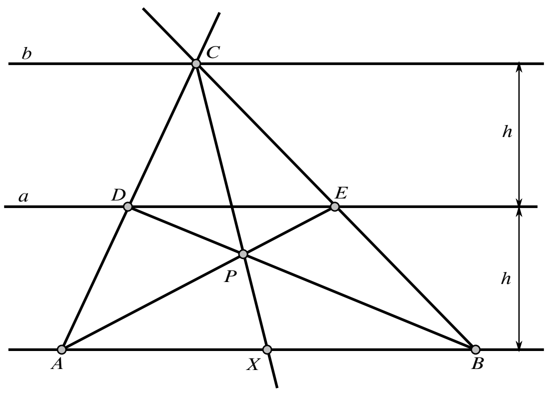

Figura 1.4

Construim, succesiv (vezi figura 1.4):

1) dreapta AB (axioma C, a);
2) o dreaptă a, paralelă cu AB şi care trece la distanţa h (lăţimea riglei) de ea (axioma C, b);
3) dreapta b, paralelă cu a, situată faţă de ea la distanţa h, care nu coincide cu dreapta AB (axioma C, b);
4) un punct C pe dreapta b (axioma VIII);

5) dreptele AC şi BC (axioma C, a);
6) punctele $D = a \cap AC$ şi $E = a \cap BC$ (axioma VII);
7) dreptele AE şi BD (axioma C, a);
8) punctul $P = AE \cap BD$ (axioma VII);
9) dreapta CP (axioma C, a);
10) punctul $X = CP \cap AB$ (axioma VII).

Cum DE este linia mijlocie a triunghiului ACB, rezultă că AE şi BD sunt medianele sale şi, prin urmare, şi CP trebuie să fie mediană, ceea ce înseamnă că punctul X este punctul căutat.

4. **Realizarea construcţiei cu ajutorul echerului**

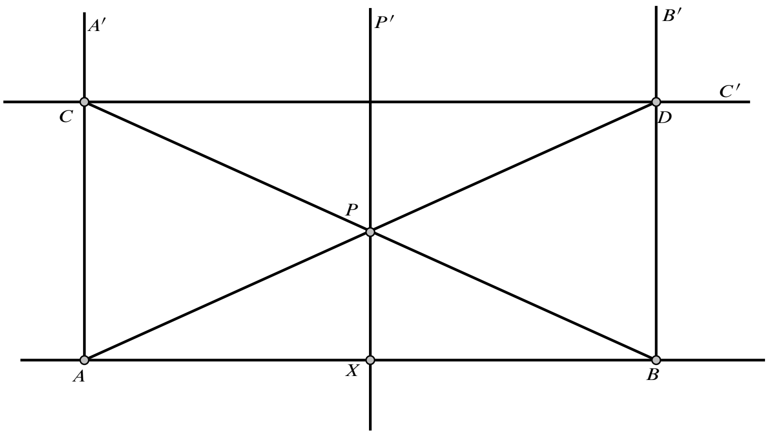

Figura 1.5

Construcţia constă în următorii paşi (vezi figura 1.5):

1) construim dreapta AB (axioma D, a));
2) construim dreptele AA' şi BB', perpendiculare pe dreapta AB (axioma D, b));
3) alegem pe AA' un punct oarecare C, diferit de A (axiomele IV şi VIII);
4) prin punctul C ducem $CC' \perp AC$ (axioma D, b));

Construim apoi, în mod succesiv:

5) punctul $D = CC' \cap BB'$ (axioma VII);
6) dreptele AD şi BC (axioma D, a);
7) punctul $P \equiv AD \cap BC$ (axioma VII);

8) dreapta $PP' \perp AB$ (axioma D, b));

9) punctul $X = PPi \cap AB$ (axioma VII).

Se poate verifica foarte uşor că punctul X este cel căutat.

1.4 Probleme elementare de construcţii geometrice

Am văzut în exemplul de problemă de construcţii geometrice pe care l-am rezolvat la sfârşitul paragrafului precedent că chiar pentru o problemă foarte simplă, cum este cea examinată, descompunerea problemei în probleme fundamentale este foarte laborioasă şi implică un număr mare de paşi. De aceea, în practică, lucrurile se desfăăşoară un pic altfel, în sensul că o problemă dată se reduce nu la o secvenţă de probleme fundamentale (adică, până la urmă, la axiome), ci la o serie de probleme elementare, care se presupun cunoscute de toată lumea.

Nu există un consens general în privinţa selecţiei problemelor elementare de construcţii geometrice, dar ideea este că ele trebuie să fie cele întâlnite în manualele de geometrie din şcoala elementară. Reproducem aici lista lui Dadaian, cea mai recentă şi, în acelaşi timp, una dintre cele mai cuprinzătoare.

Construcţia 1.1. *Să se construiască un segment egal cu un segment dat, a.*

Demonstraţie. Construim o dreaptă oarecare, fie ea MN, pe care construim un punct A. Din punctul A, ca centru, şi cu o rază egală cu segmentul dat a, construim un cerc ce intersectează dreapmta MN în punctele B şi C. Segmentele AB şi AC sunt, ambele, soluţii ale problemei, deoarece este clar că fiecare dintre ele are lungimea a. □

Construcţia 1.2. *Se dă un cerc $(\mathcal{C})$ şi se cere să se construiască în el ocoardă a cărei lungime să fie egală cu cea a unui segment dat, a.*

Demonstraţie. Este clar că, într-un cerc, nu pot exista coarde care să aibă lungimea mai mare decât diametrul d al cercului. Prin urmare, pentru ca problema să aibă soluţii, trebuie să avem $a \leq d$. Să presupunem, prin urmare, că această condiţie este îndeplinită. Construim, pe $(\mathcal{C})$, un punct oarecare, A. Din A, ca centru, şi cu raza egală cu a, construim un car care intersectează $(\mathcal{C})$ în punctele B şi C. Segmentele AB şi AC sunt coardele căutate. Ele coincid dacă $a = d$. □

Construcţia 1.3. *Să se construiască un segment egal cu suma a două segmente date a şi b.*

Demonstraţie. Construim o dreaptă MN şi pe ea construim un punct oarecare, A. Din A, ca centru, şi cu rază egală cu a, construim un cerc ce intersectează semidreapta AN în B. Din B, ca centru, şi cu raza b, construim un cerc ce intersectează semidreapta BN în C. Segmentul AC este cel căutat. □

Construcţia 1.4. *Să se construiască un segment egal cu diferenţa a două segmente, a şi b.*

Demonstraţie. Presupunem, pentru fixarea ideilor, că $a \geq b$. Construim o dreaptă oarecare, MN, şi pe ea construim un punct A. Din A, ca centru, şi cu raza A, construim un cerc care intersectează semidreapta AN în punctul B. Din B, ca centru, şi cu raza b, construim un cerc ce intersectează semidreapta BN în punctul C. Segmentul AC este cel căutat. Dacă $a = b$, atunci $C = A$, ceea ce înseamnă că segmentul diferenţă se reduce la un punct. □

Construcţia 1.5. *Să se construiască un triunghi cu laturile egale cu 3 segmente date, a, b, c. Presupunem, pentru fixarea ideilor, că $b + c > a$.*

Demonstraţie. Construim o dreaptă oarecare, MN, şi pe ea luăm un punct B. Din B, ca centru, şi cu raza a, ducem un cerc ce intersectează semidreapta BN în punctul C. Din B, ca centru, şi cu raza c, se duce un cerc $(\mathcal{C}_1)$. Din C, ca centru, şi cu raza b, se duce un cerc $(\mathcal{C}_2)$. Cercurile $(\mathcal{C}_1)$ şi $(\mathcal{C}_2)$ se intersectează în punctele A şi A'. Fiecare dintre triunghiurile ABC şi $A'BC$ reprezintă câte o soluţie a problemei. Într-adevăr, avem $BC = a$, $CA = CA' = b$ şi $AB = A'B = c$. □

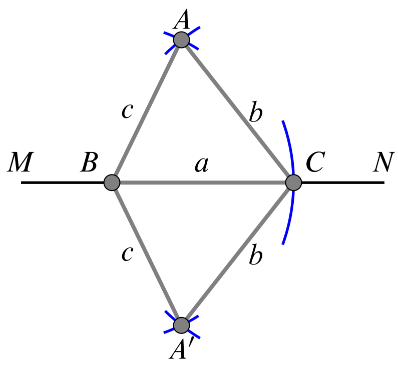

Figura 1.6

Construcţia 1.6. *Să se construiască un unghi egal cu un unghi dat, α.*

Demonstraţie. Construim, mai întâi, o dreaptă oarecare şi, pe ea, un punct O. Din vârful unghiului α, ca centru, şi cu o rază arbitrară, ducem un cerc ce intersectează laturile unghiului în punctele A şi B. Cu aceeaşi rază, dar, de data aceasta, cu centrul în punctul O, începând de la semidreapta ON, în sens pozitiv, construim arcul $\overset{\frown}{O_1 O_2}$, unde $O_1 \in MN$. Din O_1, ca centru, şi cu raza AB, construim un cerc de intersectează arcul $\overset{\frown}{O_1 O_2}$ în punctul C. Construim semidreapta ON. Unghiul căutat este unghiul $\angle CON$. □

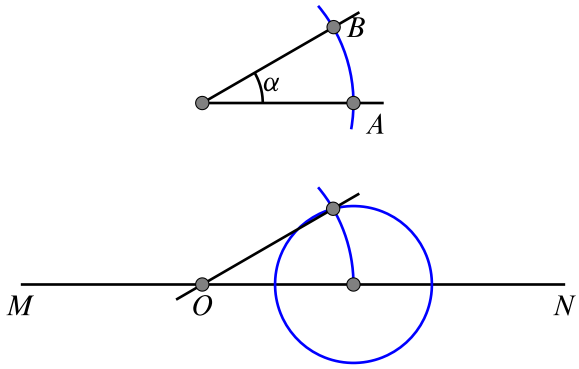

Figura 1.7

Construcţia 1.7. *Construiţi bisectoarea unui unghi dat.*

Demonstraţie. Fie $\angle ABC$ unghiul dat. Din vârful B al unghiului, ca centru, şi cu o rază arbitrară, ducem un cerc care intersectează semidreptele BA, respectiv BC, în D, respectiv E. Din D şi E, ca centre, cu o rază arbitrară, ducem câte un cerc (raza e aceeaşi pentru ambele). Fie H punctul din interiorul unghiului în care se intersectează cele două cercuri. Atunci BH este bisectoarea unghiului $\angle ABC$. □

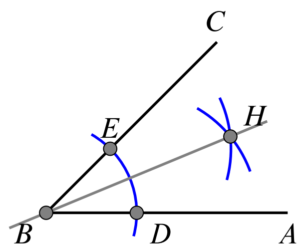

Figura 1.8

Construcţia 1.8. *Să se construiască mediatoarea unui segment dat.*

Demonstraţie. Fie AB segmentul dat. Din A şi B, ca centre, cu o aceeaşi rază, mai mare decât jumătate din lungimea segmentului AB, se construiesc două cercuri, care se intersectează în punctele C şi D. Construim dreapta CD. Aceasta este mediatoarea segmentului AB, iar punctul de intersecţie, $\{M\} = AB \cap CD$ este mijlocul segmentului AB. □

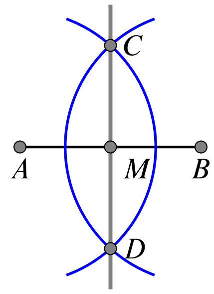

Figura 1.9

Construcţia 1.9. *Dintr-un punct dat, P, exterior unei drepte date MN, să se construiască o perpendiculară pe această dreaptă.*

Demonstraţie. Din P, ca centru, şi cu rază mai mare decât distanţa de la P la MN, construim un cerc ce intersectează MN în punctele A şi B. Atunci perpendiculara căutată este mediatoarea segmentului AB (construcţia precedentă). □

Construcţia 1.10. *Printr-un punct P, exterior unei drepte date, MN, să se construiască o paralelă la MN.*

Demonstraţie. Din P, ca centru, şi cu o rază mai mare decât distanţa de la P la MN, construim un cerc $(\mathcal{C}_1)$, care intersectează MN în punctele A şi B. Din B, ca centru, şi cu aceeaşi rază, construim un cerc $(\mathcal{C}_2)$. Din P, ca centru, cu raza AB, construim un cerc $(\mathcal{C}_3)$. Fie C unul dintre punctele de intersecţie ale cercurilor $(\mathcal{C}_2)$ şi $(\mathcal{C}_3)$ (cel situat de aceeaşi parte a dreptei MN ca şi P). Construim dreapta BC. Este uşor de constatat că $PC \parallel MN$. □

Construcţia 1.11. *Să se construiască un triunghi dacă se dau o latură şi două unghiuri.*

Demonstraţie. Rematcăm, înainte de toate, că dacă se conosc două unghiuri, atunci, în mod automat, se cunoaşte şi cel de-al treilea unghi. Prin urmare, putem presupune că cele două unghiuri date au ca latură comună latura dată. Construim, prin urmare, cele două unghiuri la capetele segmentului dat şi prelungim laturile necomune până se intersectează şi, în acest mod, obţinem cel de-al treilea vârf al triunghiului. □

Construcţia 1.12. *Să se construiască un triunghi dacă se dau două laturi şi unghiul cuprins între ele.*

Construcţia 1.13. *Să se construiască un triunghi dacă se dau două laturi şi unghiul opus uneia dintre ele.*

Construcţia 1.14. *Să se construiască mijlocul unui arc de cerc.*

Construcţia 1.15. *Să se construiască un cerc care trece prin trei puncte necoliniare date,* A, B, C.

Construcţia 1.16. *Să se construiască un cerc dacă se dau două puncte* A *şi* B *ale sale şi tangenta* AT *în punctul* A.

Construcţia 1.17. *Să se construiască un cerc dacă se dau o coardă a sa şi un unghi înscris care se sprijină pe această coardă.*

Construcţia 1.18. *Să se construiască tangenta într-un punct dat al unui cerc dat.*

Construcţia 1.19. *Să se construiască o tangentă la un cerc dat, paralelă cu o dreaptă dată.*

Construcţia 1.20. *Să se construiască o tangentă la un cerc dat care trece printr-un punct dat, exterior cercului.*

Construcţia 1.21. *Să se construiască tangentele comune la două cercuri date.*

1.5 Metodica rezolvării problemelor de construcţii geometrice

Pentru rezolvarea unui anumit tip de probleme este necesar, mai întâi, să se elaboreze o schemă de rezolvare a problemelor respective. O posibilă modalitate de abordare a problemelor de construcţii geometrice ar putea fi următoarea:

1. Stabilim mai întâi un număr (finit) de cazuri care să epuizeze toate posibilităţile de alegere a datelor problemei.

2. Pentru fiecare dintre cazuri stabilim dacă problema are soluţii şi, în caz afirmativ, stabilim numărul lor.

3. Pentru fiecare caz când problema are soluţii, indicăm o modalitate de determinare (cu ajutorul instrumentelor selectate) a fiecărei dintre soluţiile posibile sau stabilim că soluţia nu poate fi obţinută cu ajutorul instrumentelor selectate.

Experienţa a demonstrat că acest “algoritm” nu este cel mai eficient şi s-a optat pentru un altul, care se bazează, în fapt, pe metodele generale de rezolvare a problemelor de matematică. Conform acestei abordări, rezolvarea unei probleme de construcţii geometrice se face, în general, în următorii paşi:

1. analiza;

2. construcţia;

3. demonstraţia;

4. discuţia.

Vom explica acum, rând pe rând, semnificaţia acestor patru paşi.

1.5.1 Analiza

Acest pas este unul pregătitor şi el ne permite stabilirea unor dependenţe între figura dată şi cea căutată care să ne conducă la stabilirea unui mod de construire a figurii căutate. Se construieşte, mai întâi, cu aproximaţie, figura căutată. (Sintagma ce se utilizează, în astfel de situaţii, este: “Presupunem figura deja construită”). Eventual, la nevoie, se pot face şi construcţii ajutătoare.

Să presupunem, de exemplu, că trebuie să construim un triunghi la care se cunoaşte o latură şi mediana şi înălţimea care îi corespund (vezi figura 1.10). Considerând figura auxiliară, remarcăm imediat că triunghiul ABC este uşor de construit dacă putem construi triunghiul BDE. Dar triunghiul BDE este un triunghi dreptunghic la care se cunoaşte ipotenuza m şi cateta h, problemă care se presupune rezolvată (problema elementară 12.).

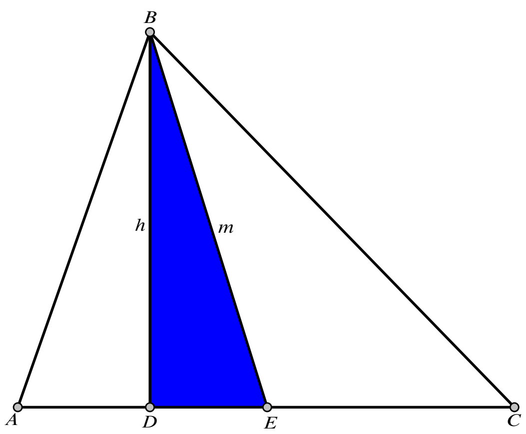

Figura 1.10

Este util să avem în vedere următoarele observaţii, utile pentru analiza problemei.

1) Dacă pe desenul auxiliar pe care l-am făcut nu vedem legături evidente între elementele date şi cele ce trebuie construite, care să ne ajute efectiv la rezolvarea problemei, putem să facem construcţii auxiliare: dacă printre elementele date sunt puncte, putem să le unim prin drepte şi să căutăm punctele de intersecţie ale acestor drepte, dacă se dau segmente putem, iarăşi, să le prelungim şi să căutăm punctele de intersecţie ale dreptelor corespunzătoare, etc. Uneori este util să ducem paralele la dreptele date sau perpendiculare pe ele.

   Să presupunem, de exemplu, că trebuie să construim o dreaptă care trece printr-un punct dat A şi este egal depărtată de două puncte date, B şi C (vezi figura 1.11). Este comod să începem prin desenarea figurii cerute: construim, mai întâi, o dreaptă a, pe ea alegem un punct A şi, la distanţe egale de dreapta a, de-o parte şi de alta a sa, alegem punctele B şi C. Nu apare, încă, pe desen, nici o conexiune care să ne permită să rezolvăm problema. Coborâm perpendicularele BB_1 şi CC_1 din B şi C pe a ($B_1, C_1 \in a$), construim segmentul BC şi punctul M în care acest segment intersectează dreapta a. Este uşor de verificat că punctul M este mijlocul segmentului BC, şi de aici rezultă modul de realizare a construcţiei.

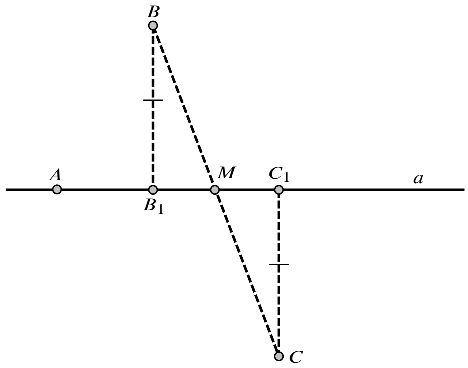

Figura 1.11

2) Dacă în enunţul problemei se dă suma sau diferenţa a două segmente de dreaptă sau două unghiuri, acestea trebuie reprezentate pe desenul auxiliar, dacă nu cumva deja sunt prezente.

   Să presupunem, de exemplu, că ni se cere să construim un triunghi dreptunghic, în care se cere un unghi ascuţit şi suma catetelor (vezi figura 1.12). Desenăm un triunghi dreptunghic oarecare, ABC. Prin ipoteză, se dau: $\angle\alpha$ şi un segment de lungime m.

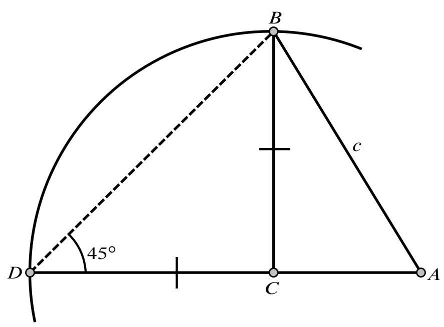

Figura 1.12

Triunghiul ABC căutat trebuie să verifice condiţiile: $\angle A = \alpha$, $AC + CB = m$, $\angle C = 90°$. Pentru a introduce în desen segmentul de lungime m plasăm, pe prelungirea laturii AC, segmentul $CD = BC$; atunci $AD = m$. Triunghiul ADB este uşor de construit, deoarece în el sunt cunoscute: latura $AD = m$ şi două unghiuri:

$\angle A = \alpha$ şi $\angle D = 45°$ (problema elementară 8). După construirea triunghiului ADB, construirea triunghiului cerut în problemă se reduce la problema elementară 4.

3) Un alt lucru pe care este bine să îl facem în timpul analizei este să ne reamintim teoreme şi probleme de construcţii rezolvate de noi mai înainte şi care sunt asemănătoare cu problema curentă.

1.5.2 Construcţia

Această etapă a rezolvării este momentul culminant, deoarece acum se realizează, efectiv, construcţia, folosindu-se construcţiile fundamentale şi cele elementare, menţionate mai devreme. Vom ilustra această etapă printr-o problemă cunoscută din şcoală, aceea a construirii cercului înscris într-un triunghi dat.

După cum se ştie, centrul cercului înscris se află în punctul de intersecţie a bisectoarelor triunghiului. Prin urmare, construcţia va consta din următorii paşi:

1) Se construiesc bisectoarele a două unghiuri ale triunghiului ABC (problema elementară 5).

2) Se construieşte punctul de intersecţie, I a celor două bisectoare (construcţia fundamentală 6).

3) Se construieşte perpendiculara coborâtă din I pe latura AB (construcţia elementară 4).

4) Se construieşte piciorul M al perpendicularei de la punctul precedent (construcţia fundamentală 6).

5) Se construieşte cercul de centru I şi de rază IM (cercul înscris în triunghiul ABC, construcţia fundamentală 4).

1.5.3 Demonstraţia

Rolul demonstraţiei în rezolvarea unei probleme de construcţii geometrice este acela de a stabili faptul că figura pe care am construit-o îndeplineşte, într-adevăr, toate condiţiile din enunţul problemei.

În cazul construcţiei cercului înscris într-un triunghi, realizată mai sus, trebuie să demonstrăm că cercul pe care l-am construit este, într-adevăr, cercul înscris în triunghiul dat. Pentru aceasta, remarcăm, înainte de toate, că cercul de centru I şi de rază IM este tangent dreptei AB, deoarece dreapta este perpendiculară pe raza IM a cercului. În plus, este clar că raza cercului este egală cu distanţa de la I la latura AB a triunghiului ABC.

Remarcăm, în continuare, că centrul I al cercului este egal depărtat de cele trei laturi ale triunghiului ABC, deoarece se află la intersecţia celor trei bisectoare interioare ale triunghiului. Prin urmare, distanţa de la centrul cercului până la laturile AC şi BC este egală, de asemenea, cu raza cercului construit. Deci, dacă ducem prin I perpendicularele pe aceste laturi, picioarele acestor perpendiculare se află pe cerc. Asta înseamnă că dreptele AC şi BC sunt tangente la cerc, deci demonstraţia este încheiată.

1.5.4 Discuţia

Atunci când facem construcţia, de regulă de restrângem la *o singură* soluţie şi presupunem că toţi paşii construcţiei se pot realiza. De multe ori, însă, în practică lucrurile nu stau chiar aşa. De aceea, pentru ca soluţia să fie completă, trebuie să facem o discuţie cae să acopere aspectele de mai jos.

1) Înainte de toate, trebuie să stabilim dacă pentru orice date iniţiale construcţia este posibilă, cu instrumentele alse şi prin metoda aleasă.

2) În cazul în care, pentru anumite date iniţiale, problema nu se poate rezolva prin metoda aleasă, se poate rezolva prin altă metodă, cu acelaşi set de instrumente?

3) Câte soluţii există pentru o anumită alegere a datelor iniţiale?

Vom vedea, în soluţiile problemelor de mai jos cum se procedează în cazuri concrete.

1.6 Exemple de probleme de construcţii rezolvate

Problema 1. Să se construiască un triunghi dacă se dau: o latură şi medianele corespunzătoare celorlalte două laturi.

Soluţie. `Analiza.` Presupunem că triunghiul ABC este cel căutat (vezi figura 1.13). AB este latura dată, iar AM_1 şi BM_2 sunt medianele date, iar G este punctul de intersecţie a medianelor (i.e. centrul de greutate). Prin ipoteză, ni se dau trei segmente de lungime c, m_1, m_2 astfel încât $AB = c, AM_1 = m_1$ şi $BM_2 = m_2$. Construcţia triunghiului ABC se reduce la construcţia a trei puncte – vârfurile triunghiului. Cum latura AB este dată, două dintre vârfurile triunghiului sunt deja construite, deci mai rămâne de construit doar vârful C. Pe de altă parte, $\{C\} = AM_2 \cap BM_1$, deci problema este rezolvată dacă sunt construite punctele M_1 şi M_2.

Punctele M_1 şi M_2 se află pe semidreptele AG, respectiv BG, iar punctul M_1 se află la distanţa m_1 de A, în timp ce punctul M_2 se află la distanţa m_2 de B. Aşa stând lucrurile, rezolvarea problemei se reduce la construirea punctului G. Punctul G este al treile vârf al triunghiului ABG şi se poate construi (A şi B fiind date), întrucât $AG = \frac{2}{3}m_1$, iar $BG = \frac{2}{3}m_2$, adică toate laturile triunghiului ABG sunt cunoscute.

`Construcţia.` Construim succesiv:

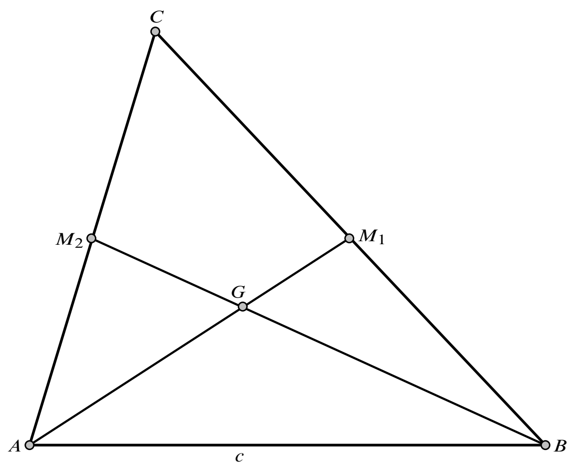

Figura 1.13

1) segmentul AB, de lungime dată c (problema elementară 1);

2) segmentul r_1 de lungime $\frac{2}{3}m_1$;

3) segmentul r_2 de lungime $\frac{2}{3}m_2$;

4) triunghiul ABG, de laturi de lungimi egale, respectiv, cu c, r_1, r_2 (problema elementară 7);

5) semidreptele AG şi BG (construcţia fundamentală 3);

6) punctul M_1 pe semidreapta AP astfel încât $AM_1 = m_1$ (problema elementară 1);

7) punctul M_2 pe semidreapta BP astfel încât $BM_2 = m_2$ (problema elementară 1);

8) punctul $C = AM_2 \cap BM_1$.

`Demonstraţia.` Din construcţie nu rezultă, în mod explicit, un singur lucru: faptul că AM_1 şi BM_2 sunt, într-adevăr, *medianele* triunghiului ABC construit de noi. Pentru asta este suficient să demonstrăm că punctul M_1 este mijlocul segmentului BC, în timp ce punctul M_2 este mijlocul segmentului AC.

