Geometrie liniară

Cu un ochi către grafica pe calculator

Paul A. Blaga

Cuprins

Partea I

Elemente de geometrie analitică în plan şi în spaţiu

CAPITOLUL 1

Vectori, puncte şi coordonate

1.1 Noţiunea de vector

1.1.1 Segmente orientate (vectori legaţi)

Un segment de dreaptă pentru care s-a precizat care dintre capetele sale este originea şi care extremitatea, se numeşte *segment orientat*. Un segment orientat cu originea în punctul A şi extremitatea în punctul B se notează, de regulă, cu $\overline{AB}$. Din punct de vedere grafic, un segment de dreaptă orientat se reprezintă sub forma unei săgeţi, cu originea în originea segmentului şi cu vârful în extremitatea sa. Un segment orientat este definit, în mod unic, de capetele sale şi de ordinea acestor capete. Cu alte cuvinte, un segment orientat este unic determinat dacă se indică originea şi extremitatea sa. Dacă cumva cele două puncte coincid, atunci se spune că avem de-a face cu un *segment orientat nul* şi se scrie[1] $\overline{AA} = \vec{0}$.

Dacă s-a ales o unitate de lungime, atunci putem defini lungimea segmentului orientat $\overline{AB}$ ca fiind lungimea segmentului neorientat AB şi scriem:

$$\left\|\overline{AB}\right\| = |AB|$$

sau, pur şi simplu,

$$\left\|\overline{AB}\right\| = AB.$$

Lungimea unui segment orientat se mai numeşte şi *modulul* său sau *norma* sa.

Spunem că două segmente orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt *egale* dacă $A = C$ şi $B = D$, cu alte cuvinte, dacă ele au aceeaşi origine şi aceeaşi extremitate.

Despre un segment orientat $\overline{AB}$ se mai spune şi că este un *vector legat* cu originea în punctul A şi extremitatea în punctul B. Fixând punctul A, putem defini operaţia de adunare şi cea de înmulţire cu scalari pentru toţi vectorii legaţi cu originea în A şi se poate demonstra că această mulţime este un spaţiu vectorial real. Totuşi, dacă avem în vedere aplicaţii reale în geometrie, noţiunea de vector legat este de

[1] Notaţia pentru vectorul nul este incompletă, pentru că ea nu scoate în evidenţă faptul că este vorba de vectorul nul *în punctul A*. Practic, un vector nul într-un punct se reduce la punctul însuşi.

un interes limitat, deoarece în geometrie avem, de regulă, vectori cu originile în puncte diferite şi avem nevoie de nişte reguli cu care să putem opera cu aceşti vectori. În acest scop, vom modifica puţin noţiunea de vector în aşa fel încât originea (sau punctul de aplicare, cum se mai numeşte) să nu mai joace nici un rol.

1.1.2 Vectori liberi

După cum spuneam mai devreme, vrem să dezvoltăm o teorie a vectorilor care să ne permită să comparăm vectori care nu au neapărat aceeaşi origine.

Începem cu nişte definiţii. Vom spune, înainte de toate, că două segmente orientate *nenule* $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au *aceeaşi direcţie* dacă dreptele AB şi CD sunt paralele. Un segment legat nul se consideră, prin convenţie, că are aceeaşi direcţie cu orice alt segment orientat.

Presupunem acum că cele două segmente orientate (nenule) au aceeaşi direcţie, dar dreptele lor suport nu coincid. Vom spune că ele au *acelaşi sens* dacă segmentele (neorientate) AC şi BD nu se intersectează. Dacă, însă, aceste doua segmente se intersectează, vom spune că segmentele orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ *au sensuri opuse*.

Dacă segmentele orientate nenule $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au aceeaşi dreaptă suport: $AB = CD$ (ca drepte), atunci vom spune că ele au acelaşi sens dacă există un al treilea segment orientat, $\overline{EF}$, având aceeaşi direcţie (dar nu şi aceeaşi dreaptă suport) cu $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$, şi care are acelaşi sens cu ambele segmente. În caz contrar, vom spune că segmentele $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au sensuri opuse.

Se consideră, prin convenţie, că vectorul nul are acelaşi sens cu orice alt vector[2].

Observaţie. De fiecare dată când spunem că două segmente orientate au acelaşi sens, subînţelegem, chiar dacă nu o spunem în mod explicit, că segmentele au aceeaşi direcţie. Relaţia "acelaşi sens" nu este definită pentru perechi de segmente orientate care nu au aceeaşi direcţie. Mai spunem, uneori, despre două segmente orientate care au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens, că au *aceeaşi orientare*.

Definiţia 1.1. Spunem că două segmente orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt *echipolente* şi scriem $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, dacă fie ambele sunt nule, fie ambele sunt nenule şi ele au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi acelaşi modul.

Este uşor de constatat că relaţia de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă (adică este reflexivă, simetrică şi tranzitivă).