Notăm cu N_1 mijlocul segmentului AP şi cu N_2 – mijlocul segmentului BP. Atunci patrulaterul $M_1M_2N_1N_2$ este un paralelogram, deoarece diagonalele sale se înjumătăţesc (vezi figura 1.14). Aşadar, segmentele de dreaptă M_1M_2 şi N_1N_2 sunt egale şi paralele.

Pe de altă parte, segmentul N_1N_2 este linie mijlocie în triunghiul ABP, ceea ce înseamnă că $N_1N_2 \parallel AB$ şi $N_1N_2 = \frac{1}{2}AB$. Din cele spuse de mai sus rezultă, atunci, că avem şi $M_1M_2 \parallel AB$ şi $M_1M_2 = \frac{1}{2}AB$. Dar asta înseamnă că M_1M_2 este linie mijlocie în triunghiul ABC, adică AM_1 şi BM_2 sunt mediane în triunghiul ABC.

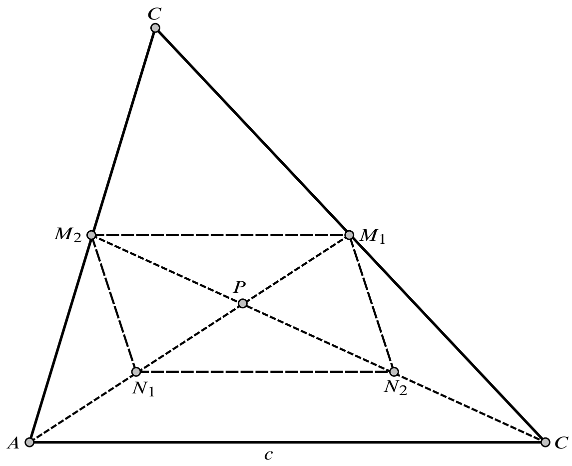

Figura 1.14

`Discuţia.` De regulă, când facem discuţia unei soluţii a unei probleme de construcţii geometrice, ne întoarcem la realizarea construcţiei, examinăm paşii pe care i-am făcut şi încercăm să identificăm locurile unde ar putea exista probleme. Acestea sunt legate de construcţiile care nu se pot realiza întotdeauna.

În cazul nostru concret, construcţiile 1), 2) şi 3) se pot realiza, în mod evident, totdeauna. În ceea ce priveşte construcţia 4), trebuie să impunem nişte restricţii. Astfel, în acest caz, trebuie să construim triunghiul ABP, ale cărui laturi au lungimile $AB = c$, $AP = \frac{2}{3}m_1$, $BP = \frac{2}{3}m_2$. Pentru ca acest triunghi să poată fi construit, este necesar şi suficient ca aceste lungimi să verifice inegalităţile triunghiului, care, în cazul nostru, se pot sintetiza prin

$$\frac{2}{3}|m_1 - m_2| < c < \frac{2}{3}(m_1 + m_2). \tag{1.1}$$

Prin urmare triunghiul ABP există dacă şi numai dacă este verificată dubla inegalitate de mai sus.

Mai departe, construcţiile de la punctele 5), 6) şi 7) sunt, de asemenea, în mod evident, posibile pentru orice date iniţiale.

Mai avem de verificat cazul construcţiei 8). Aceasta înseamnă să vedem dacă dreptele AM_2 şi BM_1 se intersectează pentru orice date iniţiale, iar intersecţia se află de aceeaşi parte a dreptei AB ca şi punctul P (admiţând că acesta există).

Să presupunem că dreptele AM_2 şi BM_1 ar fi paralele. Atunci segmentele paralele AB şi M_2M_1 cuprinse între cele două drepte paralele ar fi egale. Dar noi am demonstrat că $M_2M_1 = \frac{1}{2}AB$, deci ajungem la o contradicţie.

Dacă, în schimb, dreptele AM_2 şi BM_1 s-ar intersecta, dar de cealaltă parte a dreptei AB, relativ la punctul P, atunci segmentul AB ar fi mai mic decât segmentul M_2M_1, ceea ce ne-ar conduce, din nou, la o contradicţie.

Prin urmare, singura restricţie pentru realizarea construcţiei este cea de la construcţia 4). Deci, triunghiul ABC există şi se poate construi cu rigla şi compasul dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia (1.1). □

Observaţia 1. Discuţia, aşa cum am făcut-o, nu este, propriu-zis, completă. Ar mai rămâne de demonstrat că soluţia este unică, mai precis, până la urmă, că o latură şi medianele ce pleacă din cele două capete ale sale determină în mod unic triunghiul. Lăsăm pe seama cititorului să verifice acest fapt.

Problema 2. Două drepte, a şi b, intersectează o a treia dreaptă, fie ea c. Să se construiască un segment de lungime egală cu o lungime dată l, astfel încât segmentul să fie paralel cu dreapta c şi să aibă un capăt pe dreapta a, iar celălalt pe dreapta b.

Soluţie. `Analiza.` Fie AB segmentul căutat (vezi figura 1.15). Asta înseamnă că $AB = l$, $AB \parallel c$, $A \in a$, $B \in b$.

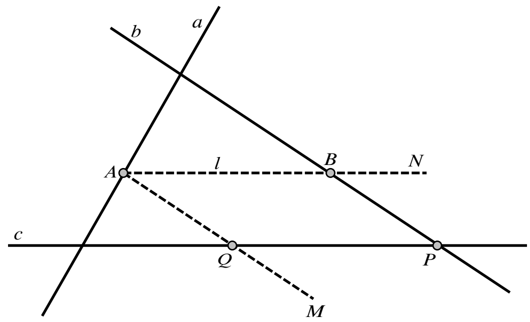

Figura 1.15

Pentru evidenţierea legăturilor dintre elementele date şi cele căutate, vom face, mai întâi, nişte construcţii suplimentare.

Astfel, fie $P = c \cap b$. Ducem $AM \parallel b$ şi fie $Q = AM \cap c$. Atunci $PQ = AB = l$, deoarece patrulaterul $ABPQ$ este un paralelogram. Aşadar, pentru construirea segmentului AB este suficient să determinăm poziţia punctului A, care ne conduce apoi la construirea punctului Q, care după cum vom vedea, nu este dificilă.

`Construcţia.` Construcţia decurge în modul următor:

1) Construim punctul $P = b \cap c$ (construcţia fundamentală 6.).

2) Pe dreapta c construim un punct Q astfel încât să avem $PQ = l$ (problema elementară 1.).

3) Construim dreapta $QM \parallel b$ (problema elementară 1.).

4) Construim punctul $A = QM \cap a$ (construcţia fundamentală 6.).

5) Construim dreapta $AN \parallel c$ (problema elementară 11.).

6) Construim punctul $B = AN \cap b$.

Segmentul AB este segmentul căutat.

Demonstraţia. Din construcţie se observă că $A \in a$, $B \in b$ şi $AB \parallel c$. În plus, $AB = PQ = l$, ca laturi opuse ale unui paralelogram. □

Discuţia. Punctul P există, deoarece, din ipoteză, dreapta c se intersectează cu dreapta b. De aceea, construcţia 1) este, întotdeauna, posibilă (vezi figura 1.16).

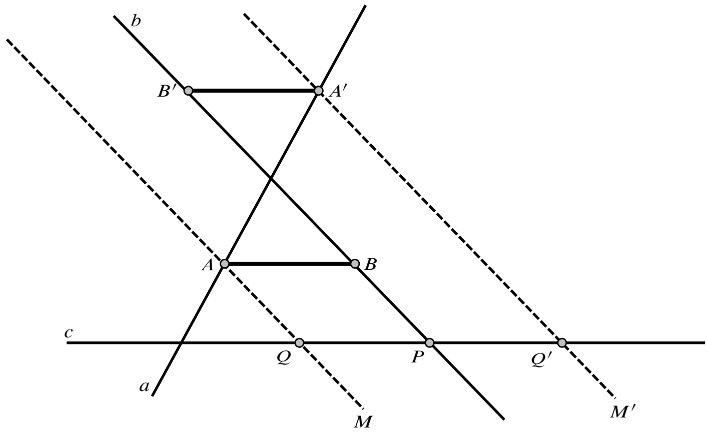

Figura 1.16

Construcţia 2) este, de asemenea, totdeauna posibilă şi ne dă două puncte, Q şi Q', situate de o parte şi de alta a punctului P, pe dreapta c. Construcţia 3) este, de asemenea, întotdeauna realizabilă şi are o singură soluţie, atât pentru punctul Q, cât şi pentru punctul Q'.

Mai departe, avem trei situaţii posibile:

a) QM (deci şi $Q'M'$) intersectează dreapta a (vezi figura 1.16);

b) QM (deci şi $Q'M'$) este paralelă dreapta a (vezi figura 1.17);

c) una dintre dreptele QM sau $Q'M'$ coincide cu dreapta a.

Cazul a) are loc, în mod evident, dacă dreptele a şi b se intersectează. Atunci construcţiile 4)–6) se pot realiza în mod unic atât pentru punctul Q, cât şi pentru punctul Q'. Problema are, deci, în acest caz, două soluţii.

Cazul b) are loc atunci când $a \parallel b$. Aici avem două variante: fie $PQ = l$ (adică $Q \in b$) şi atunci avem o infinitate de soluţii (orice dreaptă paralelă cu c va intersecta a şi b în două puncte care ne furnizează o soluţie a problemei), fie $Q \notin b$, şi atunci nu avem nici o soluţie.

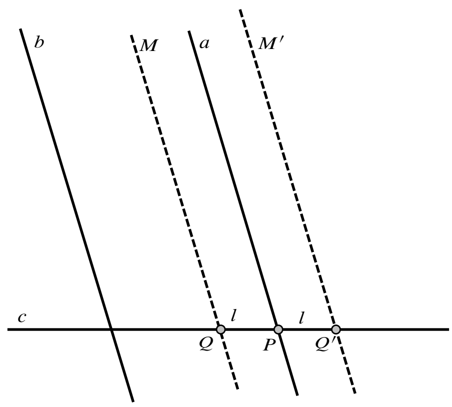

Figura 1.17

DE CONTINUAT AICI

Problema 3. Să se construiască un triunghi dacă se cunosc[2] bisectoarea, mediana şi înălţimea care pleacă dintr-un acelaşi vârf.

Soluţie. `Analiza.` Fie ABC triunghiul căutat (vezi figura 1.18), $AH = h_A$ – înălţimea coborâtă din A, $AM = m_A$ – mediana din A şi $AD = b_A$ – bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. Considerăm, de asemenea, cercul ω, circumscris triunghiului ABC. Fie O centrul său.

Atunci dreapta OM este perpendiculară pe coarda BC şi, de aceea, împarte în două părţi egale fiecare dintre cele două arce de cerc determinate de această dreaptă. Dar bisectoarea AD de asemenea împarte în două părţi egale arcul de pe cercul ω pe care se sprijină unghiul $\widehat{BAC}$. De aceea, dreapta OM şi bisectoarea AD se intersectează într-un punct P de pe cercul circumscris triunghiului ABC. Mai remarcăm că perpendiculara din O pe AP trece prin mijlocul S al segmentului AP.

`Construcţia.` Începem prin a construi triunghiul dreptungic AHD, în care cunoaştem ipotenuza $AD = b_A$ şi cateta $AH = h_A$. Pe semidreapta HD construim punctul M, intersecând cercul $\omega(A, m_A)$ cu dreapta DH. Notăm cu P punctul de intersecţie dintre dreapta AD şi perpendiculara în M pe dreapta DH. Construim centrul O al centrului circumscris ω ca intersecţie dintre dreapta MP şi mediatoarea segmentului AP.

Punctele B şi C se determină intersectând dreapta DH cu cercul $\omega \equiv \omega(O, OA)$.

`Demonstraţie.` Segmentul AH este înălţime a triunghiului ABC, din construcţia triunghiului dreptunghic AHD, cu unghiul drept în H. Prin urmare, dreptele AH şi $DH \equiv BC$ sunt perpendiculare. Punctul M este mijlocul segmentului BC, deoarece este punctul de intersecţie dintre coarda BC şi un diametru al cercului circumscris perpendicular pe ea. Întrucât punctul P este mijlocul arcului BPC, unghiurile înscrise $\widehat{BAP}$ şi $\widehat{CAP}$ sunt egale între ele, astfel că AD este bisectoarea unghiului A.

[2] ca lungimi de segmente!

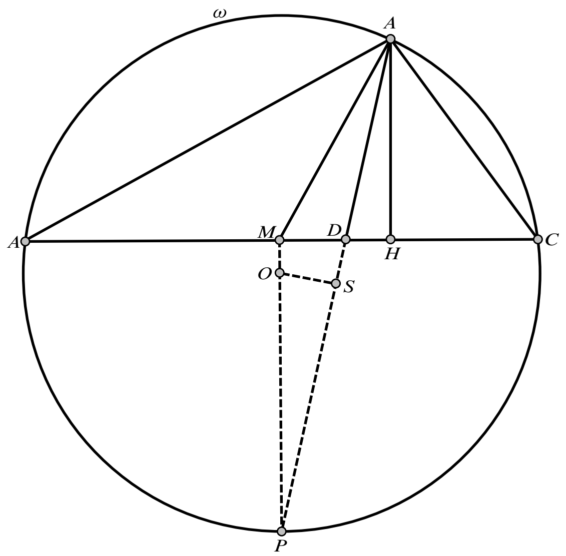

Figura 1.18

`Discuţie.` O condiţie necesară pentru rezolvabilitatea problemei este dubla inegalitate:

$$m_A \geq b_A \geq h_A,$$

întrucât, într-un triunghi, fie bisectoarea este situată între mediană şi înălţime, fie cele trei linii coincid[3]. Dacă $m_A = b_A = h_A$, atunci problema constă în construirea unui triunghi isoscel cunoscând înălţimea care pleacă din vărful în care se intersectează laturile egale. În mod evident, această problemă este nedeterminată (are o infinitate de soluţii!), iar construirea unei soluţii particulare este absolut trivială. De aceea, de acum încolo vom considera că suntem în situaţia în care e valabilă dubla inegalitate:

$$m_A > b_A > h_A$$

şi discutăm construcţia de mai sus.

Triunghiul ADH se poate construi şi este unic determinat de datele problemei. Cercul $\omega(A, m_A)$ se intersectează cu dreapta HD în punctul M, deoarece $m_A > h_A$.

Punctul P există şi este unic determinat, ca intersecţie dintre o perpendiculară şi o oblică pe aceeaşi dreaptă. Dreapta AP nu este perpendiculară pe MP, deoarece ea nu este paralelă cu DH; de aceea, perpendiculara pe segmentul AP se intersectează întotdeauna cu MP, adică centrul cercului circumscris există şi este determinat în mod unic prin construcţie. Dreapta DH se intersectează cu cercul ω în două puncte, fie ele

[3] Demonstraţi acest fapt!

B şi C, întrucât trece prin punctul D, care este interior acestui cerc. Astfel, modalitatea de construcţie descrisă conduce întotdeauna la o soluţie.

O altă modalitate de construcţie nu poate furniza o nouă soluţie. Într-adevăr, dacă se obţine un alt triunghi ABC, este uşor de demonstrat că el este egal cu cel construit mai sus[4]. $\square$

Problema 4. Să se construiască un triunghi ABC dacă se dau înălţimile corespunzătoare a două vârfuri, h_B şi h_C, precum şi mediana coresounzătoare celui de-al treilea vârf, m_A.

Soluţie. `Analiza.` Fie ABC triunghiul căutat (vezi figura 1.19), $AD = m_A$ – mediana sa care pleacă din vârful A, $BL = h_B$ şi $CH = h_C$ – înălţimile care pleacă din vârfurile B, respectiv C. Construirea triunghiului ABC ar deveni mult mai simplă dacă am reuşi să determinăm unghiul $\widehat{BAC}$. Dar

$$\measuredangle BAC = \measuredangle CAD + \measuredangle BAD.$$

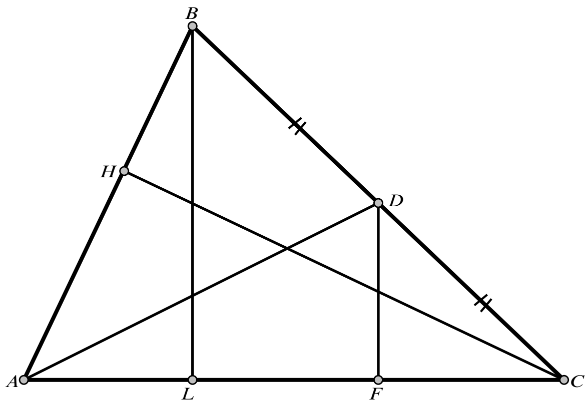

Figura 1.19

Ducem $DF \perp AC$. Atunci devine evident că unghiul CAD este uşor de determinat prin construirea triunghiului dreptunghic AFD, în care se cunosc ipotenuza $AD = m_A$ şi cateta $DF = \frac{1}{2}h_B$. În mod analog se determină şi unghiul $\widehat{BAD}$.

`Construcţia.` (vezi figura 1.20)

1) Construim triunghiul dreptunghic ADF, cu ipotenuza $AD = m_A$ şi o catetă egală cu $DF = \frac{1}{2}h_B$.

2) Construim triunghiul dreptunghic ADE, astfel încât punctele E şi F să fie de părţi diferite ale dreptei AD şi $DE = \frac{1}{2}h_C$.

[4]Faceţi această demonstraţie! Trebuie arătat că dacă pentru două triunghiuri bisectoarea, mediana şi înălţimea care pleacă din acelaşi vârf au aceeaşi lungime (iar cele trei lungimi ale elementelor triunghiurilor nu sunt egale între ele), atunci triunghiurile sunt egale.

3) Pe semidreapta FD luăm un segment $FK = h_B$.

4) Prin punctul K ducem o dreaptă paralelă cu dreapta AF şi notăm cu B punctul de intersecţie dintre această dreaptă şi semidreapta AE.

5) Construim dreapta BD.

6) Notăm cu C punctul de intersecţie dintre dreptele BD şi AF. Triunghiul ABC este triunghiul căutat.

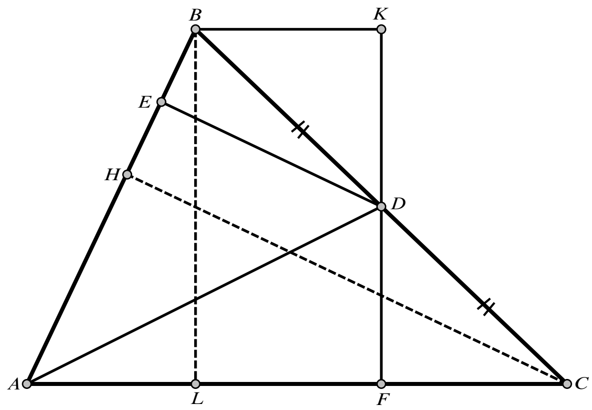

Figura 1.20

Demonstraţia. Din egalitatea triunghiurilor DBK şi CDF rezultă că $BD = DC$, adică AD este mediană. $AD = m_A$, din construcţie. Coborâm din B perpendiculara BL pe AF. Atunci $BL = KF = h_B$. Fie $CH \perp AB$. În triunghiul CHB, segmentul DE este linie mijlocie. De aceea, $CH = 2DE = h_C$, întrucât $DE = \frac{1}{2}h_C$, prin construcţie. Discuţia. Primul pas al construcţiei de mai sus este întotdeauna posibilă şi furnizează o soluţie unică dacă $m_A > \frac{1}{2}h_B$, al doilea – dacă $m_A > \frac{1}{2}h_C$. Paşii 3, 4, 5, 6 sunt ţntotdeauna posibili. Astfel, algoritmul de ma sus ne furnizează o soluţie unică dacă şi numai dacă sunt îndeplinite simultan inegalităţile $h_B < 2m_A$ şi $h_C < 2m_A$. Dacă măcar una dintre aceste inegalităţi nu este verificată, nu există soluţie. □

CAPITOLUL 2

Rezolvarea problemelor de construcţii folosind intersecţii de locuri geometrice

2.1 Noţiunea de loc geometric

O figură geometrică se poate da în mai multe moduri diferite: ca intersecţie, reuniune, diferenţă a altor figuri, prin indicarea anumitor proprietăţi pe care trebuie să le verifice punctele sale, etc. Astfel, de exemplu, acelaşi segment AB se poate da:

1) ca intersecţie a două semidrepte de sensuri opuse, AM şi BN, de pe dreapta AB;

2) ca diametru al unui cerc ω dat, perpendicular pe o coardă l;

3) ca mulţimea mijloacelor coardelor cercului ω paralele cu o dreaptă dată

sau în alte moduri.

Dacă o figură este dată prin indicarea unei proprietăţi pe care trebuie să le aibă punctele unei figuri şi numai ele, se numeşte *locul geometric al punctelor* care verifică această proprietate.

În cazul nostru concret, segmentul AB este locul geometric al mijloacelor cercului ω, paralele cu dreapta l.

Proprietatea prin care se caracterizează un loc geometric se numeşte *proprietatea caracteristică* a locului geometric cu pricina.

Foarte des se întâmplă ca unele figuri noi să se introducă tocmai ca locuri geometrice. Este cazul cercului, de exemplu, în cursul de geometrie elementară sau al conicelor în geometria analitică.

Pentru a demonstra că o figură F este locul geometric al punctelor care verifică o anumită proprietate, trebuie să demonstrăm două afirmaţii, una fiind reciproca celeilalte, anume că:

1) fiecare punct al figurii F verifică proprietatea cerută;

2) orice punct care îndeplineşte proprietatea cu pricina aparţine figurii F.

Considerăm, în cele ce urmează, câteva exemple de locuri geometrice.

Exemplul 2.1.1. Se dau două drepte paralele a şi b şi o dreaptă c, perpendiculară pe ele. Se cere să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de cele trei drepte (vezi figura 2.1).

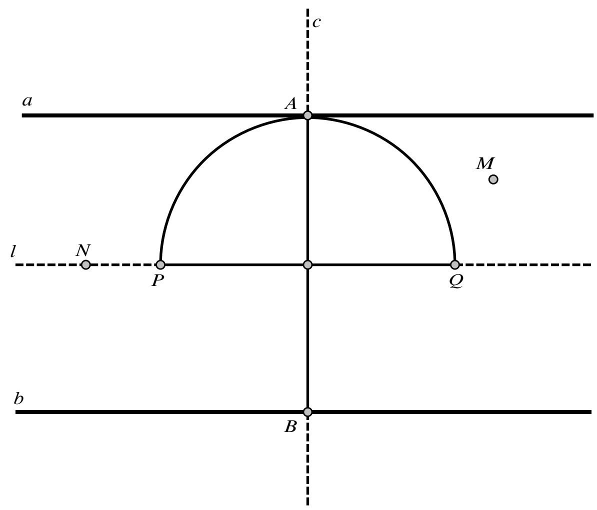

Figura 2.1

Soluţie. Fie $\{A\} = a \cap c$ şi $\{B\} = b \cap c$. Ducând prin mijlocul segmentului AB o dreaptă l, paralelă cu a şi b, şi luând pe ea punctele P şi Q, situate de o parte şi de alta a dreptei c, l o distanţă egală cu $\frac{1}{2}AB$ de ea, este uşor de observat că fiecare dintre punctele P şi Q este egal depărtat de dreptele a, b şi c.

Nu există alte puncte ale planului care să verifice această proprietate. Într-adevăr, dacă M este un punct care nu aparţine dreptei l, atunci el nu este egal depărtat de dreptele a şi b; dacă n este un punct de pe dreapta l, diferit de punctele P şi Q, atunci nu e greu de constatat că el nu este egal depărtat, de exemplu, de dreptele a şi c. Astfel, P şi Q formează locul geometric al punctelor din plan care sunt egal depărtate de dreptele a, b şi c. $\square$

Exemplul 2.1.2. Să se determine locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanţelor la două drepte paralele date este egală cu lungimea unui segment dat.

Soluţie. Fie a şi b dreptele paralele date, h – distanţa dintre ele şi s – lungimea segmentului dat. Remarcăm, înainte de toate, că pentru orice punct M, situat pe oricare dintre cele două drepte, dar şi pentru orice punct N, situat în interiorul benzii dintre cele două drepte, suma distanţelor până la cele două drepte este egală cu h (vezi figura 2.2). Pentru restul punctelor planului (de exemplu, pentru un punct P situat mai jos de dreapta a) această sumă este mai mare decât h. De aici rezultă că:

1) dacă $s < h$, atunci locul geometric căutat este lungimea vidă;

2) dacă $s = h$, atunci locul geometri căutat este format din cele două drepte date şi banda dintre ele;

3) mai rămâne de examinat cazul $s > h$.

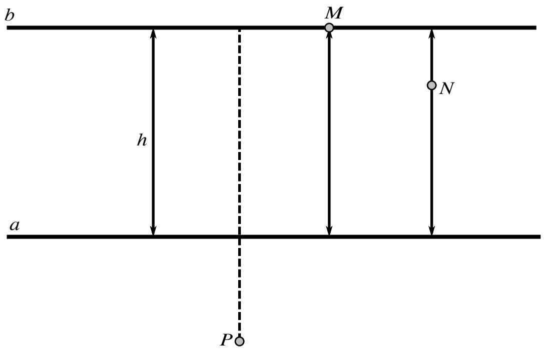

Figura 2.2

Fie a şi a' o pereche de drepte paralele cu cele date, ambele drepte fiind situate în afara benzii determinate de dreptele a şi b (vezi figura 2.3). Pentru fixarea ideilor, vom considera că dreapta a' se află dincolo de dreapta a, iar dreapta b' – dincolo de dreapta b, iar distanţa dintre a' şi a este egală cu distanţa dintre b' şi b, este egală cu $\dfrac{s-h}{2}$.

Vom demonstra că locul geometric căutat este această pereche de drepte.

Astfel, fie P un punct de pe una dintre dreptele a' sau b' (de exemplu, pe a'). Atunci suma distanţelor de la punctul P până la dreptele a şi b este

$$PP_1 + PP_2 = \frac{s-h}{2} + \left(\frac{s-h}{2} + h\right) = s.$$

Fie acum Q un punct al planului, care nu aparţine dreptei a', nici dreptei b'. Vom demonstra că suma distanţelor de la acest punct la dreptele a şi b nu este egală cu s. Dacă

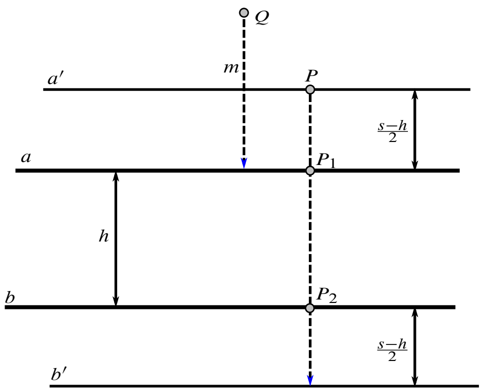

Figura 2.3

Q se află în banda dintre dreptele date sau pe una dintre ele, atunci suma distanţelor sale până la a şi b este egală cu h şi, prin urmare, este strict mai mic decât s. Să presupunem acum că Q se află în exteriorul benzii determinate de dreptele a şi b. Pentru fixarea ideilor, presupunem că punctul Q este de aceeaşi parte a benzii ca şi dreapta a'. Dacă notăm cu m distanţa de la punctul Q la dreapta a, atunci

$$m \neq \frac{s-h}{2}.$$

Prin urmare, suma distanţelor de la punctul Q la dreptele a şi b este egală cu

$$m + (m+h) = 2m + h \neq 2\frac{s-h}{2} + h,$$

adică această sumă nu este egală cu s. Astfel, am demonstrat că reuniunea dreptelor a' şi b' este locul geometric căutat. □

Urmează acum o problemă de loc geometric pe care o vom rezolva cu ajutorul geometriei analitice.

Exemplul 2.1.3. Presupunem că planul este raportat la un sistem de coordonate rectangular xOy. Să se determine locul geometric al punctelor din plan ale căror coordonate verifică ecuaţia

$$\sin^2(\pi x) + \cos^2(\pi y) = 1. \tag{2.1}$$

Soluţie. Înlocuind $\sin^2(\pi x)$ cu $1 - \cos^2(\pi x)$, obţinem ecuaţia mai simplă

$$\cos^2(\pi x) = \cos^2(\pi y)$$

sau

$$\frac{1+\cos(2\pi x)}{2} = \frac{1+\cos(2\pi y)}{2}$$

sau, încă,

$$\cos(2\pi x) = \cos(2\pi y).$$

Ultima ecuaţie are soluţia

$$y = \pm x + n,$$

unde n este un număr întreg oarecare. Astfel, locul geometric al punctelor din plan ale

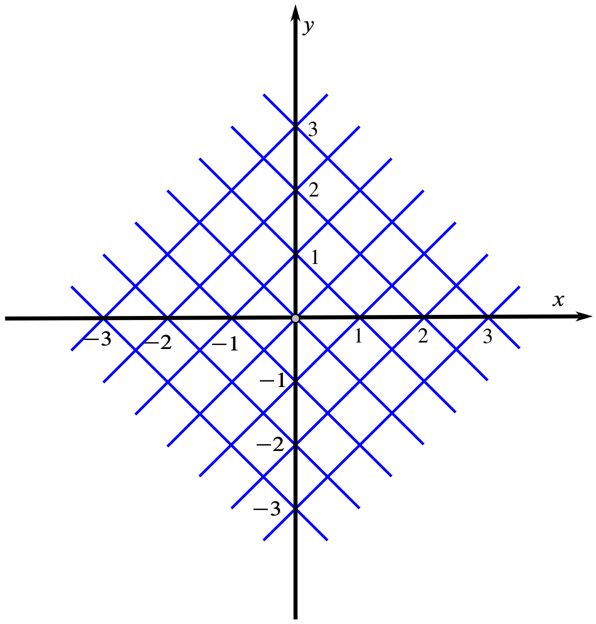

Figura 2.4

căror coordonate verifică ecuaţia (2.1) este mulţimea tuturor dreptelor din plan care au panta 1 sau -1 şi se intersectează cu axele de coordonate în puncte de coordonate întregi (vezi figura 2.4). □

2.2 O provizie de locuri geometrice

Ca şi în cazul problemelor de construcţii geometrice, rezolvarea unei probleme de construcţii geometrice este mult uşurată dacă dispunem de o galerie de locuri geometrice "elementare", care vor juca un rol important în determinarea unor locuri geometrice mai complicate. Nici aici, fireşte, nu există nici un fel de consens în ceea ce priveşte lista locurilor geometrice elementare. Am ales, şi de data aceasta, o listă destul de cuprinzătoare.

Locul geometric 2.1. *Locul geometric al punctelor din plan situate la o distanţă dată, r, faţă de un punct dat, O, este cercul de centru O şi de rază r.*

Locul geometric 2.2. *Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de două puncte date, A şi B, este mediatoarea segmentului AB, adică o dreaptă perpendiculară pe dreapta AB, care trece prin mijlocuul segmentului.*

Locul geometric 2.3. *Fie $\angle AOB$ un unghi dat. Locul geometric al punctelor din interiorul unghiului egal depărtate de laturile unghiului este bisectoarea unghiului (ca semidreaptă).*

Locul geometric 2.4. *Fie a şi b două drepte concurente. Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de aceste două drepte este format din bisectoarele unghiurilor formate de cele două drepte.*

Locul geometric 2.5. *Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte paralele a şi b este o dreaptă paralelă cu ele, situată la mijlocul distanţei dintre a şi b.*

Locul geometric 2.6. *Locul geometric al punctelor situate la o distanţă dată, h, de o dreaptă dată, a, este format dintr-o pereche de drepte paralele cu a, situate la distanţa h faţă de a, de o parte şi de alta a sa.*

Locul geometric 2.7. *Fie a şi b două drepte paralele date, iar m şi n – două segmente date. Locul geometric al punctelor pentru care raportul distanţelor la dreptele a şi b este m/n este o pereche de drepte paralele cu a şi b care împart distanţa de la a la b în raportul m/n (în mod interior, respectiv exterior).*

Demonstraţie. Fie Φ locul geometric căutat. Atunci

$$\Phi = \left\{ M \,\middle|\, \frac{d(M,a)}{d(M,b)} = \frac{m}{n} \right\}.$$

Ducem o dreaptă c, perpendiculară pe dreptele a şi b. Fie $\{A\} = a \cap c$ şi $\{B\} = b \cap c$. Construim punctele P şi Q care împart segmentul AB în raportul m/n, interior şi exterior:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}, \frac{AQ}{QB} = \frac{m}{n}.$$

Prin aceste puncte ducem paralelele p şi q la a şi b ($P \in p$, $Q \in q$). Vom demonstra că

$$\Phi = p \cup q.$$

1) Fie M un punct al planului pentru care

$$\frac{d(M,a)}{d(M,b)} = \frac{m}{n}.$$

Din M ducem o perpendiculară e pe dreptele a şi b şi fie $\{K\} = e \cap a$ şi $\{L\} = e \cap b$. Atunci $AK = BL$, ca segmente de pe drepte paralele cuprinse între drepte paralele. Cum

$$\frac{MK}{ML} = \frac{m}{n},$$

din proprietăţile proporţiilor deducem că

$$\frac{MK}{MK+ML}=\frac{m}{m+n}, \quad \frac{MK}{MK-ML}=\frac{m}{m-n}$$

(am presupus că $m > n$).

Dacă M se află în interiorul benzii determinate de dreptele paralele a şi b, atunci

$$MK+ML=KL=AB,$$

de unde

$$\frac{MK}{AB}=\frac{m}{m+n}.$$

Analog, pentru punctul P avem

$$\frac{PA}{AB}=\frac{m}{m+n}.$$

Din aceste două egalităţi rezultă că $MK = PA$. Prin urmare, patrulaterul $APMK$ este un paralelogram, deoarece laturile sale opuse MK şi PA sunt paralele şi egale. De aceea, $PM \parallel AK$. Cum prin punctul P se poate duce o singură paralelă la dreapta a, rezultă că dreptele p şi PM coincid.

Dacă punctul M se află în exteriorul benzii determinate de dreptele a şi b, atunci

$$MK-ML=KL=AB,$$

de unde

$$\frac{MK}{AB}=\frac{m}{m-n}.$$

Pe de altă parte, avem

$$\frac{QA}{AB}=\frac{m}{m-n}$$

şi, de aceea, $MK = QA$, iar drepte □

Locul geometric 2.8. *Fie $\angle AOB$ un unghi dat şi m, n – două segmente date. Locul geometric al punctelor din interiorul unghiului pentru care raportul distanţelor până la laturile triunghiului este m/n este semidreapta OC, care trece print punctul C din interiorul unghiului, pentru care distanţele până la semidreptele OA şi OB sunt egale cu m, respectiv n.*

Locul geometric 2.9. *Fie a şi b două drepte concurente date, iar m şi n – două segmente date. Locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanţelor până la dreptele a şi b este egal cu m/n este format din două drepte, care trec prin punctul de intersecţie a dreptelor a şi b şi prin punctele din plan situate la distanţa m faţă de dreapta a şi la distanţa n faţă de dreapta b.*

Locul geometric 2.10. *Fie $\omega(O, r)$ un cerc dat. Locul geometric al mijloacelor coardelor de lungime egală cu o lungime dată, a, este un cerc de centru O şi de rază*

$$r_1 = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Locul geometric 2.11. *Fie $\omega(O, r)$ un cerc dat şi A un punct dat de pe cerc. Locul geometric al mijloacelor coardelor cercului care trec prin A este un cerc cu centrul în mijlocul O_1 al segmentului OA şi cu raza egală cu lungimea segmentului OO_1.*

Locul geometric 2.12. *Fie $\omega(O, r)$ a cerc dat. Locul geometric al punctelor din plan pentru care lungimile tangentelor duse din acele puncte la cercul dat sunt egale cu o lungime dată a, este un cerc cu centrul în O şi de rază*

$$r' = \sqrt{a^2 + r^2}.$$

Locul geometric 2.13. *Fie $\omega(O, r)$ un cerc dat şi φ un unghi dat. Locul geometric al punctelor din plan pentru care unghiul format de cele două tangente la cerc din fiecare punct este egal cu φ (sau, cum se mai spune, locul geometric al punctelor din plan din care cercul dat se vede sub unghiul φ) este un cerc cu centrul în O şi cu raza r' egală cu ipotenuza triunghiului dreptunghic pentru care o catetă este egală cu r, iar unghiul opus acelei catete este $\varphi/2$.*

Locul geometric 2.14. *Locul geometric din care un segment AB dat se vede sub un unghi φ dat este o reuniune de două arce de cerc. Acest loc geometric se numeşte* arcul capabil de unghiul φ.

Locul geometric 2.15. *Locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanţelor până la două puncte date, A şi B, este egal cu raportul lungimilor a două segmente date, m şi n, este un cerc care se numeşte* cercul lui Apollonius.

Locul geometric 2.16. *Locul geometric al punctelor pentru care diferenţa pătratelor distanţelor până la două puncte date, A şi B, este egală cu pătratul lungimii unui segment dat, p, este o dreaptă perpendiculară pe dreapta AB şi trece printr-un punct K al segmentului AB pentru care*

$$AK = \frac{p^2 + a^2}{2a},$$

unde a este lungimea segmentului AB.

Locul geometric 2.17. *Locul geometric al punctelor pentru care suma pătratelor distanţelor până la două puncte date, A şi B, este egală cu pătratul lungimii unui segment dat, q, este un cerc cu centrul în mijlocul S al segmentului AB şi de rază egală cu jumătate dintr-o catetă a unui triunghi dreptunghic care are ipotenuza egală cu $q\sqrt{2}$, în timp ce cealaltă catetă este egală cu a, unde a este lungimea segmentului AB.*

2.3 O selecţie a unor locuri geometrice foarte simple

Nu există un consens legat de care locuri geometrice (mai precis, *probleme de loc geometric*) sunt cele mai simple. Toată lumea (sau aproape!) este de acord că aceste locuri geometrice sunt, cu toatele, prezente în manualele de geometrie elementară. Vom enumera, şi noi, câteva dintre ele (repetăm, încă o dată, toate locurile geometrice considerate sunt plane).

1. Locul geometric al punctelor situate la o distanţă dată, r, faţă de un punct dat, O, este, prin definiţie, centrul de centru O şi de rază r.

2. Locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte date A şi B este o dreaptă, care trece prin mijlocul segmentului AB şi este perpendiculară pe acest segment. Această dreaptă se numeşte *mediatoarea* segmentului AB (sau a perechii de puncte A şi B).

3. Locul geometric al punctelor situate la distanţa h de o dreaptă dată, fie ea a, este o pereche de drepte paralele cu dreapta dată.

Pentru a construi acest loc geometric trebuie să ducem, printr-un punct A al dreptei a, perpendiculara pe ea, fie ea p, să luăm pe perpendiculară două puncte situate la distanţa h faţă de a, de o parte şi de alta a dreptei a şi apoi, prin cele două puncte construite, să ducem câte o paralelă la dreapta a.

4. Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte paralele date este o dreaptă, paralelă cu dreptele date.

Pentru construirea acestui loc geometric, ducem o dreaptă oarecare c, care intersectează dreptele paralele date, a şi b, determinăm segmentul de pe această secantă cuprins ţntre dreptele a şi b, determinăm mijlocul acestui segment şi prin el ducem o paralelă la dreptele a şi b. Dreapta obţinută (adică locul geometric) se numeşte, uneori, *linia mijlocie* a perechii de drepte paralele date.

5. Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente este format dintr-o pereche de drepte perpendiculare, care sunt bisectoarele unghiurilor formate de dreptele date.

Determinarea acestui loc geometric se reduce la problema elementară de construcţie a jumătăţii unui unghi.

2.4 Metodica rezolvării problemelor de loc geometric

Rezolvarea unuei probleme de loc geometric are multe similarităţi cu rezolvarea unei probleme de construcţii geometrice. Astfel, în mod tipic, rezolvarea unei probleme de loc geometric constă în trei etape:

- analiza
- demonstraţia şi
- discuţia.

Se observă imediat că sunt aceeaşi paşi la la o problemă de construcţii geometrice, atâta doar că lipseşte pasul al doilea, *construcţia*. Nu este, câtuşi de puţin, o întâmplare: în general, determinarea unui loc geometric înseamnă doar descrierea sa, ca mulţime de puncte. De regulă, locul geometric nu poate fi construit, cu instrumentele disponibile. Un exemplu foarte simplu este cazul elipsei, foarte uşor de descris ca loc geometric, dar imposibil de construit utilizând, de pildă, rigla şi compasul.

Primul pas al rezolvării unei probleme de loc geometric este ***analiza***. Rolul acesteia este, în esenţă, este să ne sugereze o idee despre natura locului geometric. De regulă, analiza începe cu desenarea figurilor *date* în enunţul problemei. Următorul pas este să identificăm puncte care aparţin locului geometric, în sensul că ele verifică proprietatea caracteristică a acestuia. Se stabilesc apoi nişte conexiuni între aceste puncte şi elementele date, conexiuni care ne permit să determinăm forma şi poziţia locului geometric. Uneori, analiza presupune şi examinarea unor cazuri particulare sau construcţia directă a unor puncte care aparţin locului geometric dat. Menţionăm, totuşi, că, în urma analizei, obţinem doar o soluţie *ipotetică* a problemei, şi urmează să demonstrăm că intuiţia noastră este corectă.

Următorul pas este ***demonstraţia***. Aici trebuie, practic, să demonstrăm două implicaţii, una fiind inversa celeilalte:

1) Orice punct al figurii, găsit în timpul analizei, verifică proprietatea caracteristică a locului geometric.

2) Orice punct care verifică proprietatea caracteristică apartţine figurii găsite în timpul analizei.

Este util de avut în vedere că implicaţia 2) se poate înlocui cu

2′) Dacă un punct nu aparţine figurii găsite, atunci el nu verifică proprietatea caracteristică.

Este, de asemenea, de remarcat că, adesea, una dintre implicaţii este demonstrată, de fapt, în timpul analizei.

În sfârşit, ultimul pas al unei soluţii a unei probleme de construcţii geometrice este ***discuţia***. Acum trebuie să examinăm diferitele cazuri care pot să apară şi dependenţa lor de alegerea datelor problemei.

Considerăm, în cele ce urmează, câteva exemple.

Exemplul 2.4.1. Să se determine locul geometric al punctelor din care un segment se vede sub un unghi dat.

Soluţie. ***Analiza.*** Fie AB segmentul dat şi α – unghiul dat (vezi figura 2.5).

Dacă M este un punct al locului geometric , atunci $\measuredangle AMB = \alpha$, prin ipoteză. Este util, în acest moment, să reamintim teorema referitoare la egalitatea unghiurilor înscrise într-un cerc, care cuprind acelaşi arc între laturi.

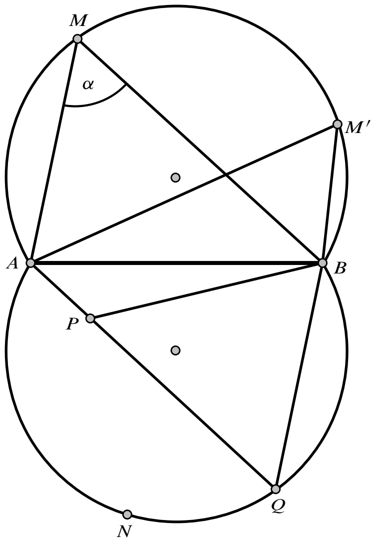

Figura 2.5

Presupunem, pe moment, că $0° < \alpha < 180°$. Aceasta înseamnă, desigur, că punctele A, M, B nu sunt coliniare, deci ele determină un cerc, cercul circumscris triunghiului AMB. Atunci, pentru orice punct M' al arcului AMB al acestui cerc (în afară de punctele A şi B), $\measuredangle AM'B$ este, de asemenea, egal cu α, ceea ce înseamnă că fiecare punct al acestui arc aparţine locului geometric căutat.

În plus, este clar că toate punctele arcului ANB, simetricul arcului AMB faţă de dreapta AB (mai puţin punctele A şi B) aparţin, de asemenea, locului geometric căutat.

Demonstraţia. Pentru a demonstra că figura F, alcătuită din cele două arce de cerc care trec prin punctele A şi B este, într-adevăr, locul geometric pe care vrem să-l determinăm, a mai rămas să examinăm punctele care nu aparţin acestei figuri. Dacă un punct P aparţine domeniului din plan mărginit de figura F (mai precis, interiorului acestui domeniu), atunci, ducând semidreapta AP (sau BP) până se întâlneşte cu figura F în punctul Q, remarcăm că

$$\measuredangle APM > \measuredangle AQB = \alpha,$$

prin urmare punctul P nu aparţine locului geometric. Dacă alegem punctul Q în afara domeniului mărginit de F, obţinem că, dimpotrivă, $\measuredangle APB < \alpha$.

Astfel, locul geometric al punctelor din care care un segment se vede sub un unghi dat, cuprins (strict) între 0° şi 180° este format din reuniunea a două arce de cerc, care trec prin capetele segmentului dat şi sunt simetrice faţă de dreapta suport a segmentului.

Punctele A şi B nu trebuie considerate ca făcând parte din locul geometric, deoarece dacă M coincide cu unul dintre capetele segmentului AB, unghiul $\widehat{AMB}$ devine nedeterminat.

Discuţia. Dacă unghiul α este drept, atunci figura F se transformă într-un cerc de diametru AB, mai puţin capetele acestui diametru. Dacă unghiul α este egal cu zero, atunci locul geometric căutat este diferenţa dintre dreapta AB şi segmentul AB. Dacă unghiul α este egal cu 180°, atunci locul geometric căutat este segmentul AB însuşi. □

Exemplul 2.4.2. Să se determine locul geometric al mijloacelor corzilor determinate pe un cerc dat de dreptele care unesc punctele acestui cerc cu un punct dat.

Soluţie. Fie ω cercul dat, O – centrul său, iar A – punctul dat (vezi figura 2.6). Fie P mijlocul uneia dintre corzile menţionate, de exemplu coarda MN.

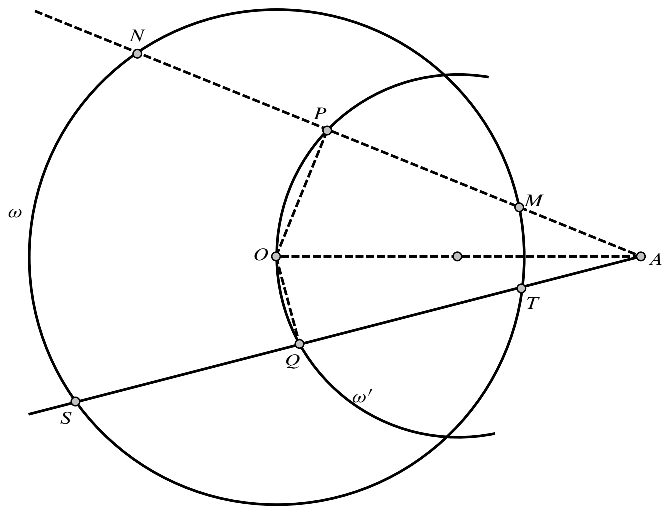

Figura 2.6

Unim punctele P şi O. Atunci $PO \perp MN$. Astfel, segmentul OA este văzut din punctul P sub un unghi drept. Prin urmare, P aparţine cercului construit pe segmentul OA, ca diametru. În plus, punctul P trebuie să fie situat în interiorul cercului ω.

Suntem conduşi, astfel, la următoarea ipoteză: *locul geometric căutat este partea din cercul ω', construit pe OA ca diametru, care este situată în interiorul cercului ω.*

Pentru ***demonstrarea*** veridicităţii ipotezei noastre, este necesar să demonstrăm, în primul rând, că mijlocul fiecăreia dintre corzile considerate aparţine figurii indicate, în al doilea rând că fiecare punct Q, care aparţine părţii indicate a cercului ω', este mijlocul uneia dintre corzile considerate.

Prima dintre aceste afirmaţii a fost demonstrată, deja, în timpul analizei. Pentru demonstrarea celei de-a doua afirmaţii, ducem o dreaptă prin punctele Q şi A. Ea intersectează cercul ω în două puncte, întrucât punctul Q este situat în interiorul cercului. Vom nota aceste puncte cu S şi T. $\measuredangle OQA = 90°$, ca unghi înscris într-un semicerc, adică $OQ \perp AQ$, astfel că Q este mijlocul coardei ST, adică ceea ce trebuia să demonstrăm.

Trecem acum la ***discuţia*** soluţiei. Dacă punctul A este în exteriorul cercului ω, atunci locul geometric considerat este arcul de cerc (de pe cercul ω') ce are capetele pe cercul dat şi este situat în interiorul cercului dat. Dacă A este în interiorul cercului dat sau pe cerc, dar nu coincide cu centrul cercului, atunci locul geometric este întregul cerc de diametru OA. Dacă A coincide cu centrul cercului dat, atunci locul geometric căutat se reduce la punctul A. □

Exemplul 2.4.3. Să se determine locul geometric al punctelor pentru care diferenţa pătratelor distanţelor până la două puncte date este constantă.

Demonstraţie. Fie $AB = a$. Căutăm locul geometric al punctelor din plan pentru care

$$AM^2 - BM^2 = c^2,$$

unde c este un segment dat.

Căutăm, mai întâi, punctele dreptei A care verifică relaţia cerută. Alegem pe dreapta AB, ca direcţie pozitivă, cea de la A la B. Apoi vom ataşa lungimii fiecărui segment (orientat) al acestei drepte câte un semn. Atunci, pentru fiecare poziţie a punctului M pe dreapta AB, are loc relaţia

$$\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB}$$

(teorema lui Chasles).

Din ipoteză,

$$AM^2 - BM^2 = c^2,$$

adică

$$AM^2 - (a - \overline{AM})^2 = c^2,$$

de unde

$$AM = \frac{a^2 + c^2}{2a}. \tag{2.2}$$

Prin urmare, pe dreapta AB există un punct M şi numai unul care aparţine locului geometric, adică $AM^2 - MB^2 = c^2$. Poziţia acestui punct este determinată de formula (2.2).

Încercăm să găsim alte puncte ale locului geometric căutat. Remarcăm că orice punct P (vezi figura 2.7) de pe perpendiculara p pe AB, care trece prin punctul M, are, de asemenea, proprietatea cerută. Într-adevăr,

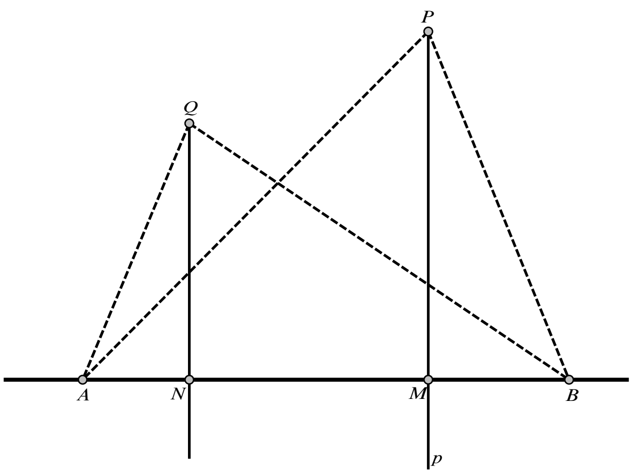

Figura 2.7

$$AP^2 - BP^2 = (AM^2 + MP^2) - (BM^2 + MP^2) = AM^2 - BM^2 = c^2.$$

Întrucât nu vom găsi alte puncte care să verifice proprietatea cerută, suntem conduşi la afirmaţia: *locul geometric căutat este dreapta p, perpendiculară pe dreapta AB şi care trece prin punctul M, găsit mai devreme.*

Pentru demonstrarea acestei afirmaţii trebuie să demonstrăm următoarele:

1) că orice punct P al dreptei p verifică proprietatea $AP^2 - MP^2 = c^2$. Asta s-a făcut deja, în cursul analizei noastre;

2) că un punct Q care nu aparţine dreptei p este întotdeauna astfel încât

$$AQ^2 - MQ^2 \neq c^2.$$

Fie, prin urmare, Q un punct care nu aparţine dreptei p (vezi figura 2.7). Ducem prin Q dreapta QN, perpendiculară pe AB. Atunci,

$$AQ^2 - BQ^2 = (AN^2 + NQ^2) - (BN^2 + NQ^2) = AN^2 - BN^2.$$

Cum punctul Q nu aparţine dreptei p, rezultă că punctul N este diferit de punctul M. Dar noi am remarcat deja că punctul M este *unicul* punct al dreptei AB care aparţine locului geometric căutat. Prin urmare, punctul N, situat şi el pe dreapta AB, nu aparţine locului geometric. De aceea,

$$AN^2 - BN^2 \neq c^2$$

şi, prin urmare,

$$AQ^2 - BQ^2 \neq c^2.$$

□

2.5 Exemple de determinare a locurilor geometrice folosind geometria analitică

În geometria analitică, o curbă se defineşte ca fiind locul geometric al punctelor (din plan!) ale căror coordonate verifică o ecuaţie de forma $f(x, y) = 0$. Prin urmare, în geometria analitică, determinarea unui loc geometric înseamnă găsirea ecuaţiei pe care o verifică coordonatele punctelor locului geometric. Sigur, un al doilea pas, uneori destul de dificil, este *identificarea* locului geometric. De regulă, problema de loc geometric nu se formulează relativ la un sistem de coordonate dat, de aceea, un pas important în utilizarea metodelor analitice este tocmai alegerea judicioasă a sistemului de coordonate, care să fie cât mai bine adaptat problemei în cauză.

Exemplul 2.5.1. Să se determine locul geometric al punctelor pentru care suma pătratelor distanţelor până la două puncte date este egală cu pătratul unei lungimi date.

Demonstraţie. Fie A şi B cele două puncte date. Se caută locul geometric al punctelor P pentru care

$$AP^2 + BP^2 = a^2,$$

unde a este lungimea unui segment dat.

Alegem dreapta AB ca axă OX, orientată de la A înspre B. Originea sistemului de coordonate va fi mijlocul O al segmentului AB, iar axa OY va fi mediatoarea segmentului, orientată astfel încâ sistemul XOY să fie orientat direct.