Definiţia 1.2. Se numeşte *vector liber* o clasă de echivalenţă de segmente orientate, în raport cu relaţia de echipolenţă. Vectorul liber determinat de segmentul orientat $\overline{AB}$ se notează cu $\overrightarrow{AB}$. Astfel,

$$\overrightarrow{AB} = \left\{\overline{CD} \,|\, \overline{CD} - \text{segment orientat a.î. } \overline{CD} \sim \overline{AB}\right\}$$

Aşadar, un vector liber este, de fapt, o familie de vectori legaţi, toţi echipolenţi între ei. Există o interpretare cinematică a vectorului liber, care sugerează, de fapt, denumirea: un vector liber poate fi privit ca un segment orientat a cărui origine nu a fost fixată. El poate fi mutat în orice punct al spaţiului, cu condiţia să nu-i schimbăm modulul, direcţia şi sensul. Fireşte, semnificaţia riguroasă a acestei afirmaţii este aceea că *dacă $\overrightarrow{AB}$ este un vector liber, atunci, pentru orice punct C din spaţiu există un vector legat $\overline{CD}$ cu originea în C astfel încât $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.*

[2] Aceasta înseamnă, până la urmă, că noţiunea de *sens* nu are o semnificaţie bine definită pentru vectorul nul.

Doi vectori liberi se numesc *egali* dacă ei sunt egali ca şi clasă de echivalenţă, adică sunt alcătuiţi din aceleaşi segmente orientate. Altfel spus,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{AB} \sim \overline{CD}.$$

De regulă, dacă nu vrem să scoatem în evidenţă un reprezentant al unui vector liber, vom utiliza pentru notarea acestor obiecte litere mici, de regulă din prima parte a alfabetului, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$. Vectorul nul se notează cu $\mathbf{0}$. Pentru reprezentarea unui vector liber se utilizează unul dintre segmentele orientate care îl formează.

Să presupunem că se dă un vector liber $\mathbf{a}$ şi un punct A. În mod evident, există un singur punct B din spaţiu astfel încât să avem

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}.$$

Vom spune că, prin construirea punctului B pentru care e verificată relaţia de mai sus, am *ataşat* vectorul liber $\mathbf{a}$ punctului A.

Se numeşte *modul* al vectorului liber $\mathbf{a}$ modulul oricăruia dintre segmentele orientate care îl alcătuiesc. Modulul lui $\mathbf{a}$ se notează cu $\|\mathbf{a}\|$.

Să presupunem că se dau doi vectori $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$. Îi ataşăm unui punct O (construim punctele A şi B astfel încât să avem $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$). Atunci *unghiul dintre vectorii* $\mathbf{a}$ *şi* $\mathbf{b}$ este, prin definiţie, unghiul dintre segmentele orientate $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$. În mod evident, acest unghi nu depinde de alegerea punctului O.

Spunem că un segment orientat $\overline{AB}$ este paralel cu o dreaptă Δ (cu un plan Π) dacă dreapta sa suport este paralelă cu dreapta Δ (cu planul Π). Segmentul nul se consideră, prin convenţie, că este paralel cu orice dreaptă sau plan. Spunem că vectorii liberi $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ sunt *coliniari (coplanari)* dacă segmentele care îi alcătuiesc sunt paralele cu o aceeaşi dreaptă (respectiv cu acelaşi plan).

Mai dăm, în sfârşit, încă o interpretare vectorilor liberi. Fie vectorul liber $\overrightarrow{AB}$ (adică mulţimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu segmentul orientat $\overline{AB}$). Considerăm transformarea spaţiului care duce un punct C oarecare într-un punct D astfel încât să avem $\overline{CD} \sim \overline{AB}$. O astfel de transformare se numeşte *transport paralel* sau translaţie de vector $\overrightarrow{AB}$. Se stabileşte, pe această cale, o bijecţie între mulţimea tuturor vectorilor liberi şi mulţimea tuturor translaţiilor. Datorită acestei identificări, uneori şi translaţiile se numesc *vectori*.

Dacă în spaţiu se fixează un plan Π şi se consideră numai acele puncte care aparţin acestui plan, atunci prin vector (liber) vom înţelege o clasă de echivalenţă de segmente orientate situate în acel plan. Analog se definesc şi vectorii de pe dreaptă.

1.2 Adunarea vectorilor

Considerăm doi vectori $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$. Alegem un punct O oarecare din spaţiu şi construim un punct A astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi un punct B astfel încât $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$.

Definiţia 1.3. Vectorul $\overrightarrow{OB}$ se numeşte *suma vectorilor* $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ şi se notează cu $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Este clar, din raţiuni geometrice elementare, că suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ nu depinde de alegerea punctului O. Modalitatea de construcţie a sumei a doi vectori descrisă mai sus se numeşte *regula triunghiului* (sau a *închiderii*, pentru că suma celor doi vectori este determinată de segmentul orientat care închide triunghiul care are ca celelalte două laturi segmentele orientate care determină cei doi vectori liberi care se însumează).

Dacă vectorii **a** şi **b** nu sunt coliniari, atunci avem şi o altă metodă de a determina suma a doi vectori, care, fireşte, dă acelaşi rezultat ca şi regula triunghiului. Fie, prin urmare, **a** şi **b** doi vectori necoliniari. Alegem un punct O şi ataşăm cei doi vectori de punctul O, cu alte cuvinte, determinăm punctele A şi B astfel încât $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$. Cum vectorii **a** şi **b** nu sunt coliniari, de aici rezultă că nici punctele O,A şi B nu sunt coliniare, deci ele determină un plan. În acest plan, construim paralelogramul $OACB$. Cum se constată cu uşurinţă că $\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$, rezultă, pe baza regulii triunghiului, menţionată mai sus, că au loc egalităţile:

$$\overrightarrow{OC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}. \tag{1.2.1}$$

Avem două egalităţi, pentru că avem două situaţii în care putem aplica regula triunghiului, şi de fiecare dată vectorul care închide triunghiul este $\overrightarrow{OC}$.

Rezultă, prin urmare, noua regulă de calcul a sumei a doi vectori (*regula paralelogramului*): pentru a găsi suma a doi vectori necoliniari, se ataşează aceşti doi vectori unui punct O şi se construieşte pe segmentele orientate obţinute, ca laturi, un paralelogram. Diagonala paralelogramului care pleacă din punctul O va fi atunci segmentul orientat care determină suma celor doi vectori.

Regula paralelogramului permite (vezi formula (1.2.1)) demonstrarea foarte simplă a *comutativităţii* adunării vectorilor liberi, pentru cazul vectorilor *necoliniari*. Pentru cazul vectorilor coliniari, comutativitatea se poate verifica foarte uşor cu ajutorul regulii închiderii, atât pentru vectorii orientaţi în acelaşi sens, cât şi pentru cei având sensuri opuse. Aşadar, operaţia de adunare a vectorilor liberi este comutativă.

Considerăm acum trei vectori $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$. Ataşăm vectorul **a** unui punct O, construind, astfel, punctul A astfel încât $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$. Construim, mai departe, punctul B astfel încât $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$. Conform definiţiei sumei, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Adunăm acum la acest vector vectorul **c**. Pentru aceasta construim punctul C astfel încât $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}$. Avem, atunci

$$\overrightarrow{OC}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}. \tag{1.2.2}$$

Pe de altă parte, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$, prin urmare

$$\overrightarrow{OC}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}). \tag{1.2.3}$$

Combinând (1.2.2) cu (1.2.3) obţinem

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

adică adunarea vectorilor este *asociativă*.

Operaţia de adunare a vectorilor liberi admite şi *element neutru*, care este, fireşte, vectorul nul, **0**, deoarece este evident că pentru orice vector **a** avem:

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}.$$

Remarcăm, în sfârşit, că fiecare vector admite un opus relativ la operaţia de adunare. Astfel, dacă vectorul liber **a** este reprezentat de segmentul orientat $\overline{AB}$, atunci vom nota cu $-\mathbf{a}$ vectorul liber reprezentat de segmentul orientat $\overline{BA}$ şi se constată imediat că avem:

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=0.$$

Acestea fiind spuse, putem afirma că *mulţimea tuturor vectorilor liberi din spaţiu formează un grup abelian în raport cu operaţia de adunare a vectorilor.*

Aşa cum se întâmplă în orice grup abelian (aditiv), odată cu adunarea vectorilor putem defini şi scăderea lor, punând, prin definiţie:

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}:=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}).$$

Dacă ataşam vectorul **a** unui punct O şi alegem A şi B astfel încât $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, atunci, după cum se constată cu uşurinţă, $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\overrightarrow{BA}$ sau

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

Regula paralelogramului se poate aplica fără dificultate şi pentru determinarea diferenţei a doi vectori, nu doar pentru determinarea sumei. Astfel, după cum am văzut mai sus, pentru a determina suma a doi vectori, se consideră, mai întâi, câte un reprezentant al fiecărui vector, având originile în acelaşi punct. Se completează paralelogramul, ducându-se paralelele la dreptele suport ale celor două segmente orientate, prin extremităţile lor. Atunci suma celor doi vectori este vectorul reprezentat de segmentul orientat asociat diagonalei ce are originea în punctul de aplicare al celor doi vectori. Diferenţa celor doi vectori, în schimb, este determinată de cea de-a doua diagonală, orientarea fiind aleasă în aşa fel încât originea să fie situată în extremitatea scăzătorului, iar extremitatea în extremitatea descăzutului.

1.3 Înmulţirea unui vector cu un număr real (cu un scalar)

Scopul nostru este să înzestrăm mulţimea vectorilor liberi din spaţiu cu o structură de spaţiu vectorial. Am văzut, până acum, că această mulţime, împreună cu adunarea vectorilor, este un grup abelian. Ne-a mai rămas de definit înmulţirea exterioară (înmulţirea cu scalari) şi verificarea compatibilităţii acestei operaţii cu adunarea vectorilor.