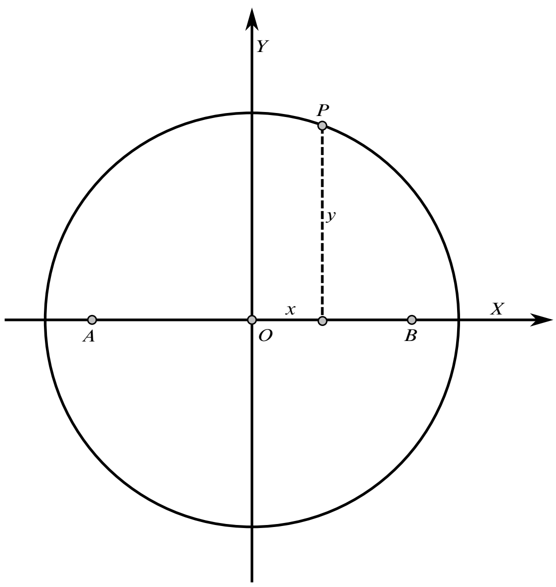

Figura 2.8

Fie P (vezi figura 2.8) un punct al locului geometric căutat, iar x, y – coordonatele sale. Dacă notăm lungimea segmentului AB cu l, atunci, în sistemul nostru de coordonate, avem $A(-\frac{l}{2}, 0)$ şi $B(\frac{l}{2}, 0)$. Atunci, conform formulelor binecunoscute din geometria analitică, avem

$$AP^2 = \left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2, BP^2 = \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2$$

şi, de aceea, locul geometric căutat este format din acele puncte ale planului ale căror coordonate verifică ecuaţia

$$\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 = a^2$$

sau

$$x^2 + y^2 = \frac{2a^2 - l^2}{4}.$$

Din ecuaţia obţinută se observă că locul geometric este nevid dacă şi numai dacă

$$2a^2 - l^2 \geq 0$$

sau

$$a\sqrt{2} \geq l.$$

Dacă

$$a\sqrt{2} > l,$$

atunci locul geometric este un cerc cu centrul în punctul O (adică în mijlocul segmentului AB) şi de rază

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - l^2}.$$

Pentru construirea acestui cerc, este suficient să construim un punct al său. Acest punct se poate obţine intersectând cercurile

$$\omega_1\left(A, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{şi} \quad \omega_2\left(B, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

(care se intersectează, deoarece suma razelor lor este egală cu $a\sqrt{2}$, care este mai mare decât distanţa dintre centrele lor, egală cu l). Dacă $a = l$, atunci locul geometric trece prin punctele A şi B.

Pentru $a\sqrt{2} = l$, există doar un punct care aparţine locului geometric, acesta fiind punctul O, mijlocul segmentului AB. □

Exemplul 2.5.2. Se dă un cerc ω şi un punct A (vezi figura 2.9). Să se determine locul geometric al mijloacelor segmentelor care unesc punctul A cu punctele cercului ω.

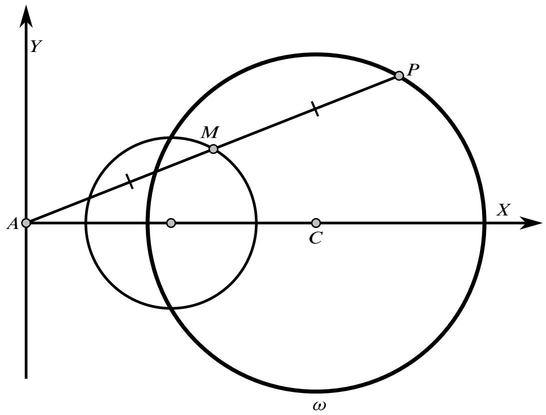

Figura 2.9

Demonstraţie. Fie C – centrul cercului dat, iar $AC = a$. Alegem sistemul de coordonate cu originea în punctul A, axa X – egală cu dreapta AC (orientată de la A înspre C, iar axa Y perpendiculara prin A pe AC. Atunci, coordonatele punctului C sunt $(a, 0)$, iar cercul dat are ecuaţia

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2,$$

unde r este raza cercului dat.

Fie $P(x, y)$ un punct oarecare al cercului ω, M – punctul corespunzător al locului geometric, iar ξ, η – coordonatele punctului M. Atunci $\xi = \frac{x}{2}$, $\eta = \frac{y}{2}$, astfel că $x = 2\xi$, $y = 2\eta$, iar locul geometric care ne interesează pe noi are ecuaţia:

$$(2\xi - a)^2 + 4\eta^2 = r^2$$

sau

$$\left(\xi - \frac{a}{2}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2.$$

Aceasta este ecuaţia unui cerc de rază $\frac{r}{2}$, cu centrul în punctul $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. □

2.6 Rezolvarea problemelor de construcţii prin metoda intersecţiilor de locuri geometrice

Esenţa metodei locurilor geometrice în rezolvarea problemelor de construcţii geometrice constă în următoarele. Să presupunem că rezolvarea unei probleme de construcţii geometrice conduce la construirea unui punct care îndeplineşte simultan două condiţii independente. Lăsăm deoparte una dintre condiţii şi determinăm locul geometric al punctelor care îndeplinesc cea de-a doua condiţie. Notăm această figură cu Φ_2. Renunăm acum la prima condiţie şi căutăm locul geometric al punctelor care îndeplinesc prima condiţie.

Notăm această figură cu Φ_1. Atunci punctul pe care vrem să-l construim, ce verifică ambele condişii, se va afla în intersecţia celor două locuri geometrice.

Exemplul 2.6.1. Să se construiască un cerc tangent la două drepte paralele date a şi b, şi care trece printr-un punct dat, P.

Demonstraţie. `Analiza.` Notăm distanţa dintre cele două drepte paralele cu d. Atunci raza cercului căutat trebuie să fie egală cu $d/2$. Problema se reduce la construirea centrului cercului, care trebuie să îndeplinească următoarele două condiţii:

1) el trebuie să fie egal depărtat de dreptele a şi b;

2) el trebuie să fie situat la distanţa $d/2$ faţă de punctul P.

De aici rezultă procedeul de construcţie.

`Construcţia.` Dintr-un punct oarecare, A, al dreptei a, coborâm o perpendiculară AB pe dreapta b (vezi figura 2.10). Construim mijlocul C al segmentului AB. Construim locul geometric al punctelor egal depărtate de dreptele a şi b; aceasta este o dreaptă c, care trece prin punctul C şi este paralelă cu dreptele a şi b. Construim apoi locul geometric al punctelor care îndeplinesc condiţia 2). Acesta este cercul $\omega\left(P, \frac{d}{2}\right)$. Construim punctul O_1, de intersecţie dintre cercul ω şi dreapta c. Construim apoi cercul $\omega_1(O_1, O_1P)$. Acesta este cercul ce trebuia construit.

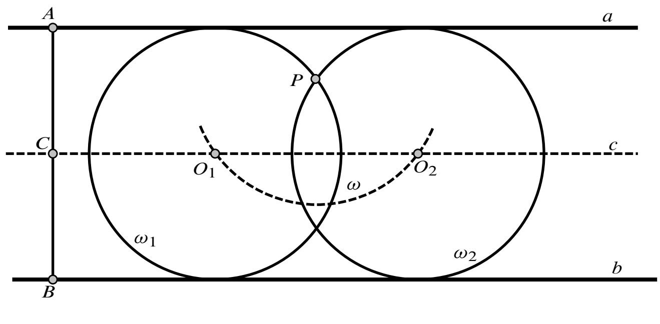

Figura 2.10

`Demonstraţia.` Cercul ω_1 este tangent dreptelor a şi b, deoarece distanţele de la centrul său O_1 la aceste drepte sunt egale între ele şi sunt egale cu $d/2$. Acest cerc trece prin punctul P, prin construcţie.

`Discuţia.` Sunt posibile trei cazuri.

1. Punctul P este situat *între* dreptele a şi b. Modul de construire ne dă două soluţii: $\omega_1(O_1, O_1P)$ şi $\omega_2(O_2, O_2P)$. Nu există alte soluţii, pentru că dacă ar exista trei cercuri care să îndeplinească cerinţele, atunci centrele lor, O_1, O_2, O_3 ar trebui să fie coliniare, aflându-se toate pe dreapta c. Pe de altă parte, ar trebui să avem

$O_1P = O_2P = O_3P = AC$, adică cele trei centre ar trebui să se afle, toate, pe un cerc de rază AC, cu centrul în P, ceea ce ne conduce la o contradicţie.

2. Punctul P se aflâ pe una dintre cele două drepte (a sau b). În acest caz avem o singură soluţie.

3. Punctul P se află în afara benzii determinate de dreptele a şi b. În acest caz nu există soluţii.

□

Exemplul 2.6.2. Să se construiască un triunghi cunoscând baza, unghiul de la vârf şi raza cercului înscris.

Demonstraţie. `Analiza.` Fie ABC triunghiul căutat, A – unghiul său de la vârf, r – raza cercului înscris şi $BC = a$ – lungimea bazei date.

Considerăm centrul I al cercului înscris. Punctul I se află la distanţa r de baza BC (prima proprietate a centrului).

În plus (vezi figura 2.11),

$$\measuredangle BOC = 90^\circ - \frac{B}{2} + 90^\circ - \frac{C}{2} = 90^\circ + \frac{180^\circ - B - C}{2},$$

astfel încât

$$\measuredangle BOC = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

(a doua proprietate a centrului). Locul geometric al punctelor care verifică prima propri-

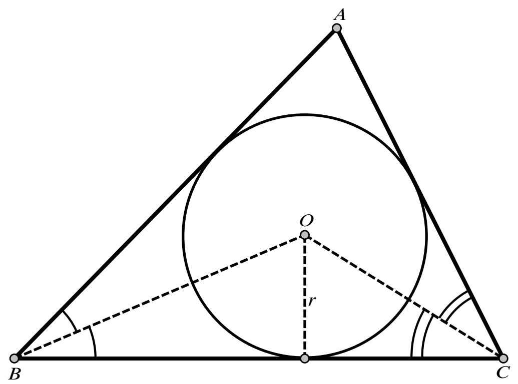

Figura 2.11

etate reprezintă o pereche de drepte, paralele cu BC. Locul geometric al punctelor care îndeplinesc cea de-a doua proprietate (anume, până la urmă, că segmentul BC este văzut din punctul I sub un unghi de $90^\circ + A/2$), reprezintă o pereche de arce de cerc, capabile de unghiul $90° + A/2$. Fiecare punct al intersecţiei acestor două locuri geometrice poate servi ca centru al cercului înscris.

`Construcţia.`

1. Pe o dreaptă oarecare construim un segment $BC = a$ (vezi figura 2.12). Mai departe construim, succesiv:

2. o pereche de dreapte p_1 şi p_2, paralele cu BC şi situate faşă de dreapta BC la distanţa r;

3. o pereche de segmente, capabile de unghiul $90° + A/2$;

4. punctul I, ca unul dintre punctele de intersecţie ale locurilor geometrice menţionate mai sus;

5. cercul $\omega(I, r)$;

6. din punctele B şi C ducem semidreptele b şi c, tangente la cercul ω;

7. construim punctul A, ca intersecţie a celor două semidrepte.

Triunghiul ABC este triunghiul căutat. `Demonstraţia` este evidentă.

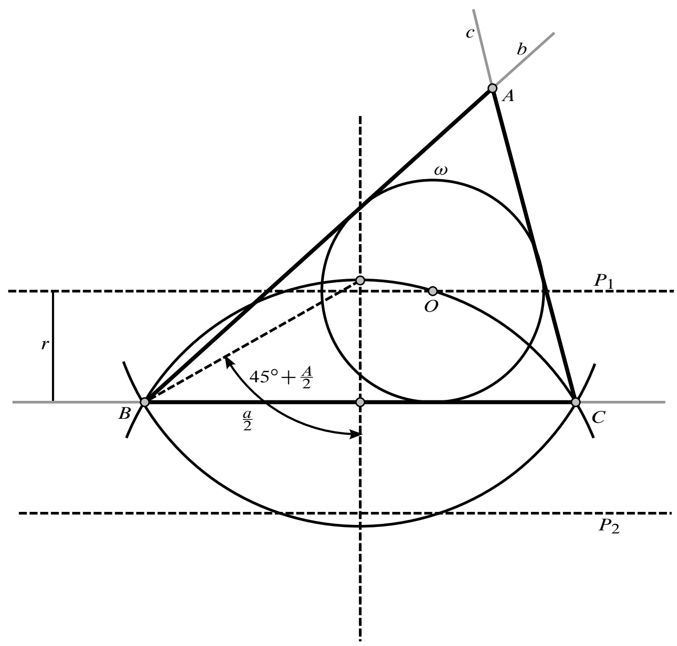

Figura 2.12

`Discuţia.` Pentru ca punctele de intersecţie dintre cele două locuri geometrice să existe este necesar şi suficient ca distanţa maximă dintre BC şi punctele arcului capabil de unghiul $90° + A/2$ să fie cel puţin egală cu r, adică să avem relaţia

$$\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\left(45° + \frac{A}{4}\right) \geq r. \tag{2.3}$$

Paşii 5, 6 şi 7 sunt posibili întotdeauna. De aici rezultă că

$$\begin{aligned}\measuredangle(BC, b) + \measuredangle(CB, c) &= 2(\measuredangle CBO + \measuredangle BCO) = 2(180° - \measuredangle BOC) = \\ &= 2\left[180° - \left(90° + \frac{A}{2}\right)\right] = 180° - A < 180°,\end{aligned}$$

astfel că semidreptele b şi c se intersectează, întotdeauna.

De fiecare dată când este îndeplinită condiţia (2.3), problema are soluţie unică (abstracţie făcând de libertatea de alegere a punctului I, deoarece se verifică uşor că pentru toate alegerile posibile se obţin triunghiuri congruente). Dacă această condiţie nu este verificată, problema nu are nici o soluţie. □

Exemplul 2.6.3. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscând unghiul ascuţit A, raza cercului circumscris, precum şi suma pătratelor lungimilor laturilor AB şi AC.

Demonstraţie. `Analiza.` Fie ABC triunghiul căutat, $\omega(O, R)$ – cercul său circumscris, $\measuredangle A = \alpha$ – unghiul dat, $AB^2 + AC^2 = d^2$, unde d este un segment dat (vezi figura 2.13).

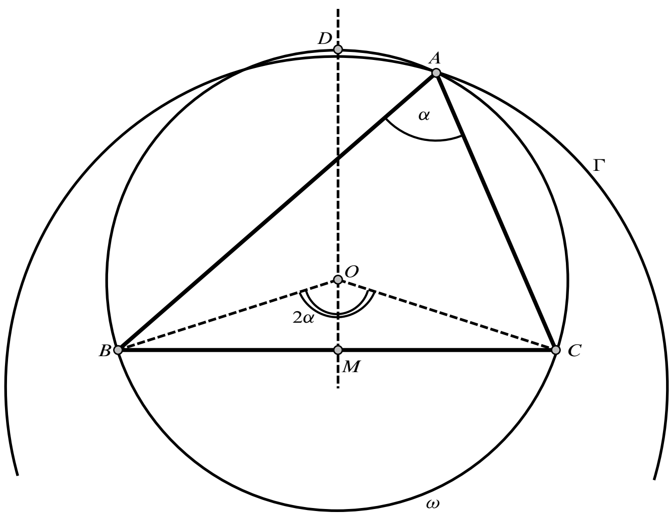

Figura 2.13

Lungimea coardei BC se determină din condiţia ca ea să fie văzută dintr-un punct oarecare al cercului sub unghiul α şi, prin urmare, din centrul O al cercului – dintr-un unghi 2α. În ceea ce priveşte punctul A, el este definit prin două condiţii:

1. el trebuie să fie situat pe cercul A;
2. el aparţine locului geometric al punctelor pentru caresuma pătratelor distanţelor până la punctele B şi C este egală cu d^2 (am văzut că acest loc geometric este un cerc).

`Construcţia.` Construim, pe rând:

1. cercul $\omega(O, R)$, cu centrul într-un punct O arbitrar;
2. două raze OB şi OC ale acestui cerc, cu un unghi 2α între ele;
3. segmentul BC şi mijlocul său, M;
4. cercul Γ, locul geometric al punctelor P din plan pentru care $BP^2 + CP^2 = d^2$;
5. punctul A, ca intersecţie a cercurilor ω şi Ω;
6. segmentele AB şi AC.

Triunghiul ABC este cel căutat. Demonstraţia rezultă imediat din analiză.

`Discuţia.` Dacă cercul Γ există şi are un punct comun cu arcul BDC al cercului ω (vezi figura 2.13), problema are soluţie unică. În caz contrar, nu are soluţie.

Observaţia 2. Întrucât raza r a cercului Γ este egală cu

$$\frac{1}{2}\sqrt{2d^2 - BC^2},$$

$MB = R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\alpha$, $MD = R(1 + \cos\alpha)$, condiţia analitică de rezolvabilitate se poate scrie sub forma:

$$MB < r \leq MD$$

sau

$$2R\sin\alpha < d \leq 2\sqrt{2}R\cos\frac{\alpha}{2}.$$

□

CAPITOLUL 3

Rezolvarea problemelor de construcţii geometrice cu ajutorul transformărilor geometrice

3.1 Introducere

Transformările geometrice joacă un rol fundamental în geometrie. Nu ne vom ocupa în acest capitol de teoria lor, pentru că această teorie nu este obiectul cursului nostru. Vom reaminti, doar, o serie de proprietăţi care ne vor fi utile în rezolvarea problemelor de construcţii geometrice. Acest capitol va aborda două tipuri de transformări geometrice. Din prima clasă fac parte izometriile (transformări bijective ale planului care păstrează distanţele: translaţii, rotaţii, simetrii axiale şi combinaţiile lor), din a doua – omotetiile şi inversiunile.

3.2 Translaţia

Definiţia 3.1. O *translaţie* $T_{\mathbf{v}}$ de vector $\mathbf{v}$ este o transformare a planului care asociază fiecărui punct M din plan un punct M' astfel încât $\overrightarrow{MM'} = \mathbf{v}$.

Proprietăţi.

1) Orice translaţie este o izometrie.

2) Translaţia de vector nul este transformarea identică.

3) Translaţia este o transformare de genul unu (adică nu schimbă orientarea planului).

4) Imaginea unei drepte printr-o translaţie este o dreaptă paralelă cu ea (sau dreapta însăşi, în cazul translaţiei de vector nul).

5) Imaginea unei drepte paralele cu vectorul de translaţie este dreapta însăşi[1].

6) Imaginea unei semidrepte printr-o translaţie este o semindreaptă paralelă cu ea sau semidreapta însăşi.

7) Dacă imaginea oricărei semidrepte printr-o transformare geometrică este semidreapta însăşi sau o semidreaptă paralelă cu ea, atunci acea transformare geometrică este o translaţie.

8) Nici o translaţie de vector nenul nu are puncte fixe.

9) Compunerea a două translaţii de vectori $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$ este translaţia de vector $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

10) Inversa unei translaţii de vector $\mathbf{v}$ este translaţia de vector $-\mathbf{v}$.

3.2.1 Exemple de probleme de construcţii rezolvate cu ajutorul translaţiei

Exemplul 3.2.1. Se dau două cercuri, $\omega_1(O_1, r_1)$ şi $\omega_2(O_2, r_2)$, o dreaptă g şi un segment m. Să se construiască o secantă paralelă cu dreapta g, astfel încât suma lungimilor coardelor determinate de secantă pe cercurile date să fie egală cu lungimea segmentului dat, m.

Soluţie. Analiza. Pe figura **??** avem următoarele date: cercurile ω_1 şi ω_2, dreapta g şi, pe ea, segmentul m. Presupunem că secanta AD este soluţia problemei. Aşadar, $AD \parallel g$ şi $AB + CD = m$. Aplicăm cercului ω_2 o translaţie de vector $\overrightarrow{CB}$. Notăm cu D' imaginea lui D şi cu O_2' – imaginea centrului O_2. Atunci coarda CD se transformă în coarda BD' a cercului ω_2', prin urmare

$$AB + BD' = AD' = m.$$

Dacă din punctele O_1 şi O_2' coborâm perpendicularele O_1F şi $O_2'G$ pe secanta AD, atunci, după cum se vede din desen, obţinem:

$$FG = FB + BG = \frac{AD'}{2} = \frac{m}{2} = EO_2'.$$

Astfel, $O_2O_2' \parallel g$ şi, prin urmare, dreapta O_2O_2' poate fi construită. Punctul E – piciorul perpendicularei O_1E – poate, de asemenea, fi construit. Luăm acum, pe dreapta O_2O_2', plecând din E, un segment de lungime $EO_2' = \frac{m}{2}$ şi obţinem punctul O_2'. Astfel,

[1] Atenţie! Asta nu înseamnă că punctele dreptei sunt fixe. Altminteri, punctele se deplasează de-a lungul dreptei, deci rămân pe ea.

vectorul de translaţie este complet determinat. Punctele B şi B^* în care se intersectează cercurile ω_1 şi ω_2' determină soluţia problemei.

Construcţia. Modalitatea de efectuare a construcţiei rezultă direct din analiza efectuată. Astfel, ducem mai întâi prin punctul O_2 o dreaptă O_2O_2', paralelă cu dreapta dată, g. Coborâm pe această dreaptă perpendiculara $O_1E \perp O_2O_2'$ ($E \in O_2O_2'$) şi construim pe O_2O_2' segmentul $EO_2' = \frac{m}{2}$. Obţinem punctul O_2' – centrul cercului translatat. Trasând cercul cu centru în O_2' şi de rază r_2 (raza cercului ω_2), găsim punctele de intersecţie ale cercului trasat cu cercul ω_1, fie ele B şi B^*. Secantele care trec prin punctele B şi B^*, paralele cu dreapta g dau soluţia problemei (vezi şi discuţia de mai jos).

Demonstraţia. Vom presupune, ca în figura alăturată, că $AB + BD' = AD'$. Atunci este uşor de demonstrat că secţiunile construite verifică toate cerinţele problemei. Întradevăr, după cum se vede din desen, avem:

$$FG = \frac{AB + BD'}{2} = EO_2' = \frac{m}{2}.$$

Prin urmare,

$$AB + BD' = m = AB + CD,$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Discuţia. Cum am văzut mai sus, punctele de intersecţie ale cercurilor ω_1 şi ω_2', în măsura în care ele există, ne dau soluţiile problemei. Prin urmare, ceea ce trebuie să discutăm este în ce condiţii cercurile ω_1 şi ω_2' se intersectează. După cum se ştie, aceste condiţii se pot scrie sub forma:

$$r_1 + r_2 \geq O_1O_2{}' \quad \text{şi} \quad r_1 - r_2 \leq O_1O_2',$$

unde r_1 şi r_2 sunt razele celor două cercuri.

Notând cu p lungimea perpendicularei O_1E, putem exprima distanţa O_1O_2' dintre centre din triunghiul $O_1O_2'E$ sub forma:

$$O_1O_2' = \sqrt{p^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2}.$$

Atunci condiţiile de intersecţie a celor două cercuri capătă forma

$$r_1 + r_2 \geq \sqrt{p^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2} \quad \text{şi} \quad r_1 - r_2 \leq \sqrt{p^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2}.$$

Semnul egal corespunde cazului în care cele două cercuri sunt tangente. În acest caz avem o singură soluţie.

În afară de condiţia de intersecţie a cercurilor, mai trebuie, după cum am văzut, ca punctele de pe dreapta AD să fie aşezate în ordinea ABD', adică $AD' = AB + BD'$. În aceste condiţii, punctele de intersecţie ale cercurilor ω_1 şi ω_2' determină soluţia problemei. $\square$

Exemplul 3.2.2. Să se construiască un triunghi ABC, dacă se dau cele trei mediane m_a, m_b, m_c.

Soluţie. Analiza.

Începem, ca de obicei, presupunând că triunghiul ABC a fost deja construit (vezi figura **??**). Fie G punctul de intersecţie a medianelor:

$$AA_m = m_a, BB_m = m_b, CC_m = m_c.$$

Aplicăm o translaţie de vector $\overrightarrow{GB}$. Prin această translaţie segmentul GC de pe mediana CC_m se transformă în segmentul BC', iar punctul C se transformă în punctul C'. Laturile triunghiului GBC' se exprimă în funcţie de medianele triunghiului ABC în modul următor:

$$GB = \frac{2}{3}m_b, GC' = \frac{2}{3}m_a, BC' = \frac{2}{3}m_c.$$

După cum vom vedea, aceste informaţii sunt suficiente pentru rezolvarea problemei.

Construcţia.

Construim mai întâi triunghiul GBC', ale cărui laturi le cunoaştem, întrucât medianele m_a, m_b, m_c sunt date. Plecând de la punctul C', construim punctul C, construind segmentul $C'C$, paralel şi egal cu segmentul BG. Construim apoi pe dreptele BG şi CG medianele corespunzătoare. Obţinem punctele B_m şi C_m. Dreptele BC_m şi CB_m se intersectează în al treilea vârf al triunghiului.

Demonstraţia.

În triunghiul ABC, pe care l-am construit, plecând de la triunghiul GBC', linia AA_M este mediană, întrucât $BA_m = A_mC$. Liniile BB_m şi CC_m sunt, de asemenea, mediane, deoarece ele se intersectează în punctul G, care le împarte în raportul $2 : 1$ (prin construcţie). Lungimile medianelor BB_m şi CC_m sunt egale, respectiv, cu m_b şi m_c. În ceea ce priveşte mediana AA_m, avem $\frac{1}{3}AA_m = GA_m = \frac{1}{3}m_a$. Prin urmare, $AA_m = m_a$.

Discuţia.

Problema este posibilă dacă şi numai dacă cu segmentele $\frac{2}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b, \frac{2}{3}m_c$ se poate construi un triunghi, adică dacă şi numai dacă cu medianele m_a, m_b, m_c se poate forma un triunghi. După cum am demonstrat, în acest caz există o soluţie. Vom demonstra că este singura. Pentru aceasta este suficient să ne convingem că translaţia aplicată fiecărui vârf al triunghiului GBC' ne dă aceeaşi soluţie ca şi translaţia aplicată vârfului C' (şi care îl duce în C). Astfel, dacă am translata vârful B în punctul B' (astfel încât segmentele BB' şi $C'M$ să fie paralele şi egale), segmentul $B'C'$ ar determina una dintre laturile triunghiului căutat, anume $B'C' = AC$. Astfel, triunghiul de plecare GBC' este triunghiul ce ne conduce la un triunghi ABC unic determinat. □

Exemplul 3.2.3. Se dau trei laturi ale unui patrulater şi unghiurile adiacente celei de-a patra laturi. Să se construiască patrulaterul.

Demonstraţie. `Analiza.` Presupunem că patrulaterul $ABCD$ căutat, în care se dau laturile AB, BC şi CD sunt date, iar unghiurile A şi D este construit (vezi figura **??**). Aplicăm o translaţie de vector $\overrightarrow{CB}$ laturii CD, care se transformă în BD' Dreapta BD' este înclinată faţă de dreapta AD sub unghiul D. Linia poligonală ABD' se poate construi, iar din ea se poate obţine patrulaterul căutat, $ABCD$.

`Construcţia.` Începem construcţia cu unghiul A, pe una dintre laturile căruia luăm segmentul AB. Prin punctul B ducem dreapta BD', care formează un unghi D cu dreapta AD. Pe dreapta BD' construim punctul D' astel încât să avem $BD' = CD$. Cum $D'D = BC$, rezultă că punctul D se poate obţine din punctul D' în modul următor. Construim cercul cu centrul în D' şi de rază BC. D va fi punctul de intersecţie dintre acest cerc şi dreapta AD (cea de-a doua latură a unghiului A). Pentru construirea vârfului rămas, C, construim $BC \parallel DD'$ şi $DC \parallel D'B$. Punctul C este intersecţia celor două drepte[2].

`Demonstraţia.` După cum se constată din construcţie, în patrulaterul $ABCD$ construit laturile AB, BC şi CD au lungimile cerute, iar unghiurile A şi D sunt egale cu cele date.