Definiţia 1.4. Fie **a** un vector şi $\lambda\in\mathbb{R}$ un număr real. *Produsul vectorului* **a** *cu scalarul* λ este, prin definiţie, un vector, notat $\lambda\mathbf{a}$ caracterizat în modul următor:

(i) modulul lui $\lambda\mathbf{a}$ este dat de

$$\|\lambda\mathbf{a}\|:=|\lambda|\cdot\|\mathbf{a}\|,$$

unde produsul din membrul drept este produsul de numere reale;

(ii) direcţia lui $\lambda\mathbf{a}$ coincide cu direcţia lui **a**;

(iii) sensul lui $\lambda\mathbf{a}$ coincide cu sensul lui **a** dacă $\lambda>0$ sau cu sensul opus sensului lui **a** dacă $\lambda<0$.

Vom enumera acum o serie de proprietăţi fundamentale pe care le are operaţia de înmulţire a vectorilor cu scalari.

1) $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

2) $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$.

3) $\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$, pentru orice scalari $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ şi orice vector **a**.

Aceste trei proprietăţi sunt evidente, ele rezultând în mod direct din definiţia înmulţirii cu scalari.

4) $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$, pentru orice $\lambda\in\mathbb{R}$ şi pentru orice doi vectori liberi $\mathbf{a},\mathbf{b}$.

Proprietatea 4) este evidentă în anumite cazuri speciale: dacă scalarul λ se anulează, dacă suma $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ se anulează sau dacă cel puţin unul dintre vectori este egal cu zero.

Lăsăm deoparte aceste situaţii şi presupunem că $\lambda > 0$, iar vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ nu sunt coliniari. Alegem un punct O oarecare şi construim punctele A şi B astfel încât să avem $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ şi, prin urmare, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$. Mai construim punctele A' şi B' astfel încât

$$\overrightarrow{OA'} = \lambda\mathbf{a}, \quad \overrightarrow{OB'} = \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}). \tag{1.3.1}$$

Triunghiurile OAB şi $OA'B'$ sunt asemenea, deoarece ele au un unghi comun, iar laturile corespunzătoare unghiului comun sunt proporţionale. De aici rezultă că $|A'B'| = |\lambda|\cdot|AB| = \lambda\cdot|AB|$. Cum, în plus, vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{A'B'}$ au, în plus, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens, rezultă că

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda\mathbf{b}. \tag{1.3.2}$$

Proprietatea 4) rezultă acum din relaţiile (1.3.1) şi (1.3.2).

Presupunem acum, în continuare, că $\lambda > 0$, dar vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt, de data aceasta, coliniari. Alegem un punct O arbitrar şi construim punctele A şi B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$.

Alegem un punct S, care nu aparţine dreptei OAB şi construim semidreptele SO, SA şi SB. Alegem pe semidreapta SO punctul O' astfel încât $|SO'| = \lambda\cdot|SO|$. Prin O' ducem o dreaptă δ, paralelă cu dreapta OAB şi notăm cu A', respectiv B' intersecţiile acestei drepte cu semidreptele SA, respectiv SB. Obţinem, pe această cale, trei perechi de triunghiuri asemenea:

$$\Delta OAS \simeq \Delta O'A'S', \quad \Delta ABS \simeq \Delta A'B'S', \quad \Delta OBS \simeq \Delta O'B'S'.$$

De aici rezultă imediat că

$$\overrightarrow{O'A'} = \lambda\mathbf{a}, \quad \overrightarrow{A'B'} = \lambda\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{O'B'} = \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}),$$

din care rezultă imediat proprietatea 4). Cazul $\lambda < 0$ se tratează similar.

5) $(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$, pentru orice scalari λ şi μ şi pentru orice vector $\mathbf{a}$.

Ca şi în cazul proprietăţii 4), şi aici egalitatea este evidentă pentru anumite situaţii particulare: dacă $\mathbf{a} = 0$, dacă $\lambda+\mu = 0$ sau dacă cel puţin unul dintre scalari este egal cu zero.

Lăsam, din nou, deoparte aceste situaţii. Presupunem, mai întâi, că λ şi μ au acelaşi semn. Este clar, de la bun început, că vectorii din ambii membrii ai relaţiei 5) au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens. Pentru a demonstra că relaţia are loc, este suficient, prin urmare, să demonstrăm că ei au şi acelaşi modul. Avem, ţinând cont de ipotezele făcute:

$$\begin{aligned}\|\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}\| &= \|\lambda\mathbf{a}\|+\|\mu\mathbf{a}\| = |\lambda|\cdot\|\mathbf{a}\|+|\mu|\cdot\|\mathbf{a}\| = (|\lambda|+|\mu|)\cdot\|\mathbf{a}\| = \\ &= |\lambda+\mu|\cdot\|\mathbf{a}\| = \|(\lambda+\mu)\mathbf{a}\|.\end{aligned}$$

Să presupunem acum că λ şi μ au semne opuse şi,pentru fiaxrea ideilor, mai admitem că $|\lambda| > \mu$. Atunci numerele $\lambda+\mu$ şi $-\mu$ vor avea acelaşi semn şi, pe baza celor demonstrate mai sus, avem

$$(\lambda+\mu)\mathbf{a}+(-\mu)\mathbf{a} = (\lambda+\mu-\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a},$$

relaţie echivalentă cu proprietatea 5).

Proprietăţile 1)–5), împreună cu faptul că mulţimea $\mathscr{V}$ este un grup abelian (ceea ce am demonstrat în secţiunea precedentă), înseamnă că această mulţime este un *spaţiu vectorial* peste mulţimea numerelor reale.

Observaţie. Proprietăţile 4) şi 5) pot fi extinse, prin inducţie, la orice număr finit de sumanzi, cu alte cuvinte, se poate demonstra cu uşurinţă că:

$$\lambda(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_k) = \lambda\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda\mathbf{a}_k,$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a} + \cdots + \lambda_k\mathbf{a},$$

pentru orice k natural, cel puţin egal cu 2, orice numere reale, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ şi orice vectori $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

1.4 Proiecţiile vectorilor pe axe sau plane

1.4.1 Axe

Alegem o dreaptă oarecare în spaţiu. Vom numi unul dintre cele două sensuri de pe această dreaptă *pozitiv* şi îl vom nota pe desen cu o săgeată. Sensul opus va fi numit *negativ*. O dreaptă pe care s-a ales un sens pozitiv se numeşte *axă* sau *dreaptă orientată*.

Alegem acum o axă Δ şi pe ea alegem un segment nenul ca unitate de lungime. Vom numi *magnitudine* a unui segment orientat $\overline{AB}$ de pe axă şi-l vom nota cu simbolul (AB) numărul dat de

$$(AB) = \begin{cases} \|\overline{AB}\| & \text{dacă } \overline{AB} \text{ are acelaşi sens cu } \Delta \\ -\|\overline{AB}\| & \text{dacă } \overline{AB} \text{ şi } \Delta \text{ au sensuri opuse} \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Numărul (AB) se mai numeşte şi *lungimea cu semn* sau *lungimea orientată* a segmentului orientat $\overline{AB}$. Avem, în mod evident, $(AB) = -(BA)$.

Teorema 1.1 (Chasles)**.** *Pentru orice trei puncte A, B, C situate pe o axă pe care s-a ales o unitate de lungime, are loc următoarea relaţie:*

$$(AB) + (BC) = (AC). \tag{1.4.2}$$

Demonstraţie Verificare directă, după diferitele poziţii reciproce ale punctelor A, B, C. □

1.4.2 Proiecţia pe o axă în spaţiu

Fie Δ o axă în spaţiu şi Π un plan care nu este paralel cu Δ. Printr-un punct oarecare A din spaţiu ducem un plan Π_1, paralel cu planul Π. Acest plan intersectează axa Δ într-un punct A'. Punctul A' se numeşte *proiecţia punctului A pe axa Δ, paralelă cu planul* Π. Dacă planul Π este perpendicular pe axa Δ, atunci proiecţia se numeşte *ortogonală*. În acest caz, A' este piciorul perpendicularei coborâte din punctul A pe axa Δ.

Alegem acum un segment orientat oarecare $\overline{AB}$. Dacă proiectăm punctele A şi B pe axa Δ, paralel cu planul Π, obţinem un segment orientat $\overline{A'B'}$, care se numeşte *proiecţia segmentului orientat $\overline{AB}$ pe axa Δ, paralelă cu planul* Π. Presupunem acum că pe axa Δ s-a ales şi o unitate de lungime (o scală). Atunci putem vorbi şi despre magnitudinea proiecţiei unui segment pe axă, magnitudine pe care o vom nota cu $\mathrm{pr}_\Delta \overline{AB}\,(\|\,\Pi)$.

Este clar că două segmente orientate echivalente vor avea ca proiecţii pe orice axă segmente orientate echivalente, iar magnitudinile acestor proiecţii vor fi egale.

Considerăm acum un vector liber **a**, adică o clasă de echivalenţă de segmente orientate. Proiecţiile acestor segmente pe axa Δ, paralel cu planul Π, formează, după cum am menţionat mai sus, o familie de segmente orientate echipolente între ele, adică formează *un vector liber pe dreaptă*. Acest vector se numeşte *proiecţia vectorului* **a** *pe axa* Δ*, paralel cu planul* Π şi se notează cu $\mathrm{pr}_\Delta\,\mathbf{a}\,(\parallel \Pi)$.

1.4.3 Proiecţia pe o axă într-un plan

Presupunem acum că atât axa Δ, cât şi figura care se proiectează sunt situate într-un acelaşi plan Π. Vom reformula definiţia proiecţiei în modul următor. Fie Δ_1 o dreaptă din planul Π, care nu este paralelă cu axa Δ. Ducem, printr-un punct A al planului, o dreaptă paralelă cu dreapta Δ_1, care intersectează axa într-un punct A', care se numeşte *proiecţia punctului A pe axa* Δ*, paralelă cu dreapta* Δ_1 . Celelalte noţiuni din paragraful precedent se definesc în mod analog şi se bucură de aceleaşi proprietăţi.