`Discuţia.` Soluţia este posibilă, dacă distanţa de la punctul D' la dreapta AD este mai mică decât latura BC, deoarece numa în acest caz cercul cu centrul în O', de rază BC, intersectează dreapta AD. Obţinem, în general, două puncte, D şi D_1. Ele ne dau soluţii dacă în patrulaterele corespunzătoare unghiurile A şi D sunt egale cu unghiurile date. Ele pot fi egale, totuşi, şi cu suplementele lor, şi în acest caz nu obţunem o soluţie. Vezi, de exemplu, figura **??**, în care patrulaterul $ABCD$ este o soluţie a problemei, dar patrulaterul ABC_1D_1 nu este soluţie, deoarece unghiurile A şi D_1 sunt suplementele unghiurilor date. □

3.3 Simetria axială

3.3.1 Noţiuni teoretice

Două puncte M şi M' se numesc *simetrice* relativ la o dreaptă d dacă dreapta d este mediatoarea segmentului MM'.

Transformarea prin care fiecare punct al unei figuri date se transformă în simetricul său faţă de dreapta s se numeşte *simetrie axială relativ la dreapta d* sau *reflexie faţă de dreapta d*. Dreapta d însăşi se numeşte *axă de simetrie*. Vom nota cu S_d simetria relativ la dreapta d. Această simetrie defineşte o transformare a planului $S_d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, care asociază unui punct simetricul său faţă de dreapta d. Menţionăm o serie de proprietăţi remarcabile ale simetrie faţă de o dreaptă.

1) S_d este o izometrie (păstrează distanţele).

[2] Altfel spus, translatăm segmentul DB' înapoi în poziţia CD.

2) S_d păstrează punctele dreptei d şi numai pe ele.

3) S_d este o transformare involutivă:

$$S_d \circ S_d = 1_{\mathbb{R}^2}.$$

4) Imaginea prin S_d a unui segment de dreaptă este un segment de dreaptă.

5) Imaginea prin S_d a unei semidrepte este o semidreaptă.

6) Imaginea prin S_d a unei drepte este o dreaptă.

7) Imaginea unei drepte prin S_d este dreapta însăşi dacă şi numai dacă

   - fie dreapta coincide cu dreapta d, caz în care toate punctele sunt lăsate pe loc,
   - fie dreapta este perpendiculară pe d, caz în care punctele sunt mişcate de-a lungul dreptei, cu excepţia punctului de intersecţie al dreptei cu axa, care rămâne pe loc.

8) S_d transformă un cerc $\omega(O, r)$ în cercul $\omega'(O', r')$, unde $O' = S_d(O)$, iar $r' = r$. $\omega' = \omega$ dacă şi numai dacă $O \in d$. Din nou, invarianţa nu este punctuală (fiecare punct se transformă într-un alt punct al aceluiaşi cerc).

9) Simetria axială are o infinitate de puncte fixe: punctele axei de simetrie.

3.3.2 Probleme de construcţii rezolvate folosind simetria axială

Exemplul 3.3.1. Dreapta MN intersectează un segment AB. Găsiţi, pe dreapta MN, un punct X astfel încât MN să fie bisectoarea unghiului AXB.

Soluţie. Dacă A' este simetricul lui A faţă de dreapta MN (vezi figura 3.1), atunci, din definiţie, $AP = A'P$ şi $\measuredangle MPA = \measuredangle MPA' = 90°$. De aceea, $\triangle XPA = \triangle XPA'$ şi, prin urmare, $\measuredangle PXA = \measuredangle PXA'$. Astfel, punctul B trebuie să se afle pe dreapta $A'X$, cu alte cuvinte, punctul X trebuie să fie situat pe dreapta $A'B$. De aceea, punctul X se poate construi ca intersecţie a dreptelor MN şi $A'B$.

Problema are soluţie unică dacă distanţele de la punctele A şi B la dreapta MN nu coincid (cu alte cuvinte, dacă mijlocul segmentului AB nu se află pe dreapta MN). Dacă cele două distanţe coincid, dar punctele A şi B nu sunt simetrice faţă de dreapta MN (adică dacă această dreaptă nu este mediatoarea segmentului MN), atunci problema nu are soluţie (întrucât dreapta $A'B$ este paralelă cu dreapta MN). În fine, dacă punctele A şi B sunt simetrice faşă de dreapta MN, atunci problema devine nedeterminată: orice punct al dreptei MN îndeplineşte condiţiile problemei. □

Exemplul 3.3.2. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscând latura $AC = b$, unghiul adiacent $\measuredangle A = \alpha$ şi diferenţa celorlalte două laturi $AB - BC = r$.

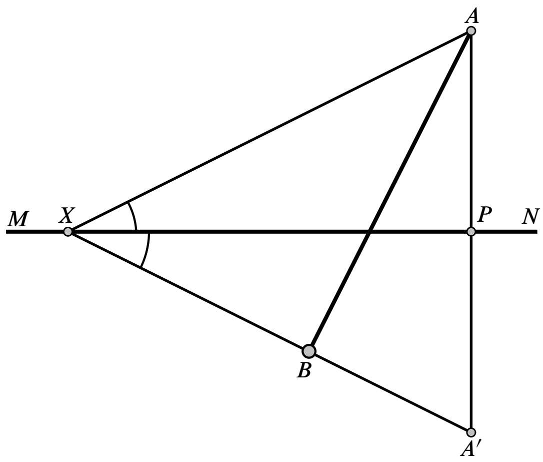

Figura 3.1

Soluţie. Fie ABC triunghiul căutat (vezi figura 3.2). Mărimile b şi α sunt elemente ale triunghiului ABC. Pentru a introduce în desen mărimea dată r, este suficientă să considerăm metrica laturii BC faşă de bisectoarea unghiului B. Prin această simetrie, punctul C se transformă în punctul $C' \in BA$, iar $AC' = AB - BC' = AB - BC = r$.

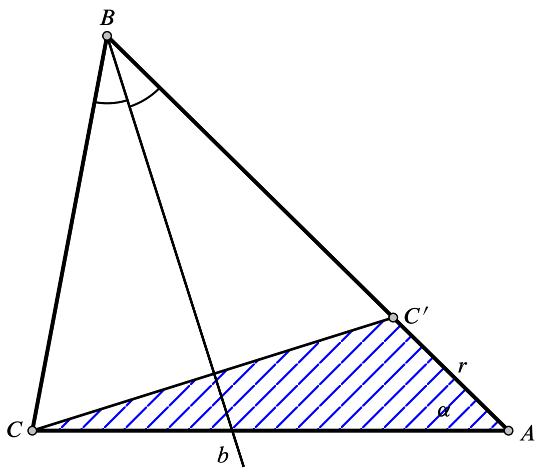

Figura 3.2

În triunghiul ACC' cunoaştem, acum, două laturi ($AC = b, AC' = r$) şi unghiul cuprins între ele, care este tocmai unghiul A. Aşadar, acest triunghi se poate construi. În plus, remarcăm că bisectoarea unghiului B este tocmai mediatoarea laturii CA' a acestui triunghi, deci şi ea se poate construi, odată ce am construit triunghiul ACC'.

Astfel, pentru a construi triunghiul ABC, construim mai întâi triunghiul ACC', cunoscând două laturi şi unghiul cuprins între ele. Construim apoi mediatoarea segmentului CC'. Punctul B, singurul vârf rămas neconstruit, se află la intersecţia dreptei AC' cu mediatoarea segmentului CC'.

Demonstraţia nu pune probleme deosebite, deci mai avem de făcut ***discuţia***.

Remarcăm, înainte de toate, că $AB > BC$ (deoarece diferenţa lor este $r > 0$). De aceea, $\measuredangle A < \measuredangle C$ şi, prin urmare , $\alpha < 90°$. În aceste condiţii, mediatoarea segmentului CC' intersectează semidreapta AC' dacă şi numai dacă unghiul $\measuredangle CC'B$ este ascuţit, adică $\measuredangle AC'C$ este obtuz, astfel că segmentul AC' este mai mic decât proiecţia segmentului AC pe dreapta AB: $r < b\cos\alpha$. Evident că această inegalitate nu poate avea loc dacă $\alpha \geq 90°$, dar noi am dedus deja că α este ascuţit. Astfel, relaţia $r < b\cos\alpha$ reprezintă singura condiţie pentru ca problema să aibă soluţie (unică). □

Exemplul 3.3.3. Se dă un unghi ascuţit AOB şi un punct M situat în interiorul unghiului. Să se determine două puncte X şi Y situate pe laturile unghiului astfel încât perimetrul triunghiului MXY să fie minim.

Soluţie. Fie X şi Y punctele căutate (vezi figura 3.3). Construim simetricele punctului M faţă de laturile unghiului, fie ele punctele M' şi M''. Atunci perimetrul triunghiului MXY este egal cu

$$MX + XY + MY = M'X + XY + M''Y,$$

adică reprezintă lungimea liniei poligonale $M'XYM''$. Este clar că această lungime este minimă atunci când cele patru puncte sunt coliniare, adică atunci când X şi Y se află pe dreapta $M'M''$.

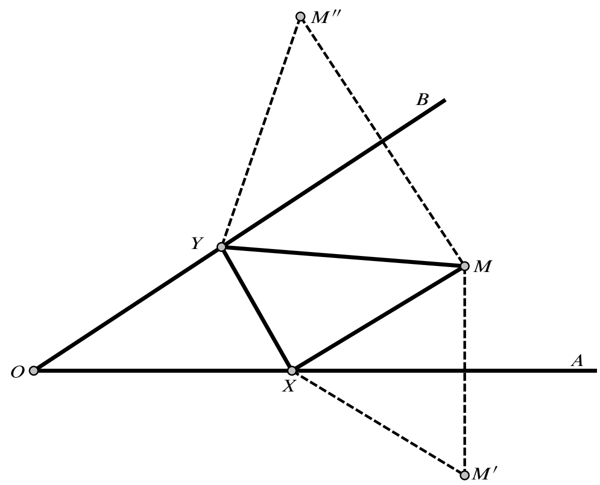

Figura 3.3

Această analiză ne spune deja cum putem construi cele două puncte căutate. Începem prin a construi punctele M' şi M'' (simetricele lui M faţă de OA, respectiv OB), apoi construim dreapta $M'M''$. Punctul X va fi punctul de intersecţie dintre această dreaptă şi OA, în tim ce punctul Y va fi punctul de intersecţie dintre această dreaptă şi OB (vezi figura 3.4). Triunghiul MXY este triunghiul căutat.

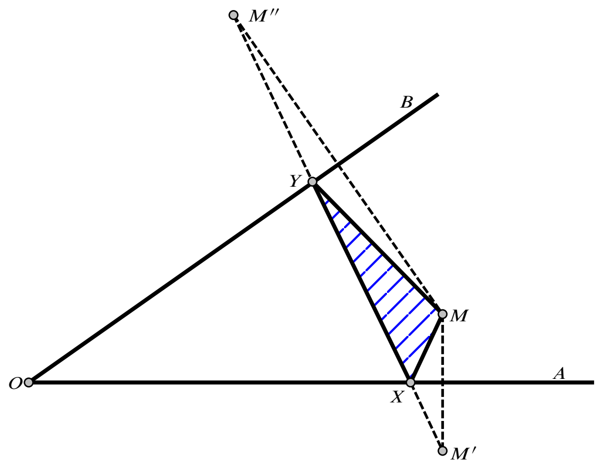

Figura 3.4

Demonstraţia este imediată şi, de asemenea, rezultă imediat că soluţia problemei este unică. □

Exemplul 3.3.4. Să se construiască un romb astfel încât una dintre diagonalele sale să fie egală cu un segment dat r şi să fie situată pe o dreaptă dată, a, iar celelalte două vârfuri să fie situate pe alte două drepte date, b şi c.

Soluţie. ***Analiza.*** Fie $ABDC$ rombul căutat (vezi figura 3.5) şi $AD = r$ diagonala dată, situată pe o dreaptă a. Remarcăm imediat că problema de construcţie este rezolvată, în acest caz concret, dacă sunte în stare să construim unul dintre celelalte două vârfuri al rombului, de exemplu vârful C. Din proprietăţile de simetrie ale rombului, rezultă atunci imediat că vârful B este simetricul vârfului C faţă de dreapta a. De aceea, aplicând o simetrie faţă de dreapta a, punctul B se transformă în punctul C, iar dreapta b – într-o dreaptă b', care trece prin punctul C. Astfel, punctul C poate fi construit ca punct de intersecţie dintre dreptele c şi b', dintre care una este dată, iar cealaltă se poate construi.
Construcţia.

- Construim mai întâi dreapta b' – simetrica dreptei b relativ la dreapta a.
- Construim punctul C, ca intersecţie dintre dreapta c şi dreapta b'.
- Construim dreapta BC, perpendiculara din C pe dreapta a.

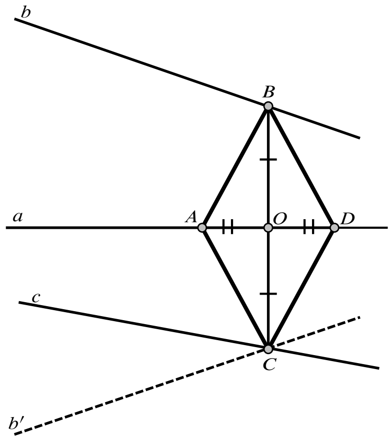

Figura 3.5

- Punctul $\{O\} = BC \cap a$ este centrul rombului.
- Punctele A şi D se află pe dreapta a, de o parte şi de alta a punctului O, la distanţa $\frac{r}{2}$.
- Punctul B este simetricul lui C faţă de dreapta a.

Demonstraţia. Este banală, aşa că o omitem.
Discuţia. Sunt posibile următoarele cazuri:

(i) $c \parallel b'$ – în acest caz nu avem soluţie;

(ii) $c \equiv b'$ – avem o infinitate de soluţii;

(iii) dreptele c şi b' se intersectează în exteriorul dreptei a – avem o singură soluţie;

(iv) dreptele c şi b' se intersectează pe dreapta a – nu avem soluţie.

□

3.4 Rotaţia faţă de un punct

3.4.1 Noţiuni teoretice

Numim *rotaţie* de unghi θ în jurul unui punct fix O al planului o transformare $R_{O,\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ care asociază fiecărui punct A al planului un punct B astfel încât (ca lungime de segmente) $OB = OA$, iar $\measuredangle AOB = \theta$. Rotaţia se face în sens trigonometric (invers mersului acelor de ceasornic) dacă $\theta \geq 0$ şi în sensul mersului acelor de ceasornic dacă $\theta \leq 0$. O se numeşte *centru* de rotaţie. Enumerăm câteva proprietăţi fundamentale.

1) $R_{O,0}$ este aplicaţia identică a planului.

2) $R_{O,\theta}$ este o izometrie.

3) Dacă $\theta \neq 0$, atunci $R_{O,\theta}$ admite un singur punct fix, centrul de rotaţie O.

4) Imaginea prin $R_{O,\theta}$ a unui segment AB este segmentul $A'B'$, unde $A' = R_{O,\theta}(A)$ şi $B' = R_{O,\theta}(B)$.

5) Imaginea prin $R_{O,\theta}$ a unei semidrepte este o semidreaptă.

6) Imaginea prin $R_{O,\theta}$ a unei drepte este o dreaptă.

7) Imaginea prin $R_{O,\theta}$ a unui unghi este un unghi egal.

8) $R_{O,\theta}$ transformă un cerc $\omega(M,r)$ în cercul $\omega'(M',r')$, unde $M' = R_{O,\theta}(M)$, iar $r' = r$.

9) Compunerea rotaţiei $R_{O,\theta}$ cu rotaţia $R_{O,\theta'}$, de acelaşi centru, este rotaţia $R_{O,\theta+\theta'}$. De remarcat că ordinea în care se compun cele două rotaţii este irelevantă.

10) Inversa rotaţiei $R_{O,\theta}$ este rotaţia $R_{O,-\theta}$.

3.4.2 Probleme de construcţii rezolvate folosind rotaţia faţă de un punct

Exemplul 3.4.1. Să se construiască un triunghi dacă se dau două laturi şi mediana corespunzătoare cele de-a treia laturi.

Soluţie. Fie ABC (vezi figura 3.6) triunghiul căutat, a şi b – laturile date şi $CD = m_a$ – mediana dată. Rotind întreaga figură în jurul punctului D cu 180°, obţinem paralelogramul $ACBC'$, la care se cunosc laturile şi una dintre diagonale, $CC' = 2m_c$. Aceasta dugerează următorul mers al construcţiei:

- construim triunghiul ACC', la care cunoaştem cele trei laturi, şi îl completăm la paralelogramul $ACBC'$;

- construind punctele A şi B, obţinem triunghiul ABC căutat.

Construirea triunghiului ACC', deci şi a triunghiului căutat, este posibilă dacă şi numai dacă

$$|a-b| < 2m_c < a+c.$$

Dacă aceste condiţii sunt îndeplinite, problema are soluţie unică. □

Exemplul 3.4.2. Se dau punctul O şi dreptele a şi b, care nu trec prin el. Din centrul O, ca centru, să se ducă un cerc, astfel încât arcul său, cuprins între dreptele date, să fie văzut din punctul O sub un unghi ascuţit dat, α.

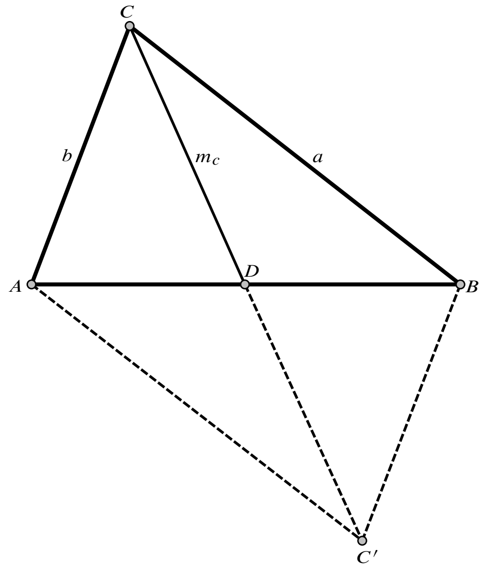

Figura 3.6

Soluţie. ***Analiza.*** Presupunem că problema este rezolvată. Fie ω cercul căutat, A şi B – capetele arcului cuprins între cele două drepte, $\measuredangle AOB = \alpha$ (vezi figura 3.7). Dacă aplicăm o rotaţie de unghi α în jurul punctului O dreptei a, atunci punctul A se transformă în punctul B. Prin urmare, punctul B poate fi găsit ca intersecţie dintre imaginea dreptei a şi dreapta b. Apoi, este uşor să construim cercul căutat. ***Construcţia.*** Rotim

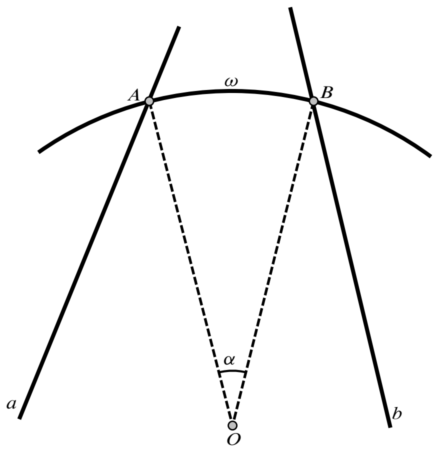

Figura 3.7

dreapta α cu un unghi α în jurul punctului O şi notăm cu a' imaginea ei (vezi figura 3.8).

Construim punctul comun B al dreptelor a' şi b. Cercul $\omega(O, OB)$ este cel căutat.

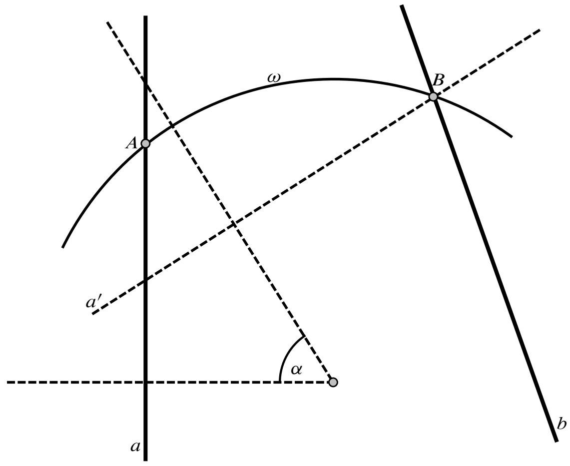

Figura 3.8

Demonstraţia. Admitem, pentru fixarea ideilor, că pentru construcţie rotirea dreptei a se produce în sensul mersului acelor de ceasornic. Făcând această rotaţie, construim punctul B, ca intersecţie dintre a' (imaginea lui a) şi dreapta b. Rotim acum punctul B în jurul punctului O, de aceasta dată în sens opus mersului acelor de ceasornic, tot cu un unghi α. Atunci dreapta a' se transformă în dreapta a, iar punctul B se suprapune peste un punct A de pe dreapta a. Este clar că $\measuredangle AOB = \alpha$ şi, de aceea, cercul ω este, într-adevăr, cel căutat.

Discuţia. Întrucât în cerinţele problemei nu este precizat, dreapta a se poate roti în jurul punctului O cu unghiul α atât în sensul mersului acelor de ceasornic, cât şi în sens opus. De aceea, după rotire, dreapta poate ocupa două poziţii, fie ele a' şi a'', în funcţie de sensul rotaţiei. Cum unghiul α, prin ipoteză, este ascuţit, dreptele a' şi a'' nu sunt paralele între ele (ele fac un unghi de 2α). Sun posibile următoarele cazuri:

1. a' şi a'' se intersectează cu b. În acest caz problema are două soluţii.

2. a' (sau a'') este paralelă cu b (este clar că nu pot fi ambele paralele cu b). În acest caz, avem o soluţie unică.

3. a' (sau a'') coincide cu b. De data aceasta avem o infinitate de soluţii.

□

Exemplul 3.4.3. Să se construiască un pătrat astfel încât trei dintre vârfurile sale să fie situate pe trei drepte paralele a, b şi c.

Demonstrație. Fie $PQRS$ pătratul căutat (vezi figura 3.9), iar $P \in a$, $Q \in b$, $R \in c$. Printr-o rotaţie cu 90° în jurul punctului Q, punctul R va coincide cu P, iar dreapta c se va transforma în dreapta c', care trece prin P, astfel încât $\{P\} \equiv a \cap c'$. Construind segmentul PQ (latura pătratului), este uşor să construim întregul pătrat. Alegând punctul

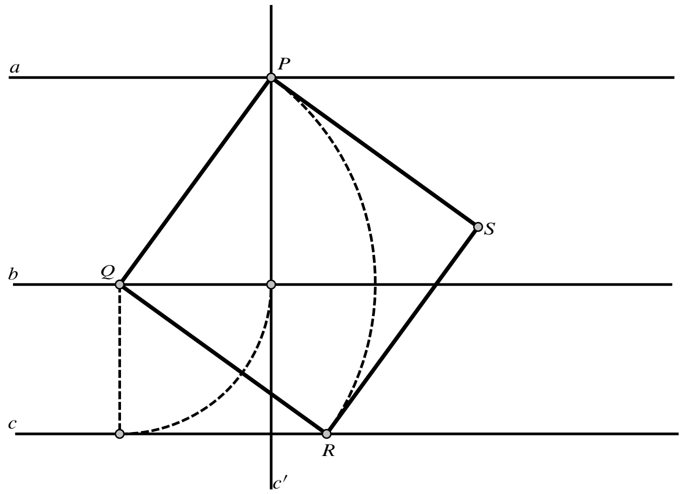

Figura 3.9

Q pe drepte diferite, obţinem trei pătrate, în general inegale. Excepţie face cazul în care una dintre dreptele date este egal depărtată de celelalte două. În acest caz, două dintre cele trei pătrate, fie ele $P_1Q_1R_1S_1$ şi $P_2Q_2R_2S_2$ sunt egale între ele.

Această problemă are o infinitate de soluţii, care se se pot obţine schimbând poziţia punctului Q pe dreptele a, b, c. Fiecare dintre pătratele care se pot obţine va fi egal cu unul dintre pătratele $P_1Q_1R_1S_1$, $P_2Q_2R_2S_2$ sau $P_3Q_3R_3S_3$. □

3.5 Omotetia

3.5.1 Noţiuni teoretice

Fie k un număr real nenul şi O un punct din plan. Se numeţte *omotetie* de centru O şi de raport k transformarea $H_{O,k} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ astfel încât, dacă Z este un punct oarecare al planului, iar Z' este imaginea sa prin omotetie, atunci punctele O, Z, Z' sunt coliniare, iar $\overline{OZ'} = k\overline{OZ}$.

Se observă că omotetiile de raport $k = -1$ şi $k = 1$ sunt izometrii (şi numai ele!). Cazul $k = 1$ corespunde, în mod evident, aplicţiei identice a planului. Menţionăm o serie de proprietăţi ale omotetiei.

1) Distanţa între imaginile a două puncte este propoţională cu distanţa dintre ele:

$$|\overline{H_{O,k}(A)H_{O,k}}| = |k| \cdot |\overline{AB}|.$$

2) Imaginea unei drepte prin $H_{O,k}$ este o dreaptă paralelă cu ea. Dacă dreapta este orientată, atunci imaginea sa va fi orientată la fel dacă avem $k > 0$ sau invers, dacă avem $k < 0$. Singurele drepte invariante sunt cele care trec prin centrul de omotetie.

3) Imaginea unei semidrepte prin $H_{O,k}$ este o semidreaptă paralelă cu ea, cu aceleaşi observaţii relativ la orientare.

4) Imaginea unui segment prin $H_{O,k}$ este un segment paralel cu el, cu aceleaşi observaţii relativ la orientare.

5) Omotetia de raport $k \neq 1$ are un singur punct invariant (centrul).

6) Nu există cercuri invariante relativ la omotetii pentru care $|k| \neq 1$.

7) Imaginea unui cerc $\omega(M, r)$ prin $H_{O,k}$ este un cerc $\omega'(M', r')$, unde $M' = H_{O,k}(M)$, iar $r' = |k| \cdot r$.

3.5.2 Aplicaţii ale omotetiei la rezolvarea problemelor de construcţii geometrice

Exemplul 3.5.1. Într-un triunghi dat, să se înscrie un alt triunghi, cu laturile paralele cu trei drepte date.

Demonstraţie. Notăm cu ABC triunghiul dat şi cu D_1, D_2, D_3 cele trei drepte date. Este clar că, dacă notăm cu DEF triunghiul ce trebuie construit, construcţia sa e determinată şn momentul în care reuşim să construim un vârf al său. Ducem o dreaptă paralelă cu dreapta D_1 (vezi figura 3.10), astfel încât ea să intersecteze laturile AB şi AC ale triunghiului dat, în punctele H şi G. Prin punctul H ducem o paralelă la dreapta D_2 şi prin G – o paralelă la dreapta D_3. Ele se intersectează în punctul L. Triunghiul HGL construit în acest mod are laturile paralele cu cele ale triunghiului căutat DEG, deci este omotetic cu acest triunghi. Este uşor de constatat că centrul de omotetie este chiar vârful A al triunghiului ABC. Ştim că punctele G şi H se află pe două dintre laturile triunghiului ABC, deci şi omoteticele lor se vor afla, de asemenea, pe aceleaşi laturi. Nu ştim, deocamdată, care trebuie să fie raportul de omotetie. Ceea ce ştim însă, este că acest raport trebuie ales astfel încât imaginea punctului L prin această omotetie să se afle pe cea de-a treia latură a triunghiului, adică BC.