1.4.4 Proiecţia pe un plan

Fie Π un plan şi Δ o dreaptă care nu este paralelă cu planul. Ducem printr-un punct A al spaţiului o dreaptă Δ_1, paralelă cu dreapta Δ. Dreaptă Δ_1 intersectează planul într-un punct A', care se numeşte *proiecţia punctului A pe planul* Π*, paralelă cu dreapta* Δ. Dacă dreapta Δ este perpendiculară pe planul Π, proiecţia se numeşte *ortogonală*.

1.4.5 Proiecţia sumei vectorilor

Presupunem că pe axa Δ se proiectează doi vectori **a** şi **b**. Proiecţia se face paralel cu un plan Π sau paralel cu o dreaptă Δ_1, dacă atât vectorii, cât şi axa se află într-un acelaşi plan.

Alegem un punct O şi construim punctele A şi B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ şi, prin urmare, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Dacă O', A', B' sunt proiecţiile punctelor O, A, B pe axa Δ, atunci vectorii $\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{A'B'}$ şi $\overrightarrow{O'B'}$ sunt, respectiv, proiecţiile vectorilor $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. De aici rezultă că *proiecţia sumei vectorilor este egală cu suma proiecţiilor termenilor*. Este clar că această proprietate se poate extinde, fără dificultate, şi la sume de mai mult de doi vectori. Mai mult, dacă pe axă s-a ales şi o unitate de lungime, atunci, în virtutea egalităţii (1.4.2), avem şi

$$(O'B') = (O'A') + (A'B')$$

sau, utilizând notaţia introdusă mai devreme,

$$\mathrm{pr}_\Delta(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathrm{pr}_\Delta\,\mathbf{a} + \mathrm{pr}_\Delta\,\mathbf{b}, \tag{1.4.3}$$

adică magnitudinea proiecţiei sumei vectorilor pe o axă este egală cu suma magnitudinilor proiecţiilor termenilor.

1.4.6 Proiecţia produsului unui vector cu un scalar

Vom demonstra că prin înmulţirea unui vector **a** cu un scalar λ, proiecţia acestui vector pe orice axă Δ, ca şi magnitudinea acestei proiecţii se înmulţesc cu acelaşi scalar.

Dacă $\mathbf{a} = 0$ sau $\lambda = 0$, este clar că nu avem ce demonstra. Presupunem, prin urmare, că $\mathbf{a} \neq 0$ şi $\lambda \neq 0$. Alegem o axă Δ, fixăm un punct O pe ea şi determinăm punctele A şi B din spaţiu astfel încât să avem $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{OB} = \lambda\mathbf{a}$. Cei doi vectori, după cum se ştie, au aceeaşi direcţie, iar sensurile coincid pentru $\lambda > 0$ şi sunt opuse pentru $\lambda < 0$.

Proiectând punctele A şi B pe axa Δ în punctele A' şi B', obţinem două triunghiuri asemenea, OAA' şi OBB'. Din proprietăţile asemănării afirmaţia noastră rezultă imediat, prin urmare avem:

$$\mathrm{pr}_\Delta(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\,\mathrm{pr}_\Delta\,\mathbf{a}. \tag{1.4.4}$$

1.4.7 Proiecţia unei combinaţii liniare de vectori

Fie $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ un sistem oarecare de vectori (nu neapărat distincţi), şi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ un sistem oarecare de k numere reale. Atunci vectorul

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{a}_k$$

se numeşte *combinaţie liniară* a vectorilor consideraţi.

Din egalităţile (1.4.3) şi (1.4.4) rezultă următoarea egalitate:

$$\mathrm{pr}_\Delta(\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{a}_k) = \lambda_1\,\mathrm{pr}_\Delta\,\mathbf{a}_1 + \lambda_2\,\mathrm{pr}_\Delta\,\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k\,\mathrm{pr}_\Delta\,\mathbf{a}_k,$$

adică *magnitudinea proiecţiei unei combinaţii liniare de vectori pe o axă este egală cu combinaţia liniară a proiecţiilor vectorilor (cu aceeaşi coeficienţi).*

1.5 Dependenţa liniară a vectorilor

Definiţia 1.5. Vectorii

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \tag{1.5.1}$$

se numesc *liniar dependenţi* dacă există numerele reale

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \tag{1.5.2}$$

nu toate nule, astfel încât

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{1.5.3}$$

În caz contrar, vectorii se numesc *liniar independenţi*.

Este clar că vectorii sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă din egalitatea (1.5.3) rezultă că

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Se mai spune, de asemenea, că vectorii (1.5.1) formează *un sistem liniar dependent*, respectiv *un sistem liniar independent*.

Dacă un vector $\mathbf{a}$ se poate scrie în funcţie de vectorii (1.5.1) sub forma

$$\mathbf{a} = \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \mu_k\mathbf{a}_k,$$

atunci vom spune că $\mathbf{a}$ este *o combinaţie liniară a acestor vectori* .

Teorema 1.2. *Pentru ca vectorii (1.5.1) (cu $k > 1$) să fie liniar dependenţi, este necesar şi suficient ca cel puţin unul dintre aceşti vectori să poată fi scris ca o combinaţie liniară a celorlalţi.*

Demonstraţie Să presupunem că vectorii (1.5.1) verifică o relaţie de forma (1.5.3), în care cel puţin unul dintre coeficienţi este diferit de zero. Este clar că nu reducem generalitatea dacă presupunem că ultimul coeficient este nenul: $\lambda_k \neq 0$. Atunci, din egalitatea (1.5.3) se obţine

$$\mathbf{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\mathbf{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k}\mathbf{a}_2 \cdots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\mathbf{a}_{k-1},$$

adică $\mathbf{a}_k$ este o combinaţie liniară a celorlalţi $k-1$ vectori.

Invers, să presupunem că unul dintre vectorii (1.5.1), de exemplu, din nou, ultimul, este o combinaţie liniară a celorlalţi $k-1$ vectori:

$$\mathbf{a}_k = \beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \beta_{k-1}\mathbf{a}_{k-1}.$$

Dacă trecem toţi termenii în membrul stâng, obţinem

$$-\beta_1\mathbf{a}_1 - \beta_2\mathbf{a}_2 - \cdots - \beta_{k-1} + 1 \cdot \mathbf{a}_k = 0,$$

egalitate care este de forma (1.5.3) şi există cel puţin un coeficient nenul (întrucât coeficientul lui $\mathbf{a}_k$ este 1), ceea ce înseamnă ă vectorii sunt, într-adevăr, liniar dependenţi. □

Consecinţa 1.1. *Dacă vectorii (1.5.1) sunt liniar independenţi, atunci nici unul nu poate fi scris ca o combinaţie liniară a celorlalţi. În particular, nici unul dintre vectori nu poate fi egal cu zero.*

În cadrul acestui curs,vom avea de-a face, de regulă, cu sisteme formate din cel mult trei vectori. De aceea este interesant să evidenţiem sensul geometric al dependentei liniare sau al independenţei liniare pentru sisteme formate din 1, 2 sau trei vectori.

Este evident că un sistem format dintr-un singur vector este liniar dependent dacă şi numai dacă vectorul este nul.

Pentru cazul a doi vectori, avem următorul rezultat:

Teorema 1.3. *Doi vectori sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă sunt coliniari.*

Demonstraţie Fie $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ doi vectori liniar dependenţi. În virtutea teoremei precedente, există un scalar nenul λ astfel încât $\mathbf{a}_2 = \lambda\mathbf{a}_1$, adică vectorii sunt coliniari.

Invers, să presupunem acum că vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ sunt coliniari. Dacă cel puţin unul dintre vectori este nul, de exemplu $\mathbf{a}_2 = 0$, atunci putem scrie

$$0\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_2 = 0,$$

adică vectorii sunt liniar dependenţi. Presupunem acum că ambii vectori sunt nenuli. Alegem un punct O şi construim punctele A_1 şi A_2 astfel încât $\overrightarrow{OA_1} + \mathbf{a}_1$ şi $\overrightarrow{OA_2} = \mathbf{a}_2$. Datorită coliniarităţii vectorilor $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$, punctele O, A_1 şi A_2 sunt pe o aceeaşi dreaptă, Δ. Dacă $A_1 = A_2$, atunci, fireşte, vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ sunt egali, deci sunt liniar dependenţi, deoarece unul dintrei ei este o combinaţie liniară a celuilalt. Dacă $A_1 \neq A_2$, atunci fie $\lambda = \|\mathbf{a}_2\|/\|\mathbf{a}_1$. Dacă segmentele orientate $\overline{OA_1}$ şi $\overline{OA_2}$ au acelaşi sens, atunci $\mathbf{a}_2 = \lambda\mathbf{a}_1$, în timp ce dacă ele au sensuri opuse, atunci $\mathbf{a}_2 = -\lambda\mathbf{a}_1$. □

Consecinţa 1.2. *Doi vectori sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă ei* nu sunt coliniari.

Vectorii liniar independenţi vor juca un rol esenţial. În particular, ei ne furnizează descompuneri ale altor vectori. Un prototip de astfel de descompunere este dat de următoarea teoremă:

Teorema 1.4. *Să presupunem că într-un plan* Π *sunt daţi doi vectori necoliniari* $\mathbf{e}_1$ *şi* $\mathbf{e}_2$. *Atunci orice alt vector* $\mathbf{a}$ *din plan se poate descompune în funcţie de vectorii* $\mathbf{e}_1$ *şi* $\mathbf{e}_2$, *cu alte cuvinte există două numere reale (unic determinate)* x *şi* y *astfel încât*

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2. \tag{1.5.4}$$

Demonstraţie Faptul că vectorii aparţin planului Π înseamnă că direcţiile lor sunt paralele cu planul sau, altfel spus, că dacă îi ataşăm unui punct din plan, segmentele orientate care se obţin sunt conţinute în plan. Fie, prin urmare, O un punct oarecare al planului. Aunci există (şi sunt unice!) trei puncte E_1, E_2 şi M din plan în aşa fel încât

$$\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1,\ \overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2,\ \overrightarrow{OM} = \mathbf{a}.$$