Procedăm în modul care urmează. Fie D imaginea punctului L prin omotetie. Omotetia fiind de centru A, punctul D trebuie să se afle pe dreapta AL, dar, în acelaşi timp, el trebuie să aparţină dreptei BC. Prin urmare, $\{D\} = AL \cap BC$. Aşadar, am reuşit să construim vărful D al triunghiului DEF. Prin acest punct ducem acum dreptele

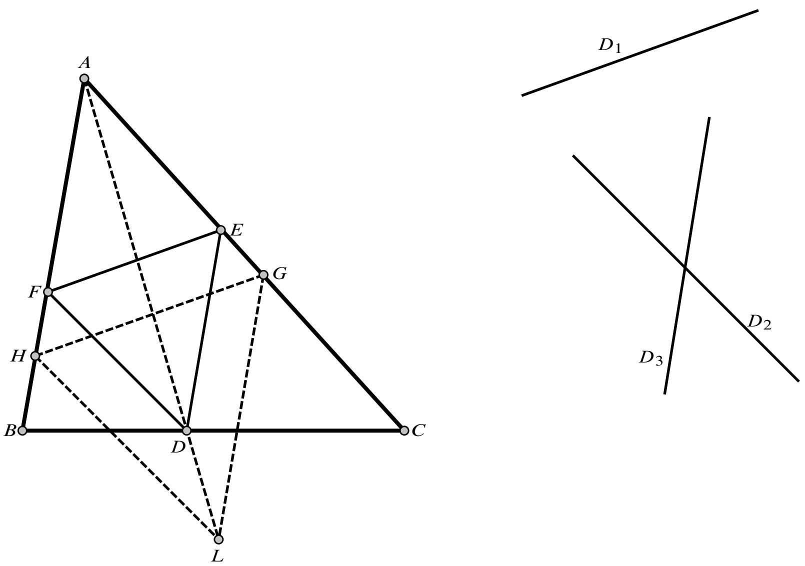

Figura 3.10

$DE \parallel GL$ ($E \in AC$) şi $DF \parallel LH$ ($F \in AB$). Dacă unim pe E cu F, dreapta EF este paralelă cu dreapta HG, deci triunghiul căutat este DEF.

`Discuţie.` Soluţia există doar dacă dreptele date nu sunt paralele între ele (două câte două). □

Exemplul 3.5.2. Se dau un punct şi două drepte concurente. Prin punctul dat să se ducă o o dreaptă în aşa fel încât segmentele determinate pe ea de punctul dat şi de punctele de intersecţie cu cele două drepte date să fie într-un raport dat, $m : n$.

Demonstraţie. Fie S punctul dat şi f, g – dreptele date (vezi figura 3.11). Să presupunem că secanta SFG ($F \in f$, $G \in g$) este o soluţie a problemei. Asta înseamnă că

$$\frac{SF}{SG} = \frac{m}{n} \quad \text{sau} \quad \frac{SG}{SF} = \frac{n}{m} = k.$$

Aplicăm o omotetie de centru S şi de raport k. Prin această omotetie, punctul F se va transforma în punctul G, iar dreapta f – într-o dreaptă f', paralelă cu ea, care trece prin punctul G. Prin urmare, punctul G este punctul de intersecţie dintre dreptele f' şi g. De aici, obţinem construcţia care urmează.

Din centrul S ducem un cerc de rază $SM = m$. Găsim un punct de intersecţie dintre acest cerc şi dreapta f. Notăm acest punct cu M. Pe dreapta SM alegem un punct N astfel încât $SN = n$. Dacă aplicăm acum o omotetie de centru S şi de raport $k = n/m$, atunci punctul M se transformă în punctul N, iar dreapta f se transformă în dreapta f'. Aceasta din urmă trebuie să fie paralelă cu dreapta f şi trebuie să treacă prin punctul N.

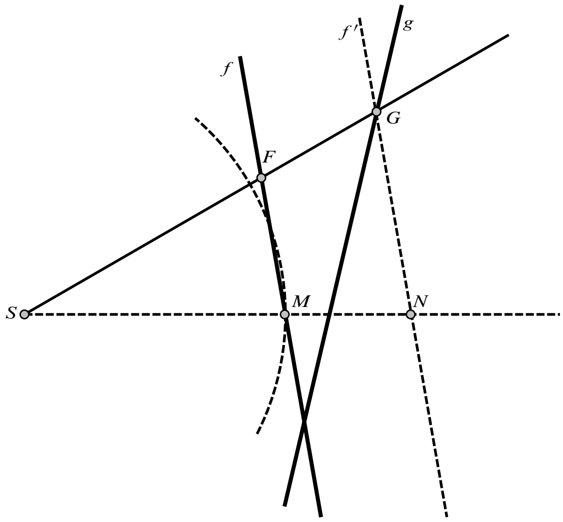

Figura 3.11

Construim dreapta f' şi determinăm punctul G în care ea se intersectează cu dreapta g. Atunci dreapta SG este soluţia problemei, deoarece

$$\frac{SG}{SF} = \frac{n}{m} = k.$$

Din construcţie se observă că problema are soluţie unică. □

Exemplul 3.5.3. Într-un triunghi ABC dat, să se înscrie un dreptunghi, ale cărui laturi să se afle într-un raport dat, astfel încât două dintre vârfurile dreptunghiului să se afle pe latura AB a triunghiului dat, iar celelalte două vârfuri – unul pe latura AC, iar celălalt – pe latura BC.

Demonstraţie. Presupunem că dreptunghiul cerut $PQSR$ este construit (vezi figura 3.12). Atunci raportul laturilor sale va fi

$$\frac{QS}{RS} = \frac{m}{n},$$

unde literele m şi n notează două segmente date. Aplicăm dreptunghiului $PQSR$ omotetia de centru A şi de raport

$$k = \frac{m}{QS}.$$

Obţinem un nou dreptunghi, $P'Q'S'R'$, iar

$$\frac{Q'S'}{QS} = k = \frac{m}{QS}.$$

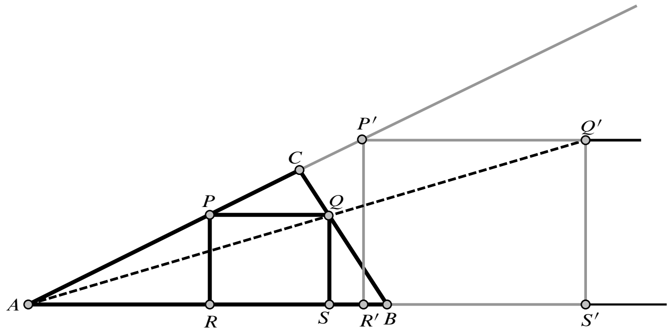

Figura 3.12

De aici,

$$Q'S' = m = P'R'.$$

Cum printr-o omotetie raportul a două segmente nu se schimbă, avem

$$\frac{Q'S'}{R'S'} = \frac{QS}{RS} = \frac{m}{n}$$

şi, prin urmare,

$$R'S' = n.$$

`Construcţia.` Ducem o dreaptă paralelă cu latura AB a triunghiului dat şi situată de distanţa m faţă de aceasta. Notăm punctul de intersecţie a acestei paralele cu latura AC a triunghiului cu P'. După aceea, construim dreptunghiul $P'Q'S'R'$ cu laturile $P'R' = m$ şi $R'S' = n$. Vârful Q a dreptunghiului căutat trebuie să se afle pe dreapta AQ', întrucât el corespunde punctului Q' prin omotetia de centru A. Prin urmare, vârful Q este la intersecţia dreptei AQ' cu latura BC a triunghiului. Odată construit vârful Q, construcţia celorlalte vârfuri nu pune nici un fel de dificultăţi.

Din construcţie se constată că problema are soluţie unică. □

3.6 Inversiunea

3.6.1 Noţiuni teoretice

Fie O un punct din plan şi R un număr pozitiv. Se numeşte *inversiune* de centru (sau pol) O şi putere R^2 aplicaţia

$$I_{O,R^2} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$I_{O,R^2}(P) = P', \quad \text{astfel încât} \quad OP \cdot OP' = R^2.$$

Se mai spune că I_{O,R^2} este o *inversiune faţă de cercul* $\omega(O, R)$. Punctul P' se numeşte *inversul* lui P, iar cercul ω se numeşte *cerc de inversiune*.

Menţionăm, mai jos, cele mai importante proprietăţi ale inversiunii. Demonstraţia lor se poate găsi în orice carte serioasă de transformări geometrice sau, mai general, de geometrie euclidiană plană. Cum cursul acesta are cu totul alt subiect, nu vom reproduce aici aceste demonstraţii.

1) Inversiunea este propria sa inversă:

$$I_{O,R^2} \circ I_{O,R^2} = 1_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}.$$

2) Orice punct al cercului de inversiune se transformă în el însuşi, altfel sus, toate punctele cercului de inversiune sunt puncte fixe ale transformării.

3) Orice punct din exteriorul cercului de inversiune se transformă într-un punct din interiorul său şi reciproc.

4) Orice semidreaptă cu originea în polul inversiunii se transformă în ea însăşi. Totuşi, aceasta înseamnă doar că punctele semidreptei se transformă în alte puncte ale semidreptei, de obicei inversele lor nu sunt ele însele, cu alte cuvinte, *semidreptele cu originea în polul de inversiune sunt figuri invariante* relativ la inversiune.

5) O dreaptă care trece prin polul de inversiune (se înţelege, mai puţin polul însuşi) se transformă în ea însăşi (din nou, mai puţin polul), adică este invariantă.

6) Dreapta care uneşte două puncte ale planului şi dreapta care uneşte inversele lor sunt o pereche de drepte *antiparalele* relativ la unghiul cu vârful în polul de inversiune şi având ca laturi dreptele determinate de pol şi de primele două puncte[3].

7) Prin inversiune, un cerc care trece prin polul inversiunii se transformă într-o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor cercului dat şi cercului de inversiune.

8) Inversul unui cerc care nu trece prin polul de inversiune este tot un cerc care nu trece prin polul de inversiune.

9) Inversa unei drepte care nu trece prin polul de inversiune este un cerc care trece prin polul de inversiune.

10) Dacă un cerc trece prin două puncte care sunt unul inversul celuilalt printr-o inversiune dată, atunci acest cerc este invariant relativ la inversiunea dată (adică fiecare punct al său se transformă într-un alt punct al său).

[3]Reamintim că două drepte care taie laturile unui unghi sunt *antiparalele* relativ la acel unghi, dacă unghiul pe care îl formează prima dreaptă cu o latură a unghiului este egal cu unghiul pe care îl formează cealaltă dreaptă cu cea de-a doua latură a unghiului

11) Pentru ca un cerc diferit de cercul de inversiune să se transforme prin inversiune în el însuşi (adică să fie invariant) este necesar şi suficient ca cercul să fie ortogonal cercului de inversiune.

12) Dacă două linii γ_1 şi γ_2 (pot fi şi curbe, nu neapărat drepte) şi un punct de intersecţie M al lor se transformă printr-o inversiune în liniile γ_1' şi γ_2' şi punctul M', atunci unghiul dintre γ_1 şi γ_2 în M este egal cu unghiul dintre γ_1' şi γ_2' în punctul M'. Se spune că transformarea prin inversiune este o *transformare conformă*, adică păstrează unghiurile.

3.6.2 Aplicaţii ale inversiunii la rezolvarea problemelor de construcţii geometrice

Exemplul 3.6.1. Prin două puncte A şi B date, să se construiască un cerc ortogonal la un cerc dat, $\omega(O, r)$.

Demonstraţie. Dacă aplicăm o inversiune de cerc ω, atunci cercul căutat, fie el γ, fiind ortogonal pe cercul de inversiune, este un cerc invariant, deci se transformă în el însuşi. Prin urmare, punctele A şi B se transformă în punctele A' şi B' de pe cercul γ. Dar cercul γ este complet determinat de trei puncte ale sale, de exemplu A, B şi A'. De aici rezultă construcţia (vezi figura 3.13).

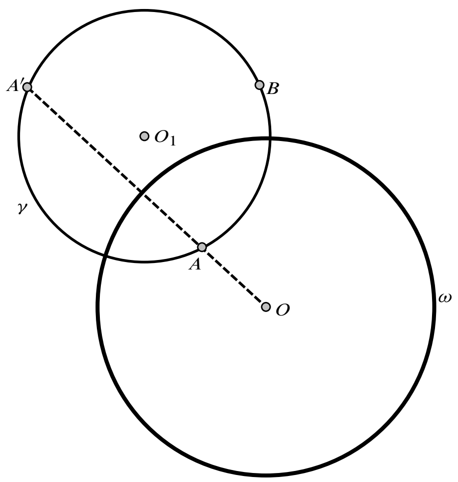

Figura 3.13

1) Construim punctul A', inversul punctului A faţă de cercul ω.

2) Construim cercul γ care trece prin punctele A, B şi A'.

γ este cercul căutat.

Dacă punctul A se află pe centrul ω, atunci punctul A' coincide cu punctul A şi modalitatea de construire descrisă mai sus este neaplicabilă. În acest caz, se poate aplica o modalitate echivalentă, folosind punctul B în locul punctului A. Dacă ambele puncte A şi B se află pe cercul ω, atunci construcţia se poate realiza astfel: prin A şi B ducem tangentele la cercul ω şi notăm punctul lor de intersecţie cu O_1. O_1 este centrul cercului căutat.

Aceste construcţii nu sunt aplicabile dacă punctele A, B şi O sunt coliniare. Dacă punctele A şi B nu sunt unul inversul celuilalt, atunci problema nu are soluţii. Dacă punctele A şi B sunt inverse faţă de cercul ω, atunci problema are o infinitate de soluţii: oricare cerc are trece prin punctele A şi B este ortogonal cercului ω. □

Exemplul 3.6.2. Sunt date punctele A, B şi C. Să se ducă prin B o dreaptă astfel încât distanţele AX şi CY de la punctele A şi C până la această dreaptă să verifice egalitatea

$$AX^2 - CY^2 = k^2,$$

unde k este o lungime constantă (vezi figura 3.14).

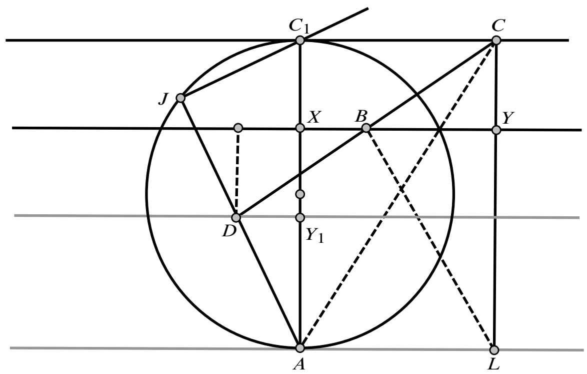

Figura 3.14

Demonstraţie. Din egalitatea

$$(AX + CY)(AX - CY) = k^2$$

rezultă necesitatea de a introduce în desen suma şi diferenţa segmentelor AX şi BY. De aceea, pe semidreapta AX construim segmentul XC_1 de lungime egală cu cea a segmentului CY, iar segmentul CB îl prelungim, dincolo de B, cu un segment BD, de aceeaşi lungime cu CB. Apoi ducem $DY_1 \parallel BX$, unde $Y_1 \in AC_1$. Din construcţie rezultă atunci că $XY_1 = C_1X$, iar $AC_1 \cdot AY^1 = k^2$. Dacă se consideră A polul inversiunii de putere k^2, atunci C_1 şi Y_1 vor fi puncte inverse relativ la această inversiune.

Cum Y_1 se află pe dreapta DY_1, înseamnă că C_1 se află pe inversa acestei drepte. Cum dreapta nu trece prin polul de inversiune, inversa ei este un cerc care trece prin polul de inversiune, adică prin A. Mai mult, punctele A şi C_1 sunt puncte diametral opuse în cercul invers dreptei DY_1. Fie J inversul lui D relativ la inversiunea aleasă. Atunci el verifică relaţia $AD \cdot AJ = k^2$, ceea ce înseamnă că J poate fi construit. Triunghiul AJC_1 este dreptunghic, ceea ce înseamnă că şi C_1 se poate construi. Acum, dreapta pe care vrem să o construim este dreapta care trece prin B şi este perpendiculară pe dreapta AC_1, ceea ce încheie raţionamentul. $\square$

Partea II

Constructibilitate cu rigla şi compasul

CAPITOLUL 4

Fundamentele teoriei constructibilităţii

4.1 Puncte constructibile şi numere constructibile

Am lămurit, sperăm, care este semnificaţia construcţiilor cu rigla şi compasul în planul euclidian. Abordarea de până acum, pur geometrică, nu ne permite, din păcate, să precizăm care figuri geometrice se pot construi folosind, în exclusivitate, aceste două instrumente clasice. Pentru a obţine răspunsul la această întrebare, trebuie să reformulăm o problemă de construcţii într-un alt limbaj. Cel mai potrivit s-a dovedit a fi cel algebric.

Vom începe, prin urmare, acest capitol tocmai cu formularea problemei de construcţii (mai precis, formularea noţiunii de *constructibilitate*) într-un limbaj algebric. Primul pas este să dăm o definiţie (deocamdată geometrică) riguroasă a noţiunii de *punct constructibil*.

Definiţia 4.1. Fie Π planul euclidian şi $\mathcal{B} \subset \Pi$ o submulţime finită a planului, care conţine cel puţin două elemente. Elementele lui $\mathcal{B}$ se numesc *puncte de bază*. Atunci:

(a) Un punct $M \in \Pi$ se numeşte *constructibil* cu rigla şi compasul dacă există un şir finit de muncte care se termină cu M: $M_1, M_2, \ldots, M_n = M$ astfel încât pentru fiecare i, $1 \leq i \leq n$ este un punct de intersecţie

- fie a două drepte,
- fie a unei drepte şi a unui cerc,
- fie a două cercuri,

aceste drepte şi cercuri obţinându-se, pentru fiecare i, cu ajutorul mulţimii $E_i = \mathcal{B} \cup \{M_1, \ldots, M_{i-1}\}$ în modul următor:

- orice dreaptă trece prin două puncte distincte din E_i,
- fiecare cerc are centrul într-un punct din E_i, iar raza sa este egală cu distanţa dintre două puncte din E_i.

(b) O dreaptă care trece prin două puncte constructibile se numeşte *constructibilă.*

(c) Un cerc ce are centrul într-un punct constructibil şi are raza egală cu distanţa dintre două puncte constructibile se numeşte *constructibil.*

Observaţia 3. Toate *punctele de bază* din $\mathcal{B}$ sunt constructibile cu rigla şi compasul. Fie, de exemplu, $P \in \mathcal{B}$ un punct de bază. Întrucât am admis că există cel puţin două puncte de bază, rezultă că există un punct $P' \in \mathcal{B}$, $P' \neq P$. Atunci P se poate obţine ca intersecţie a dreptei PP' cu cercul de centru P' şi de rază PP', ceea ce înseamnă că P este constructibil. Cum P este un punct de bază ales la întâmplare, rezultă că *orice* punct de bază este constructibil.

Observaţia 4. De acum încolo, dacă nu se menţionează explicit altfel, pentru noi *construcţie geometrică* va însemna *construcţie geometrică realizată cu rigla şi compasul* şi nu vom mai menţiona explicit instrumentele utilizate.

În cele ce urmează, scopul nostru este să introducem noţiunea de *număr constructibil*, alături de cea de *punct constructibil*. În acest scop, vom introduce un reper cartezian în plan, plecând de la două puncte de bază.

Mai precis, pe moment presupunem că există doar două puncte de bază, fie ele O şi I, adică $\mathcal{B} = \{O, I\}$. Vom evidenţia nişte puncte constructibile, plecând de la cele două puncte de bază.

Punctele O şi I determină dreapta OI. Considerăm cercul (constructibil) Γ, cu centrul în punctul O şi de rază OI. Cercul Γ intersectează dreapta OI în punctul I şi într-un al doilea punct, I', simetricul lui I faţă de punctul O. Prin urmare, punctul I' este constructibil. Vom construi acum mediatoarea segmentului II'. Pentru aceasta, considerăm, mai întâi, cercul C de centru I şi de rază II', precum şi cercul C', de centru I' şi de aceeaşi rază, II'. Notăm cu K unul dintre punctele de intersecţie dintre cele două cercuri. Evident, punctul K este constructibil, întrucât este intersecţia a două cercuri constructibile. Este uşor de demonstrat că dreapta OK este perpendiculară pe dreapta OI, deci ea este mediatoarea segmentului II'. Dreapta OK intersectează cercul Γ în două puncte, pe care le vom nota cu J şi J', ele fiind, de asemenea, constructibile.

Am pus, astfel, în evidenţă o serie de puncte constructibile: O, I, I', K, J, J'. Vom folosi unele dintre ele pentru a construi un reper ortonormat. Astfel, alegem ca unitate de lungime distanţa OI. Atunci, în mod evident, avem şi $OJ = 1$. reperul nostru va fi $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Pentru a simplifica notaţiile, vom nota acest reper cu (O, I, J).

Avem acum tot ce ne trebuie pentru a da următoarea definiţie:

Definiţia 4.2. Un număr real se numeşte *constructibil* dacă el este una dintre coordonatele unui punct constructibil faţă de reperul ortonormat (O, I, J).

Observaţia 5. În mod normal, exprimarea corectă este că numărul real este *constructibil relativ la punctele de bază O şi I'*. Vom utiliza exprimarea prescurtată, de acum încolo.

Exemplul 4.1.1. Numerele reale $0, 1, -1$ sunt constructibile, deoarece ele sunt abscisele punctelor O, I, I'.

4.2 Modalităţi elementare de construire a unor obiecte constructibile

Propoziţia 4.1. *Dacă d este o dreaptă constructibilă, iar A este un punct constructibil, atunci perpendiculara pe D care trece prin A este, de asemenea, o dreaptă constructibilă.*

Demonstraţie. Din moment ce dreapta d este constructibilă, ea conţine cel puţin două puncte constructibile, fie ele B şi C. Considerăm cercul (evident constructibil) de centru A şi de rază AB. Acest cerc intersectează dreapta d în B şi şntr-un alt punct, fie el D. Construim acum două cercuri cu centrele în B şi D şi de rază BD. Aceste două cercuri se intersectează în două puncte, fie ele E şi F. Atunci dreapta AE este dreapta căutată. □

Observaţia 6. De remarcat că demonstraţia dată funcţionează doar dacă $A \neq B$. Dar dacă $A = B$, atunci, cu siguranţă, $A \neq C$, deci putem reface demonstraţia, folosind punctul C în locul punctului B.

Propoziţia 4.2. *Dacă d este o dreaptă constructibilă, iar A este un punct constructibil, care nu aparţine dreptei d, atunci paralela d' la d care trece prin A este, de asemenea, o dreaptă constructibilă.*

Demonstraţie. Conform propoziţiei 4.1, putem construi perpendiculara d'' care trece prin A. Atunci dreapta d' este perpendiculara care trece prin A pe dreapta d'', prin urmare, conform aceleiaşi propoziţii 4.1, este constructibilă. □

Propoziţia 4.3. *Dacă A şi B sunt două puncte constructibile, atunci mijlocul segmentului AB şi mediatoarea sa sunt, de asemenea, constructibile.*

Demonstraţie. Cercurile de centre A şi B şi de raze egale cu AB sunt ambele constructibile. Cele două cercuri se intersectează în două puncte, care determină mediatoarea segmentului. Punctul de intersecţie dintre dreapta AB şi mediatoare determină mijlocul segmentului, care este, prin urmare, constructibil. □

Propoziţia 4.4. *Dacă d şi d' sunt două drepte constructibile concurente, atunci bisectoarele unghiurilor formate de cele două drepte sunt, de asemenea, constructibile.*

Demonstraţie. Fie A punctul de intersecţie al dreptelor d şi d'. Considerăm cercul de centru A şi rază OI, care taie dreapta d în punctul B şi dreapta d' în punctul B'. Considerăm, mai departe, cercurile de centru B, respectiv B' şi rază OI, care se intersectează în punctele C şi D. Dreptele AC şi AD sunt cele două bisectoare căutate. □

Propoziţia 4.5. *Un număr real t este constructibil dacă şi numai dacă punctul de pe axa Ox de abscisă t este constructibil. Analog, t este constructibil dacă şi numai dacă punctul de pe axa Oy de ordonată t este constructibil.*

Demonstraţie. Vom face demonstraţia doar pentru afirmaţia referitoare la axa Ox, cealaltă se demonstrează în mod absolut analog.
($\Longrightarrow$) Dacă punctul de pe axa Ox de abscisă t este constructibil, atunci t este constructibil, din însăşi definiţia unui număr constructibil.
($\Longleftarrow$) Dacă t este un număr constructibil, atunci el este una dintre coordonatele unui punct constructibil M. Atunci proiecţiile M_1 şi M_2 ale lui M pe axa Ox, respectiv pe axa Oy, sunt constructibile, conform propoziţiei 4.1. Avem două cazuri:

- Dacă t este abscisa lui M, atunci el este şi abscisa lui M_1, iar rezultatul este stabilit.

- Dacă t este ordonata lui M, atunci el este şi ordonata lui M_2, prin urmare este şi abscisa punctului M_2', obţinut intersectând cercul (constructibil) de centru O şi rază OM_2 cu axa Ox.

□

Propoziţia 4.6. *Dacă A este un punct constructibil, iar t este un număr constructibil, atunci cercul de centru A şi de rază $|t|$ este constructibil.*

Demonstraţie. Punctul M de abscisă t de pe axa Ox este constructibil, conform propoziţiei 4.5. Cercul de centru A şi de rază $|t|$ este, atunci, cercul de centru aA şi de rază OM, deci este constructibil. □

4.3 Corpul numerelor constructibile

Teorema 4.1. *Mulţimea $\mathcal{C}$ a numerelor reale constructibile este un subcorp al lui $\mathbb{R}$, stabil faţă de rădăcina pătrată*[1].

Demonstraţie. Ştim deja că numerele reale 0 şi 1 sunt constructibile, deoarece sunt abscisele punctelor de bază O şi I. Mai departe,

[1] Asta înseamnă că dacă un număr real pozitiv este constructibil, atunci şi rădăcina sa pătrată este constructibilă.

1) Dacă $u \in \mathcal{C}$, vom demonstra că şi $-u \in \mathcal{C}$. Într-adevăr, fie A punctul de pe axa Ox de abscisă u. Considerăm cercul cu centrul în O şi de rază $|u|$ (presupunem fireşte, că $u \neq 0$, altfel nu avem ce demonstra). Acest cerc intersectează din nou axa Ox într-un punct B, a cărui abscisă este $-u$. Cum punctul B este, în mod evident, constructibil, rezultă că şi abscisa lui, $-u$ este în $\mathcal{C}$.

2) Fie $u, v \in \mathcal{C}$ şi fie A şi B punctele de pe axa Ox pentru care $\overline{OA} = u$ şi $\overline{AB} = v$. Punctul A este constructibil, conform propoziţiei 4.5, iar punctul B este constructibil conform propoziţiei 4.6, dacă utilizăm cercul de centru A şi de rază $|v|$. Prin urmare, avem $\overline{OB} = u + v$, ceea ce înseamnă că $u + v = \mathcal{C}$.

3) Fie $u, v \in \mathcal{C}$. Dacă $uv = 0$, atunci nu avem ce demonstra, deci presupunem că atât u, cât şi v sunt nenule. Fie A pe Ox astfel încât $\overline{OA} = u$ şi B pe Oy astfel încât $\overline{OB} = v$. Paralela la IB care trece prin A taie axa Oy într-un punct C. Din teorema lui Thales rezultă că
$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OI}},$$
de unde rezultă că $\overline{OC} = uv$, adică $uv \in \mathcal{C}$.

4) Fie $u \in \mathcal{C}$, $u \neq 0$. Fie, mai departe, A pe axa Ox astfel încât $\overline{OA} = u$. Paralela la AJ dusă prin I taie axa Oy într-un punct B. Din Teorema lui Thales, avem că
$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OA}},$$
de unde rezultă că $\overline{OB} = 1/u$, deci $1/u \in \mathcal{C}$.

5) Dacă $u \in \mathcal{C}$, $u \geq 0$. Dacă $u = 0$, atunci $\sqrt{u}$ este tot 0, deci este constructibil. Presupunem, în cele ce urmează, că $u > 0$. Fie A punctul de pe axa Ox astfel încât $\overline{IA} = u$ şi M – mijlocul segmentului OA. Perpendiculara în I pe Ox taie cercul cu centrul în M şi de rază OM într-un punct B de ordonată pozitivă. Triunghiul OBA este dreptunghic în B, deci avem $IA^2 = OI \cdot IA$. Astfel, $IB = \sqrt{u}$, iar $\sqrt{u}$ este ordonata punctului constructibil B, adică $\sqrt{u} \in \mathcal{C}$.

$\square$

Observaţii. 1) Menţionăm, mai întâi, că $\mathbb{Q}$ este cel mai mic subcorp al lui $\mathbb{R}$. Într-adevăr, fie K un subcorp oarecare al lui $\mathbb{R}$. Atunci, înainte de toate, $1 \in K$. Din stabilitatea lui K faţâ de adunare, rezultă imediat că $\mathbb{N} \subset K$, în timp ce stabilitatea faţă de trecerea la opus implică $\mathbb{Z} \subset K$. În sfârşit, din stabilitatea faţă de produs şi trecerea la invers rezultă că $\mathbb{Q} \subset K$. Rezultă de aici că $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C} \subset \mathbb{R}$.

Aşadar, din moment ce corpul $\mathcal{C}$ este stabil faţă de rădăcina pătrată şi conţine numerele raţionale, se pot da multe exemple de numere constructibile, ca de exemplu:

$$-\frac{2}{3},\ \sqrt{2},\ \sqrt[4]{3},\ \frac{2+3\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

Mai mult, folosind construcţiile din teorema 4.1, putem construi efectiv punctele de pe axa Ox care au ca abscise aceste numere.

2) Vom construi acum, ca exemplu, punctul de pe axa Ox care are ca abscisă numărul $\sqrt[4]{3}$.

DE TERMINAT

4.4 Caracterizarea numerelor constructibile

4.4.1 Extinderi de corpuri

Ceea ce vom prezenta în acest paragraf este doar o trecere în revistă a noţiunilor şi rezultatelor de teoria extinderilor de corpuri care vor fi necesare în analiza ce urmează a constructibilităţii cu rigla şi compasul. Cititorul interesat poate găsi detalii şi demonstraţii detaliate în orice carte de teoria corpurilor. Reamintim că toate corpurile considerate de noi se presupune a fi comutative.

Definiţia 4.3. Fie K şi L două corpuri astfel încât K să fie un subcorp al lui L. Vom spune atunci despre corpul K că este *o extindere* a corpului K şi vom nota acest fapt cu $K \subset L$.

Evident, orice corp este o extindere a lui însuşi.

Dacă $a \in L$, vom nota cu $K(a)$ cel mai mic subcorp al lui L care conţine pe K şi pe a. Este uşor de constatat că acest corp există şi poate fi construit fie ca intersecţia tuturor subcorpurilor lui L care conţin a şi K fie (ceea ce este acelaşi lucru) ca fiind subcorpul lui L generate de a şi de K (mai precis, de a şi de *elementele* lui K). Mai general, dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$, vom nota cu $K(a_1, \dots, a_n)$ cel mai mic subcorp al lui L care conţine elementele lui K şi, în plus, elementele $a_1, \dots, a_n$ şi vom spune că acest corp a fost obţinut din corpul K prin *adjuncţionarea* elementelor $a_1, \dots, a_n$. Iată câteva exemple:

- $\mathbb{Q}(1) = \mathbb{Q}\left(-\frac{2}{3}\right) = \mathbb{Q}$;
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{\alpha + \beta\sqrt{2} \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\right\}$;
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \left\{\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} + \delta\sqrt{6} \,|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}\right\}$;
- $\mathbb{Q}(i) = \left\{\alpha + \beta i \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\right\}$;

- $\mathbb{R}(i) = \{\alpha + \beta i \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$.

În cazul în care $K \subset L$ este o extindere de corpuri, atunci corpul mai mare, L în cazul nostru, poate fi privit ca fiind un spaţiu vectorial peste corpul mai mic (K, în cazul nostru). Aici adunarea în spaţiul vectorial L este adunarea în L (ca şi corp, de data aceasta), în timp ce înmulţirea cu scalari este restricţia la $K \times L$ a înmulţirii interne în corpul L. Dimensiunea lui L, privit ca şi corp peste K, joacă un rol foarte important în teoria extinderilor de corpuri, de aceea merită o poziţie şi o notaţie specială.

Definiţia 4.4. Fie $K \subset L$ o extindere de corpuri. Dimensiunea lui L, ca spaţiu vectorial peste K, se numeşte *gradul extinderii* şi se notează cu $[L : K]$.

Exemple. 1. Este clar că orice extindere trivială are gradul 1. Într-adevăr, dacă îl privim pe L ca şi corp peste L, în spiritul definiţie precedente, atunci mulţimea $\{1\}$ este, în mod evident, o bază a acestui spaţiu vectorial, deci $[L : L] = 1$. Astfel, de exemplu, dacă punem $K = \mathbb{Q}$ şi $L = \mathbb{Q}(2)(= \mathbb{Q})$, atunci $[L : K] \equiv [\mathbb{Q}(2) : \mathbb{Q}] = 1$.

2. $\{1, \sqrt{2}\}$ formează o bază a lui $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ peste $\mathbb{Q}$, deci $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$.

3. $\{1, \sqrt{3}\}$ formează o bază a lui $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ peste $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, deci

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2.$$

Observaţia 7. Se poate demonstra uşor că dacă K, L, M sunt trei corpuri astfel încât $K \subset L \subset M$, atunci între grade există relaţia

$$[M : K] = [M : L] \times [L : K].$$

Astfel, de exemplu,

$$\left[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}\right] = \left[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})\right] \times \left[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}\right] = 2 \times 2 = 4.$$

Definiţia 4.5. Fie $K \subset L$ o extindere de corpuri. Dacă $a \in L$, atunci a se numeşte *algebric* peste K dacă există un polinom nenul $P \in K[X]$ astfel încât să avem $P(a) = 0$. Un element care nu este algebric peste K se numeşte *transcendent* peste K.

Este clar că toate elementele corpului K sunt algebrice peste K.

Elemente algebrice peste $\mathbb{Q}$ (adică *numere algebrice*) se pot construi cu uşurinţă. Ele sunt rădăcini ale polinoamelor cu coeficienţi întregi. De exemplu, $\sqrt{2}$ este o rădăcină a polinomului $X^2 - 2$, în timp ce i este o rădăcină a polinomului $X^2 + 1$.

Construirea unor numere transcendente (elemente transcendente peste $\mathbb{Q}$) este mai dificilă. De fapt primele exemple au fost date abia la sfârşitul secolului al XIX-lea. Astfel, în anul 1873 matematicianul francez Ch. Hermite a demonstrat că numărul e (baza logaritmilor naturali) este transcendente, iar în 1882, F. Lindemann a demonstrat că numărul π este transcendent.

Observaţia 8. Fie $K \subset L$ o extindere de corpuri şi $a \in L$ un element algebric peste K. Atunci există un polinom unic $P \in K[X]$ astfel încât:

- $P(a) = 0$;
- P este ireductibil în $K[X]$;
- P este unitar (coeficientul termenului de grad maxim este egal cu 1).

Acest polinom se numeşte *polinomul minimal al lui a peste* K.

Dacă a este un element algebric peste K, iar n este gradul polinomului său minimal, atunci vom spune că a este *algebric de grad n peste* K. Atunci avem $\big[K(a) : K\big] = n$, iar o bază a K-spaţiului vectorial $K(a)$ este formată din

$$\left\{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\right\}.$$

De exemplu, $\sqrt{2}$ este algebric de gradul 2 peste $\mathbb{Q}$, polinomul său minimal peste $\mathbb{Q}$ este $X^2 - 2$, iar o bază a lui $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este $\{1, \sqrt{2}\}$.

Dacă $K \subset L$ este o extindere de corpuri, mulţimea elementelor algebrice peste K ale lui L formează, după cum se poate constata cu uşurinţă, un subcorp al lui L care conţine K. Vom nota cu $\mathcal{A}$ corpul numerelor reale algebrice peste $\mathbb{Q}$. Se ştie despre acest corp că este numărabil.

4.5 Teorema (sau rezultatul) lui Wantzel

În anul 1837, matematicianul francez P.L. Wantzel a dat o caracterizare a numerelor reale constructibile. Mai precis, el a indicat o condiţie *necesară*, dar, după cum vom vedea, nu şi suficientă pentru ca un număr real să fie constructibil cu rigla şi compasul.

Pentru a putea expune rezultatul lui Wantzel, plecăm, din nou, de la punctele de bază O şi I, pe baza cărora vom construi reperul ortonormat (O, I, J). Dacă M este un punct din planul euclidian raportat la acest reper, punct care are coordonatele x şi y, atunci acest punct va fi notat cu $M(x, y)$.

Începem prin a demonstra următoarea lemă:

Lema 4.1. *1. Dacă D este o dreaptă din planul euclidian Π care trece prin punctele distincte $A(a_1, a_2)$ şi $B(b_1, b_2)$, atunci D are o ecuaţie de forma*

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}(a_1, a_2, b_1, b_2)$.

2. *Fie $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ şi $C(c_1, c_2)$ trei puncte necoliniare din planul euclidian Π. Atunci cercul de centru A şi de rază BC are o ecuaţie de forma*

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

cu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$.

Demonstraţie. 1) Dacă $a_1 = b_1$, atunci ecuaţia dreptei D este

$$x - a_1 = 0,$$

care, în mod evident, este de forma cerută. Dacă $a_1 \neq b_1$, atunci ecuaţia dreptei se poate scrie sub forma

$$y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1),$$

ecuaţie care este, de asemenea, de forma cerută.

2) Cercul de centru A şi de rază BC are ecuaţia

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = (c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2,$$

care se poate rescrie sub forma

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

cu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$. □

Teorema 4.2. *Fie $t \in \mathbb{R}$. t este un număr constructibil dacă şi numai dacă există un întreg $p \geq 1$ şi un şir de subcorpuri ale lui $\mathbb{R}$, $L_1, L_2, \ldots, L_p$ astfel încât:*

- $L_1 = \mathbb{Q}$;
- *pentru* $1 \leq j \leq p - 1$, $L_j \subset L_{j+1}$ *şi* $\left[L_{j+1} : L_j\right] = 2$;
- $t \in L_p$.

Demonstraţie. Dacă t este constructibil, atunci t este abscisa unui punct M al axei Ox. Fie $M_1, M_2, \ldots, M_n = M$ şirul de puncte succesive construite pentru obţinerea lui M. Se poate presupune că M_1 şi M_2 sunt punctele de bază O şi I.

Pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ vom nota cu x_i şi y_i coordonatele punctului M_i în reperul (O, I, J). Avem, în particular: $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_2 = 0$, $x_n = t$, $y_n = 0$. Punem:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \mathbb{Q}(x_1, y_1),\\
K_2 &= \mathbb{Q}(x_1, y_1, x_2, y_2),\\
&\cdots\\
K_i &= \mathbb{Q}(x_1, y_1, \ldots, x_i, y_i),\\
&\cdots\\
K_n &= \mathbb{Q}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n).
\end{aligned}$$

Avem:

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_i \subset K_{i+1} \subset \cdots \subset K_n, t = x_n \in K_n.$$

Vom demonstra că pentru $i = 1, 2, \ldots, n-1$, avem $K_{i+1} = K_i$ sau $[K_{i+1} : K_i] = 2$.

Rezultatul este evident pentru $i = 1$, deoarece $K_1 = K_2 = \mathbb{Q}$. Să presupunem, deci, că $i \geq 2$. Avem de examinat trei cazuri, după cum punctul M_{i+1} este intersecţia dintre două drepte, dintre o dreaptă şi un cerc sau dintre două cercuri definite prin punctele precedente, $M_1, M_2, \ldots, M_i$. Dar, potrivit lemei 4.1, aceste drepte şi cercuri au coeficienţi în $K_i = \mathbb{Q}(x_1, y_1, \ldots, x_i, y_i)$. Prin urmare,

1) Dacă M_{i+1} este la intersecţia a două drepte, atunci coordonatele sale, x_{i+1} şi y_{i+1} sunt soluţii ale unui sistem de forma

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0, \end{cases}$$

cu $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in K_i$. Rezolvând acest sistem de gradul întâi se constată că x_{i+1} şi y_{i+1} sunt, de asemenea, în K_i, de unde rezultă că avem

$$K_{i+1} = K_i(x_{i+1}, y_{i+1}) \equiv K_i.$$

2) Dacă M_{i+1} se află la intersecţia dintre o dreaptă şi un cerc, atunci atunci coordonatele sale, x_{i+1} şi y_{i+1} sunt soluţii ale unui sistem de forma

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \\ x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0, \end{cases}$$

cu $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in K_i$. Avem mai multe situaţii posibile:

- Dacă $\beta \neq 0$, atunci avem

$$y = -\frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma).$$

Înlocuim în cea de-a doua ecuaţie pentru a obţine ecuaţia pentru abscise. Această ecuaţie este de gradul al doilea cu coeficienţi în K_i, iar x_{i+1} este o rădăcină a acestei ecuaţii.

  - Dacă $x_{i+1} \in K_i$, atunci

$$y = -\frac{1}{\beta}(\alpha x_{i+1} + \gamma) \in K_i,$$

iar $K_{i+1} = K_i$.

– Dacă $x_{i+1} \notin K_i$, atunci x_{i+1} este algebric de gradul 2 peste K_i şi avem:

$$K_{i+1} = K_i(x_{i+1}, y_{i+1}) = K_i(x_{i+1})$$

şi $\left[K_{i+1} : K_i\right] = 2$.

- Dacă $\beta = 0$, atunci $\alpha \neq 0$ şi se poate proceda la fel ca mai sus, formând ecuaţia de gradul al doilea pentru ordonate.

3) Dacă M_{i+1} este la intersecţia dintre două cercuri, atunci coordonatele sale, x_{i+1} şi y_{i+1}, sunt soluţii ale unui sistem de forma

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0, \\ x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0, \end{cases}$$

cu $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in K_i$. Acest sistem este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0, \\ 2(\alpha - \alpha')x + 2(\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma') = 0, \end{cases}$$

deci problema se reduce la cazul precedent.

Am construit, astfel, un şir de subcorpuri ale lui $\mathbb{R}$:

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n$$

astfel încât $K_1 = \mathbb{Q}$, $t \in K_n$ şi pentru $1 \leq i \leq n-1$, să avem fie $K_{i+1} = K_i$, fie $\left[K_{i+1} : K_i\right] = 2$. Putem face în aşa fel încât acest şir să fie strict crescător, eliminând corpurile superflue. Se obţine atunci un şir

$$L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_p$$

astfel încât $L_1 = \mathbb{Q}$, $t \in L_p$ şi pentru $1 \leq i \leq p-1$, să avem $\left[L_{i+1} : L_i\right] = 2$.

Invers, să presupunem acum că

$$L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_p$$

este un şir de subcorpuri ale lui $\mathbb{R}$ care îndeplineşte condiţiile din enunţul teoremei. Vom demonstra, prin recurenţă după j, cu $1 \leq j \leq p$, că $L_j \subset \mathcal{C}$. Va rezulta atunci că t este un număr constructibil.

- $L_1 \subset \mathcal{C}$, deoarece $L_1 = \mathbb{Q}$ şi se ştie că $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}$.

- Presupunem că $L_j \subset \mathcal{C}$ şi vom demonstra că $L_{j+1} \subset \mathcal{C}$. Fie $a \in L_{j+1}$. Să demonstrăm că $a \in \mathcal{C}$. Familia $\left\{1, a, a^2\right\}$ este liniar dependentă peste L_j, deoarece $\left[L_{j+1} : L_j\right] = 2$. Prin urmare, există $\alpha, \beta, \gamma \in L_j$, nu toate nule, astfel încât

$$\alpha a^2 + \beta a + \gamma = 0.$$

Sunt posibile două situaţii:

- dacă $\alpha = 0$, atunci $a = -\frac{\gamma}{\beta} \in L_j \subset \mathcal{C}$;
- dacă $\alpha \neq 0$, atunci
$$a = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$
şi $a \in \mathbb{C}$, deoarece corpul $\mathbb{C}$, după cum am văzut, este stabil faţă de rădăcina pătrată.

□

Teorema de mai sus are o consecinţă remarcabilă, care este tocmai rezultatul demonstrat de către Wantzel.

Consecinţa 1 (Rezultatul lui Wantzel)**.** *Orice număr real constructibil este algebric peste $\mathbb{Q}$, iar gradul său este o putere a lui 2.*

Demonstraţie. Dacă $t \in \mathbb{R}$ este constructibil, atunci din teorema 4.2 rezultă că există un întreg $p \geq 1$ şi un şir de subcorpuri ale lui $\mathbb{R}$, $L_1, L_2, \ldots, L_p$ astfel încât:

- $L_1 = \mathbb{Q}$;
- pentru $1 \leq j \leq p-1$, $L_j \subset L_{j+1}$ şi $\left[L_{j+1} : L_j\right] = 2$;
- $t \in L_p$.

Pe de altă parte, utilizând o proprietate a extinderilor de corpuri pe care am mai menţionat-o mai sus, avem:
$$\left[L_p : \mathbb{Q}\right] = \left[L_p : L_{p-1}\right] \times \left[L_{p-1} : L_{p-2}\right] \times \cdots \times \left[L_2 : \mathbb{Q}\right] = 2^{p-1}.$$
Pe de altă parte, avem $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(t) \subset L_p$, de unde rezultă că
$$2^{p-1} = \left[L_p : \mathbb{Q}\right] = \left[L_p : \mathbb{Q}(t)\right] \times \left[\mathbb{Q}(t) : \mathbb{Q}\right].$$
Aşadar, $\left[\mathbb{Q}(t) : \mathbb{Q}\right]$ este un divizor al lui 2^{p-1}, adică este tot o putere a lui 2, pe care o vom nota cu 2^q. Considerăm familia $\left\{1, t, t^2, \ldots, t^{2^q}\right\}$. Această familie are $2^q + 1$ elemente, deci este liniar dependentă în $\mathbb{Q}$-spaţiul vectorial $\mathbb{Q}(t)$. Prin urmare, există numerele raţionale $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{2^q}$, nu toate nule, astfel încât
$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{2^q} t^{2^q} = 0.$$
Ptin urmare, t este algebric peste $\mathbb{Q}$, iar gradul lui t peste Q este $\left[\mathbb{Q}(t) : \mathbb{Q}\right] = 2^q$. □

Exemple. Rezultatul lui Wantzel este deosebit de util pentru a demonstra că un număr real *nu* este constructibil. Iată două exemple utile în cele ce urmează:

1) Unul dintre numerele ce joacă un rol esenţial în matematică este π. Noi vom demonstra în Anexa A că π nu este algebric peste $\mathbb{Q}$, deci el nu are cum să fie constructibil.

2) Să considerăm polinomul $X^3 - 2$, care este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ (în caz contrar, polinomul ar trebui să aibă un factor de gradul întâi pe peste $\mathbb{Q}$, ceea ce înseamnă că el ar trebui să aibă o rădăcină raţională, ceea ce, în mod evident, nu este cazul). Prin urmare, polinomul $X^3 - 2$ este polinomul minimal peste $\mathbb{Q}$ al numărului real $\sqrt[3]{2}$. Aceasta înseamnă că $\sqrt[3]{2}$ este algebric de gradul 3 peste $\mathbb{Q}$. Din rezultatul lui Wantzel rezultă, atunci, că $\sqrt[3]{2}$ nu este un număr constructibil.

Observaţia 9. Am notat cu $\mathcal{A}$ corpul numerelor reale algebrice peste $\mathbb{Q}$. Atunci avem

$$\mathbb{Q} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{R}.$$

Mai mult, folosind numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ şi π, constatăm că toate incluziunile sunt stricte. În fine, întrucât corpul numerelor algebrice este numărabil, acelaşi lucru este valabil şi pentru corpul numerelor constructibile.

4.6 Aplicaţii ale rezultatului lui Wantzel

4.6.1 Cuadratura cercului

Reamintim că această problemă constă în construirea, cu rigla şi compasul, a unui pătrat de aceeaşi arie cu cea a unui cerc dat. A da un cerc este echivalent cu a indica centrul său, fie el O şi un punct al cercului, fie el I. Prin urmare, construcţia cerută este o construcţie cu rigla şi compasul plecând de la punctele de bază O şi I. Dacă raportăm planul la reperul (O, I, J) introdus mai devreme, atunci segmentul OI este de lungime 1, iar aria cercului dat este egală cu π.

În cazul în care cuadratura cercului ar fi posibilă, am putea construi cu rigla şi compasul un segment de lungime $\sqrt{\pi}$ (latura pătratului căutat). Or, noi ştim că numărul $\sqrt{\pi}$ este transcendent (dacă ar fi algebric, atunci şi pătratul său, adică π, ar fi algebric, ori noi demonstrăm în anexa A că este transcendent).

Prin urmare, problema cuadraturii cercului este imposibil de rezolvat cu rigla şi compasul.

4.6.2 Dublarea cubului

Reamintim că această problemă constă în construirea cu rigla şi compasul a laturii unui cub al cărui volum să fie egal cu volumul unui cub dat.

Faptul că un cub este dat este echivalent, din punctul nostru de vedere, că este dată una dintre laturile sale, fie ea OI. Ca şi în cazul cuadraturii cercului, raportăm planul la reperul ortonormat (O, I, J). Asta înseamnă că latura cubului dat este de lungime 1.

De aici rezultă că volumul cubului dat este egal cu 1, în timp ce volumul cubului căutat trebuie să fie egal cu 2. Dacă dublarea cubului ar fi posibilă, am putea construi cu rigla şi compasul latura cubului cerut, adică am putea construi cu rigla şi compasul numărul real $\sqrt[3]{2}$. Dar, rezultatul lui Wantzel implică, după cum am remarcat deja la sfârşitul secţiunii precedente, rezultă că $\sqrt[3]{2}$ nu este un număr constructibil, deci dublarea cubului nu se poate efectua cu rigla şi compasul.

4.6.3 Trisecţiunea unghiului

Această problemă constă în construirea, cu rigla şi compasul, a semidreptelor care împart un unghi *oarecare* în trei unghiuri egale. Evident, este suficient să construim una dintre semidrepte, deoarece construirea celei de-a doua se reduce, atunci, la construirea bisectoarei unui unghi.

Înainte de a ademonstra că problema este imposibilă, o traducem într-un limbaj mai comod, folosind noţiunea de *unghi trisectabil.*

Unghiurile la care se referă problema sunt unghiuri neorientate, care se pot identifica cu măsura lor în radiani şi putem presupune că sunt cuprinse în intervalul $[0, \pi]$. Mai precis, $\widehat{ABC} = \theta$ înseamnă că θ este singurul număr real din intervalul $[0, \pi]$ pentru care

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\| \overrightarrow{BA} \| \cdot \| \overrightarrow{BC} \|}$$

Punctele de bază O şi I fiind date, putem întotdeauna să considerăm că unghiurile sunt toate reprezentate prin semidrepte cu originea în O, iar una dintre ele este semidreapta OI. Notăm cu Γ cercul cu centrul în O şi care trece prin I şi cu Γ_1 semicercul închis al acestui cerc care este situat deasupra dreptei OI.

Dacă $\theta \in [0, \pi]$, vom spune că *unghiul θ este constructibil* dacă punctul M al semicercului Γ_1 pentru care $\measuredangle IOM = \theta$ este constructibil. Aceasta condiţie este, în mod evident, echivalentă cu condiţia ca numărul $\cos\theta$ să fie constructibil, deoarece $\cos\theta$ este abscisa lui M relativ la reperul ortonormat (O, I, J). De exemplu, unghiurile $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ sunt constructibile, deoarece cosinusurile acestor unghiuri, egale, respectiv, cu $0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ sunt numere reale constructibile. Dimpotrivă, unghiul θ al cărui cosinues este egal cu $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ nu este constructibil, din moment ce cosinusul însuşi nu este constructibil.

Find dat un unghi $\theta = \measuredangle IOM$, unde M este un punct de pe semicercul Γ_1, vom spune că θ este *trisectabil* dacă punctul N de pe semicercul Γ_1 pentru care

$$\measuredangle ION = \frac{\theta}{3}$$

este un punct constructibil plecând de la punctele de bază O, I, M.

Problema trisecţiunii unghiului se referă, prin urmare, la construcţii care pleacă de la trei puncte de bază, nu doar de la două, ca în czul cuadraturii cercului sau al dublării cubului. Pe de altă parte, dacă unghiul $\measuredangle IOM = \theta$ este constructibil, atunci punctul M este constructibil plecând de la punctele de bază O şi I, prin urmare construcţiile ce se obţin plecând de la punctele O, I, M sunt exact acelea care se obţin plecând de la punctele O, I. Astfel, a spune că unghiul θ este trisectabil este totuna cu a spune că unghiul $\frac{\theta}{3}$ este constructibil sau, ceea ce este acelaşi lucru, că numărul real $\cos\frac{\theta}{3}$ este constructibil. Astfel, unghiurile π şi $\frac{\pi}{3}$ sunt constructibile, deoarece $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ şi $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sunt numere reale constructibile.

Ceea ce dorim să demonstrăm este imposibilitatea trisecţiunii pentru un unghi oarecare. Va fi, deci, suficient să demonstrăm, de exemplu, că unghiul $\frac{\pi}{3}$ nu este trisectabil. Cum unghiul $\frac{\pi}{3}$ este constructibil, aceasta revine la a demonstra că $\cos\frac{\pi}{9}$ nu este un număr real constructibil.

Avem

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

prin urmare, $\cos\frac{\pi}{9}$ este o rădăcină a polinomului

$$P(X) = 4X^3 - 3X - \frac{1}{2}.$$

Vom demonstra că acest polinom este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$. Dacă s-ar descompune în $\mathbb{Q}[X]$, unul dintre factori ar fi de gradul întâi, iar polinomul ar avea o rădăcină raţională, dar ne putem convinge cu uşurinţă că P nu are rădăcini raţionale.

Astfel, $P(X)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$, prin urmare, polinomul minimal al lui $\cos\frac{\pi}{9}$ este

$$\frac{1}{4}P(X)$$

şi este de gradul 3. Prin urmare, $\cos\frac{\pi}{9}$ nu este constructibil, conform rezultatului lui Wantzel, ceea ce înseamnă că unghiul $\frac{\pi}{3}$ nu este trisectabil, ceea ce confirmă aşteptările noastre, adică faptul că nu orice unghi este trisectabil.

CAPITOLUL 5

Poligoane regulate

5.1 Poligoane regulate constructibile

În acest capitol, vom lucra cu *unghiuri orientate*, cu alte cuvine, vom face distincţie, de exemplu, între un unghi $\widehat{ABC}$ şi unghiul $\widehat{CBA}$, măsura celui de-al doilea fiind considerată egală cu opusa măsurii primeia.

Dacă $\theta \in \mathbb{R}$, vom nota cu $\widehat{\theta}$ unghiul orientat a cărui măsură în radiani este egală cu θ. Celelalte măsuri ale unghiului sunt $\theta + 2k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$. $\widehat{\theta}$ posedă o unică măsură în radiani $\alpha \in (-\pi, \pi]$, care se numeşte *determinare principală* a unghiului dat.

Unghiul $\widehat{\theta}$ se numeşte *constructibil* dacă punctul M de pe cercul Γ (cu centrul în O şi care trece prin I) pentru care

$$\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})} = \widehat{\theta}$$

este un punct constructibil. A spune că $\widehat{\theta}$ este constructibil este echivalent cu a spune că numărul $\cos\theta$ este constructibil. Într-adevăr, dacă avem $\overline{OH} = \cos\theta$, atunci perpendiculara pe dreapta OI care trece prin H intersectează cercul Γ în două puncte, M şi M'. Alegem punctul care corespunde lui $\widehat{\theta}$, ţinând cont de determinarea principală a unghiului.

Dacă $n \geq 3$, vom spune că un poligon regulat cu n laturi este *constructibil* dacă unghiul de măsură $2\pi/n$ este constructibil, adică dacă numărul real $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ este constructibil.

5.2 Teorema lui Gauss

Scopul acestei secţiuni este să prezentăm o caracterizare a poligoanelor regulate care sunt constructibile cu rigla şi compasul. Începem cu o lemă:

Lema 5.1. *Dacă m şi n sunt numere naturale prime între ele, atunci unghiul* $\widehat{\frac{2\pi}{mn}}$ *este constructibil dacă şi numai dacă sunt constructibile unghiurile* $\widehat{\frac{2\pi}{n}}$ *şi* $\widehat{\frac{2\pi}{m}}$.

Demonstraţie. ($\Longrightarrow$)Dacă $\widehat{\frac{2\pi}{mn}}$ este constructibil, atunci şi $\widehat{\frac{2\pi}{n}}$ şi $\widehat{\frac{2\pi}{m}}$ sunt constructibile, deoarece

$$\widehat{\frac{2\pi}{n}} = m\widehat{\frac{2\pi}{mn}},$$

iar

$$\widehat{\frac{2\pi}{m}} = n\widehat{\frac{2\pi}{mn}}$$

şi noi ştim cum să construim un multiplu întreg al unui unghi, purtând cu compasul de un anumit număr de ori coarda determinată de acest unghi în cercul de centru O şi care trece prin I [1].

($\Longleftarrow$) Dacă unghiurile $\widehat{\frac{2\pi}{n}}$ şi $\widehat{\frac{2\pi}{m}}$ sunt constructibile, atunci şi unghiul $\widehat{\frac{2\pi}{mn}}$ este constructibil, căci, conform relaţiei lui Bezout, există $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, cu

$$\lambda n + \mu m = 1,$$

de unde

$$\widehat{\frac{2\pi}{mn}} = \lambda\widehat{\frac{2\pi}{n}} + \mu\widehat{\frac{2\pi}{m}}.$$

Prin urmare, este suficient să ştim să construim suma a două unghiuri constructibile. Dar asta este foarte simplu, este suficient să aşezăm cele două unghiuri cu vârful în acelaşi punct, astfel încât ele să aibă o latură comună. □

Lema 5.2. *Dacă $n \geq 3$ are descompunerea în factori primi*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

atunci poligonul regulat cu n laturi este constructibil dacă şi numai dacă sunt constructibile unghiurile

$$\widehat{\frac{2\pi}{p_1^{\alpha_1}}}, \dots \widehat{\frac{2\pi}{p_k^{\alpha_k}}}.$$

[1] Este de remarcat că în demonstrarea acestei implicaţii nu se foloseşte faptul că numerele m şi n sunt prime între ele.

Demonstraţie. Lema rezultă imediat din lema 5.1, prin inducţie după k. □

Lema 5.2 ne permite caracterizarea unghiurilor constructibile de forma $\dfrac{\widehat{2\pi}}{p^{\alpha}}$, unde p este un număr prim, iar α este un număr natural nenul.

Teorema 5.1. *1) Unghiurile de forma* $\dfrac{\widehat{2\pi}}{2^{\alpha}}$ *sunt constructibile.*

2) Dacă p este un număr prim mai mare sau egal cu 3, atunci $\dfrac{\widehat{2\pi}}{p^{\alpha}}$ *este constructibil dacă şi numai dacă $\alpha = 1$, iar p este un număr Fermat, adică este de forma $1 + 2^{2^{\beta}}$, unde β este un număr natural.*

Demonstraţie. 1) Este imediat că unghiurile de forma $\dfrac{\widehat{2\pi}}{2^{\alpha}}$ sunt constructibile. Este suficient să ştim să construim bisectoarea unui unghi, apoi folosim inducţia după α.

2) Fie $p \geq 3$ un număr prim.

($\Longrightarrow$) Să presupunem că unghiul $\dfrac{\widehat{2\pi}}{p^{\alpha}}$ este constructibil, cu $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\cos\dfrac{2\pi}{p^{\alpha}}$ este un număr constructibil şi atunci, din rezultatul lui Wantzel, obţinem că:

$$\left[\mathbb{Q}\left(\cos\frac{2\pi}{p^{\alpha}}\right) : \mathbb{Q}\right] = 2^m, \tag{5.1}$$

pentru un anumit număr natural m.

Pentru a simplifica scrierea, vom pune $q = p^{\alpha}$ şi fie

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{q} + i\sin\frac{2\pi}{q}.$$

ω este o rădăcină de ordinul q a unităţii, rădăcină a polinomului $X^q - 1$, deci ω este algebric peste $\mathbb{Q}$. Admitem că polinomul minimal al lui ω peste $\mathbb{Q}$ este

$$P(X) = (X - \omega_1)(X - \omega_2)\cdots(X - \omega_h),$$

unde $\omega_1, \ldots, \omega_h$ sunt rădăcinile primitive de ordinul q ale unităţii, adică aceste rădăcini sunt de forma

$$\cos\frac{2k\pi}{q} + i\sin\frac{2k\pi}{q},$$

unde k este un număr întreg prim cu q, $1 \leq k \leq q$. Vom spune că $P(X)$ este *polinomul ciclotomic* de ordinul q.

Pentru a determina gradul h al lui $P(X)$ este suficient să cunoaştem numărul întregilor k, $1 \leq k \leq q$, astfel încât k să fie prim cu $q = p^{\alpha}$. Se obţine $h = p^{\alpha-1}(p-1)$, prin urmare

$$\left[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}\right] = p^{\alpha-1}(p-1). \tag{5.2}$$

Pe de altă parte, avem

$$\omega + \omega^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{p^\alpha},$$

de unde rezultă că

$$\cos\frac{2\pi}{p^\alpha} \in \mathbb{Q}(\omega) \quad \text{şi că} \quad \omega^2 - 2\omega\cos\frac{2\pi}{p^\alpha} + 1 = 0.$$

Astfel, ω este algebric de gradul 2 peste $\mathbb{Q}\left(\cos\dfrac{2\pi}{p^\alpha}\right)$, de unde rezultă că:

$$\left[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}\left(2\cos\frac{2\pi}{p^\alpha}\right)\right] = 2. \tag{5.3}$$

Plecând de la relaţiile (5.1), (5.2) şi (5.3) şi ştiind că

$$[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = \left[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}\left(2\cos\frac{2\pi}{p^\alpha}\right)\right] \times \left[\mathbb{Q}\left(2\cos\frac{2\pi}{p^\alpha}\right) : \mathbb{Q}\right],$$

se obţine

$$p^{\alpha-1}(p-1) = 2^{m+1}.$$

Cum p este un număr prim diferit de 2, rezultă că $\alpha = 1$ şi că $p = 1 + 2^{m+1}$.

Vom demonstra acum că $m + 1$ este o putere a lui. Plecând de la descompunerea lui $m + 1$ în factori primi, se obţine că

$$m + 1 = \lambda \cdot 2^\beta,$$

cu $\beta \in \mathbb{N}$ şi $\lambda \in \mathbb{N}^*$ – un număr impar. Prin urmare,

$$p = 1 + 2^{m+1} = 1 + 2^{\lambda\cdot 2^\beta} = 1 + \left(2^{2^\beta}\right)^\lambda.$$

λ fiind un număr impar, polinomul $1 + X^\lambda$ este divizibil cu $1 + X$. Rezultă că p este divizibil cu $1 + 2^{2^\beta}$. Cum p este un număr prim, rezultă că $p = 1 + 2^{2^\beta}$. □

Teorema 5.2 (Gauss)**.** *Poligoanele regulate constructibile cu rigla şi compasul sunt cele pentru care numărul n de laturi este fie de forma 2^α, cu $\alpha \geq 2$, fie de forma $2^\alpha p_1 p_2 \cdots p_r$, cu $\alpha \in \mathbb{N}$, unde p_i sunt numere prime distincte care sunt, în acelaşi timp, numere Fermat.*

Demonstraţie. Demonstraţia rezultă imediat din lema 5.2 şi teorema 5.3. □

5.3 Construcţii de poligoane regulate

5.3.1 Triunghiul echilateral, pătratul, pentagonul regulat

Construcţia *triunghiului echilateral* este foarte simplă, din moment ce ştim că avem

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Construcţia *pătratului* este trivială, folosind punctele I şi J.

Construcţia *pentagonului regulat* este ceva mai complicată, deşi ea este cunoscută încă din antichitate, fiind prezentă în *Elementele* lui Euclid. O vom prezenta în cele ce urmează. În fapt, este suficient să exprimăm $\cos\frac{2\pi}{5}$ într-o formă care să permită construirea, efectivă, a punctului de pe axa Ox de abscisă $\cos\frac{2\pi}{5}$.

$$\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$

este o rădăcină a polinomului

$$X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1).$$

Avem, prin urmare,

$$\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0. \tag{5.4}$$

ω^4 este conjugatul lui ω, iar ω^3 este conjugatul lui ω^2, deci avem

$$\omega + \omega^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5} \quad \text{şi} \quad \omega^2 + \omega^3 = \cos\frac{4\pi}{5}.$$

Din (5.4) rezultă atunci:

$$2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} + 1 = 0. \tag{5.5}$$

Considerăm produsul

$$\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{4\pi}{5},$$

egal cu

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}\right).$$

Dacă notăm cu p, respectiv s, produsul şi suma numerelor $\cos\frac{2\pi}{5}$ şi $\cos\frac{4\pi}{5}$, obţinem, ţinând cont de (5.5),

$$s = -\frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad p = -\frac{1}{4}.$$

Astfel, $\cos\frac{2\pi}{5}$ şi $\cos\frac{4\pi}{5}$ sunt rădăcinile ecuaţiei

$$X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}=0.$$

Remarcând faptul că

$$\cos\frac{4\pi}{5}<0<\cos\frac{2\pi}{5},$$

avem

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\frac{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}{2}.$$

Fie A mijlocul segmentului OI'. Avem, prin urmare,

$$AJ=\sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Folosind cercul de centru A şi de rază AJ, construim punctul B pe Ox astfel încât $\overline{AB}=AJ$. Avem, atunci,

$$\overline{OB}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Dacă C este mijlocul lui OB, atunci avem

$$\overline{OC}=\cos\frac{2\pi}{5}.$$

Perpendiculara în C pe Ox permite obţinerea vârfului M_1. Cu ajutorul compasului, cu o deschidere egală cu coarda IM_1, construim celelalte patru vârfuri, M_2, M_3, M_4.

Observaţia 10. Graţie posibilităţii construirii bisectoarei unui ungh, putem dubla, tot timpul, numărul de laturi al unui poligon regulat constructibil. Astfel, plecând de la un triunghi echilateral, obţinem poligoane regulate cu 6, 12, 24, ... de laturi, iar plecând de la pătrat, se pot construi poligoane regulate cu 8, 16, 32, ... de laturi. De asemenea, plecând de la un pentagon regulat, se pot construi poligoane regulate cu 10, 20, 40, ... de laturi.

5.3.2 Poligonul cu 15 laturi

Deoarece 3 şi 5 sunt numere prime Fermat, rezultă câ poligonul regulat cu 15 laturi se poate construi cu rigla şi compasul.

Ideea construcţiei este să plecăm de la o relaţie Bezout între numerele 3 şi 5 şi, apoi, să exprimăm, folosind această relaţie, unghiul $\widehat{\frac{2\pi}{15}}$ în funcţie de unghiurile $\widehat{\frac{2\pi}{3}}$ şi $\widehat{\frac{2\pi}{5}}$.

Avem $2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = 1$ (relaţia Bezout pomenită mai sus), de unde

$$2\widehat{\frac{2\pi}{5}} - \widehat{\frac{2\pi}{3}} = \widehat{\frac{2\pi}{15}}.$$

Utilizând construcţiile pentru triunghiul echilateral şi pentagonul regulat, se pot construi pe cercul Γ punctele M şi N astfel încît

$$\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})} = 2\widehat{\frac{2\pi}{5}} \quad \text{şi} \quad \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON})} = \widehat{\frac{2\pi}{3}}.$$

Avem atunci

$$\widehat{(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})} = \widehat{\frac{2\pi}{15}}$$

şi, folosind compasul cu o deschidere egală cu coarda MN, se construieşte punctul P astfel încât

$$\widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP})} = \widehat{\frac{2\pi}{15}}.$$

ANEXA A

Transcendenţa numărului π

Teorema A.1 (Lindemann, 1882)**.** *Numărul real π este transcendent peste $\mathbb{Q}$.*

Demonstraţie. Presupunem că π ar fi algebric şi găsim o contradicţie. Deoarece şi i este algebric, iar numerele algebrice complexe formează un corp, rezultă că şi numărul πi este, de asemenea, algebric. Prin urmare, există o ecuaţie algebrică cu coeficienţi întregi

$$P_1(x) = 0, \tag{A.1}$$

ale cărei rădăcini sunt $\pi i = r_1, r_2, \ldots, r_n$. Cum

$$e^{r_1} \equiv e^{\pi i} = -1,$$

(relaţia lui Euler), obţinem

$$(e^{r_1} + 1)(e^{r_2} + 1) \cdots (e^{r_n} + 1) = 0. \tag{A.2}$$

Vom construi acum o ecuaţie algebrică cu coeficienţi întregi ale cărei rădăcini sunt exponenţii din dezvoltarea membrului stâng al ecuaţiei (A.2). Considerăm, mai întâi, exponenţii

$$r_1 + r_2, r_1 + r_3, \ldots, r_{n-1} + r_n. \tag{A.3}$$

Din ecuaţia (A.1) rezultă că funcţiile simetrice elementare de $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sunt numere raţionale (tot ce se utilizează sunt formulele lui Viète). Prin urmare, funcţiile simetrice elementare de cantităţile (A.3) sunt, de asemenea, numere raţionale, aşadar aceste cantităţi sunt rădăcinile unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi întregi

$$P_2(x) = 0. \tag{A.4}$$

În mod similar, sumele de câte trei r_i sunt cele C_n^3 rădăcini ale unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi întregi

$$P_3(x) = 0. \tag{A.5}$$

Continuând procedeul, obţinem

$$P_4(x) = 0, P_5(x) = 0, \dots, P_n(x) = 0, \tag{A.6}$$

ecuaţii algebrice cu coeficienţi întregi, ale căror rădăcini sunt sumele de câte 4, 5, ..., n rădăcini r_i ale ecuaţiei (A.1). Ecuaţia produs

$$P_1(x)P_2(x)\cdots P_n(x) = 0 \tag{A.7}$$

are ca rădăcini exact exponenţii dezvoltării membrului stâng al ecuaţiei (A.2).

Eliminarea rădăcinilor nule (dacă există) din ecuaţia (A.7) ne conduce la o ecuaţie de forma

$$P(x) = ax^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{A.8}$$

ale cărei rădăcini $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sunt sunt exponenţii nenuli din dezvoltarea membrului stâng al ecuaţiei (A.2), iar coeficienţii sunt numere întregi. Prin urmare, relaţia (A.2) se poate scrie sub forma

$$e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \cdots + e^{\alpha_m} + k = 0, \tag{A.9}$$

unde k este un întreg (strict) pozitiv.

Introducem acum un polinom auxiliar,

$$f(x) = \frac{a^s x^{p-1}[P(x)]^p}{(p-1)!}, \tag{A.10}$$

unde $s = mp-1$, iar p este un număr prim a cărui valoare va fi precizată ulterior. Gradul lui f este

$$p - 1 + pm = pm - 1 + p = s + p.$$

Este de remarcat că polinomul $f(x)$ este un polinom cu coeficienţi complecşi, deci derivările pe care le vom face mai jos se referă la funcţii cu o variabilă complexă. Formal, însă, regulile sunt aceleaşi ca şi în cazul funcţiilor de o variabilă reală.

Definim, mai departe,

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f^{(2)}(x) + \cdots + f^{(s+p)}(x). \tag{A.11}$$

Deoarece $f^{(s+p+1)}(x) = 0$, remarcăm că derivata funcţiei $e{-}xF(x)$ este $e{-}xf(x)$, fapt de care vom avea nevoie în cele ce urmează. Într-adevăr, avem

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x}F(x)\right] = e^{-x}\left[f'(x) + f^{(2)}(x) + \cdots + f^{(s+p)}(x)\right] -$$
$$- e^{-x}\left[f(x) + f'(x) + f^{(2)}(x) + \cdots + f^{(s+p)}(x)\right] = e^{-x}f(x).$$

În cele ce urmează, x va fi privit ca fiind un număr complex arbitrar, dar fixat şi considerăm funcţia dată de

$$\phi(u) = e^{-xu}F(xu),$$

unde u este o variabilă *reală*. Prin urmare, ϕ este o funcţie cu valori complexe, de o variabilă reală. Derivarea şi integrarea acestor funcţii sunt definite aplicând aceste operaţii separat părţii reale şi părţii imaginare, ambele fiind funcţii reale de o variabilă reală. Este foarte uşor de verificat că teorema Leibniz-Newton se extinde la acest gen de funcţii, sub forma:

$$\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b \phi'(u)du.$$

Scopul nostru este să aplicăm această teoremă intervalului $[0, 1]$. În acest scop, trebuie să calculăm $\phi'(u)$. Folosind schimbarea de variabilă

$$z = ux,$$

putem scrie

$$\phi(u) = e^{-z}F(z).$$

Rezultă că

$$\phi'(u) = \frac{d}{dz}[e^{-z}F(z)] \cdot \frac{dz}{du} = -e^{-z}f(z) \cdot x = -xe^{-z}f(ux).$$

Aplicăm acum teorema Leibniz-Newton pe intervalul $[0, 1]$ şi obţinem

$$\begin{aligned}
\phi(1) - \phi(0) &= \int_0^1 \phi'(u)du, \\
e^{-x}F(x) - e^{-0}F(0) &= \int_0^1 -xe^{-ux}f(ux)du, \\
F(x) - e^{x}F(0) &= \int_0^1 -xe^{(1-u)x}f(ux)du
\end{aligned}$$

Lăsându-l pe x să ia, pe rând, valorile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ şi însumând rezultatele, obţinem

$$\sum_{j=1}^{m} F(\alpha_j) + kF(0) = -\sum_{j=1}^{m} \int_0^1 e^{(1-u)\alpha_j} f(u\alpha_j)du. \tag{A.12}$$

Planul nostru de a obţine o contradicţie cu ipoteza că π este un număr algebric este să alegem numărul prim p astfel încât membrul stâng al ecuaţiei (A.12) să fie un număr întreg nenul, iar membrul drept să fie un număr arbitrar de mic (în particular, subunitar).

Începem prin a demonstra că $\sum_{j=1}^{m} F(\alpha_j)$ *este un întreg, divizibil cu* p. Într-adevăr, utilizând definiţia lui F, obţinem

$$\sum_{j=1}^{m} F(\alpha_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=0}^{s+p} f^{(r)}(\alpha_j) = \sum_{r=0}^{s+p} \sum_{j=1}^{m} f^{(r)}(\alpha_j).$$

Pentru $0 \le r < p$,

$$\sum_{j=1}^{m} f^{(r)}(\alpha_j) = 0,$$

deoarece, prin definiţie lui f, $f^{(r)}(\alpha_j)$ are cel puţin un factor $P(\alpha_j)$, care este egal cu zero. Astfel,

$$\sum_{j=1}^{m} F(\alpha_j) = \sum_{r=p}^{s+p} \sum_{j=1}^{m} f^{(r)}(\alpha_j).$$

Fie acum r arbitrar, dar fixat, cu $p \le r \le s + p$. Întrucât $a^{-s}(p-1)!f(x)$ este o funcţie polinomială cu coeficienţi întregi, coeficientul fiecărui termen nenul al derivatei sale de ordinul r conţine un produs de r (deci, cel puţin p) întregi consecutivi. Prin urmare, coeficientul respectiv este divizivil cu $p!$. Astfel, fiecare coeficient al lui $f^{(r)}(x$ este divizibil cu $a^s p)$, aşadar expresia

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{pa^s} f^{(r)}(u_j)$$

este un polinom simetric cu coeficienţi întregi de variabilele $u_1, u_2, \ldots, u_m$, de aceea el poate fi exprimat ca un polinom cu coeficienţi întregi în funcţiile simetrice elementare. Înlocuim acum variabilele cu valorile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ şi ne reamintim că pentru fiecare funcţie simetrică elementară avem:

$$\sigma_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = (-1)^i \frac{a_{m-i}}{a}.$$

Întrucât gradul polinomului în σ_i este cel mult egal cu s, fiecare termen are forma unui întreg împărţit la o putere a lui a, nu mai mare de s. Astfel,

$$\sum_{j=1}^{m} f^{(r)}(\alpha_j) = p \left[a^s \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{pa^s} f^{(r)}(\alpha_j) \right],$$

unde termenul dintre parantezele drepte este un număr întreg. Deoarece această afirmaţie este adevărată pentru orice r astfel încât $p \le r \le s + r$, suma făcută după aceste valori ale lui r este un întreg divizibil cu p. Cum această sumă este egală cu expresia originală, demonstraţia afirmaţiei noastre este completă.

În continuare, vom demonstra că *pentru p suficient de mare, $kF(0)$ este, de asemenea, un număr întreg, dar* nedivizibil *cu p.*

Într-adevăr, termenii lui $F(0)$ sunt de trei tipuri:

- Termenii $f^{(r)}(x)$, pentru $0 \le r \le p-2$ conţin, cu toţii, un factor x, deci se anulează pentru $x = 0$.

- Termenii $f^{(r)}(x)$, pentru $p \le r \le s+p$ sunt polinoame cu coeficienţi întregi, fiecare coeficient fiind divizibil cu p, după cum s-a văzut mai sus. Astfel, $f^{(r)}(0)$, termenii constanţi, sunt întregi divizibili cu p.

- Pentru a ne asigura că numărul $kF(0)$ nu este divizibil cu p este, prin urmare, suficient să ne asigurăm că singurul termen rămas, adică $kf^{(p-1)}(0)$, nu este divizibil cu p.

  Din definiţia lui f, rezultă că singurul termen care contribuie la $f^{(p-1)}(0)$ este
  $$\frac{a^s a_0^p}{(p-1)!} x^{p-1}.$$
  Prin urmare,
  $$kf^{(p-1)}(0) = ka^s a_0^p.$$
  În consecinţă, dacă p este orice număr prim strict mai mare decât k, a şi a_0, atunci p nu poate să dividă produsul $ka^s a_0^p$.

Revenim acum la ecuaţia (A.12). Am reuşit să demonstrăm că, pentru p suficient de mare, membrul stâng este un întreg nenul (pentru că este suma dintre un întreg divizibil cu p şi unul nedivizibil cu p). Mai rămâne să demonstrăm că, din nou, pentru p suficient de mare, membrul drept al acestei egalităţi poate fi făcut subunitar, de unde va rezulta contradicţia căutată.

Avem
$$\begin{aligned}
&\left| -\sum_{j=1}^{m} \int_0^1 e^{(1-u)\alpha_j} f(u\alpha_j)du \right| = \\
&= \left| -\sum_{j=1}^{m} \int_0^1 e^{(1-u)\alpha_j} \left[\frac{a^s (u\alpha_j)^{p-1} [P(u\alpha_j)]^p}{(p-1)!} \right] du \right| \le \\
&\le \int_0^1 \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\left[a^m (u\alpha_j) P(u\alpha_j)\right]^{p-1}}{(p-1)!} \alpha_j e^{(1-u\alpha_j)} a^{m-1} P(u\alpha_j) \right| du,
\end{aligned}$$

deoarece
$$a^s = a^{mp-1} = (a^m)^{p-1} a^{m-1}.$$

Fie B o margine superioară uniformă pentru $1 \leq j \leq m$ a funcţiilor continue

$$\left|a^m(u\alpha_j)P(u\alpha_j)\right|$$

pe intervalul închis $0 \leq u \leq 1$ şi fie C o margine superioară a funcţiei continue

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\alpha_j e^{(1-u\alpha_j)} a^{m-1} P(u\alpha_j)\right|$$

pe acelaŞi interval. Atunci expresia originală este mărginită superior de

$$\frac{CB^{p-1}}{(p-1)!}. \tag{A.13}$$

Cum această margine superioară este termenul de ordinul p în seria MacLaurin a funcţiei (de variabilă B) Ce^B, iar această serie se ştie că este convergentă, rezultă că expresia (A.13) trebuie să tindă la zero, atunci când $p \to \infty$. Dar asta înseamnă tocmai că membrul drept al relaţiei (A.12) poate fi făcut arbitrar de mic (şi, în particular, subunitar) dacă numărul prim p este suficient de mare. $\square$

Bibliografie

[1] Argunov, V.I., Balk, M.B. – *Construcţii geometrice în plan* (în limba rusă), ediţia a II-a, Moscova, 1957

[2] Alexandrov, I. – *Probleme de construcţii geometrice*, Ed. Tehnică, 1951

[3] Buicliu, Gh. – *Probleme de construcţii geometrice cu rigla şi compasul*, Ed. Tehnică, 1957

[4] Enriques, F. – *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, ediţia a III-a, vol. II, Nicola Zanichelli, Bologna, 1900

[5] Fourrey, E. – *Curiosités géométriques*, 2e edition, Vuibert et Nony, Paris, 1910

[6] Gerwien, P. – *Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1833

[7] Guitel, E. – *Propriétés relatives aux polygones équivalents*, Assoc. fr. p. l'av. des Sciences, 1895

[8] Hadlock, C.R., *Field Theory and its Classical Problems*, Mathematical Association of America, 1978

[9] Hurwitz, A. – *Beweis der Transzendenz der Zahl e*, Math. Ann., vol. **43** (1893), pp. 220-221

[10] Jones, A., Morris, S.A., Pearson, K.R., *Abstract Algebra and Famous Impossibilities*, Springer, 1991

[11] Lindemann, F., *Über die Zahl* π, Math. Ann., **20** (1882), pp. 213–225

[12] Niven, I. – *The transcendence of π*, Amer. Math. Monthly, vol. **46** (1939), pp. 469–471

[13] Tóth, A. – *Noţiuni de teoria construcţiilor geometrice*, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1963