Proiectând punctul M pe dreapta OE_1, paralel cu dreapta OE_2, obţinem un punct M_1. Fie, pe de altă parte, M_2 punctul ce se obţine proiectând punctul M pe dreapta OE_2, paralel cu dreapta OE_1. Întrucât vectorii $\overrightarrow{OE_1}$ şi $\overrightarrow{OM_1}$ sunt coliniari, iar $\overrightarrow{OE_1} \neq 0$, rezultă că există un număr real x astfel încât $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OE_1}$. În mod analog, există un y real astfel încât $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OE_2}$. Cum $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, egalitatea (1.5.4) este verificată.

Mai rămâne să demonstrăm unicitatea numerelor reale x şi y. Să presupunem că ar exista alte două numere reale, x' şi y' astfel încât să avem

$$\mathbf{a} = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2. \tag{1.5.5}$$

Dacă scădem egalitatea (1.5.5) din egalitatea (1.5.4), obţinem

$$(x - x')\mathbf{e}_1 + (y - y')\mathbf{e}_2 = 0. \tag{1.5.6}$$

Cum vectorii $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$ sunt liniar independenţi, obţinem că $x - x' = 0$ şi $y - y' = 0$, adică $x = x'$ şi $y = y'$. □

Să vedem acum ce se întâmplă în cazul în care avem *trei* vectori. Avem următorul rezultat:

Teorema 1.5. *Pentru ca trei vectori să fie liniar dependenţi este necesar şi suficient ca ei să fie coplanari.*

Demonstraţie Presupunem că vectorii

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \tag{1.5.7}$$

sunt liniar dependenţi. Atunci cel puţin unul dintre ei se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi doi. Putem presupune, fără a reduce generalitatea, că acesta este cel de-al treilea vector. Prin urmare, există două numere reale λ_1 şi λ_2 astfel încât să avem

$$\mathbf{a}_3 = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2. \tag{1.5.8}$$

Dacă ataşăm vectorii unui punct O, obţinem trei puncte M_1, M_2, M_3 astfel încât

$$\overrightarrow{OM_1} = \mathbf{a}_1,\ \overrightarrow{OM_2} = \mathbf{a}_2,\ \overrightarrow{OM_3} = \mathbf{a}_3.$$

Dacă vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2}$ sunt necoliniari, atunci punctele O, M_1, M_2 sunt necoliniare, deci ele determină un plan Π. Datorită relaţiei (1.5.8), vectorul $\overrightarrow{OM_3}$ aparţine, de asemenea, planului Π, prin urmare cei trei vectori sunt coplanari. Dacă vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2}$ sunt coliniari, atunci din relaţia (1.5.8) rezultă că vectorul $\overrightarrow{OM_3}$ este, de asemenea, coliniar cu ceilalţi doi vectori, prin urmare, cu atât mai mult, cei trei vectori sunt coplanari.

Invers, să presupunem că vectorii (1.5.7) sunt coplanari. Să admitem, pentru început, că doi dintre vectori, de exemplu vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ nu sunt coliniari. Atunci, în virtutea teoremei 1.4, există două constante λ_1 şi λ_2 astfel încât să avem

$$\mathbf{a}_3 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$$

şi, prin urmare, vectorii (1.5.7) sunt liniar dependenţi.

Dacă toţi trei vectorii sunt coliniari, atunci avem, de exemplu, $\mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_2$, relaţie care se poate rescrie sub forma

$$\mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3,$$

adică, din nou, conchidem că cei trei vectori sunt coplanari. □

Drept consecinţă a acestei teoreme, putem conchide că *în spaţiu există triplete de vectori liniar independenţi.*

Şi în spaţiu avem un rezultat similar teoremei 1.4, adică:

Teorema 1.6. *Dacă vectorii*

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \tag{1.5.9}$$

sunt liniar independenţi şi **a** *este un vector oarecare, atunci există trei numere reale, x, y, z astfel încât*

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \tag{1.5.10}$$

Această descompunere a lui **a** *este unică.*

Demonstraţie Alegem un punct oarecare O din spaţiu şi determinăm punctele E_1, E_2, E_3 şi M astfel încât să avem

$$\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1,\ \overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2,\ \overrightarrow{OE_3} = \mathbf{e}_3,\ \overrightarrow{OM} = \mathbf{a}.$$

Notăm cu M_1, M_2, M_3 proiecţiile punctului M pe dreptele OE_1, OE_2, OE_3, paralel cu planele OE_2E_3, OE_1E_3, respectiv OE_1E_2. Se constată cu uşurinţă că

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \tag{1.5.11}$$

Cum vectorii $\overrightarrow{OE_1}$ şi $\overrightarrow{OM_1}$ sunt coliniari şi $\overrightarrow{OE_1} \neq 0$, rezultă că există un număr real x astfel încât $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OE_1}$. În mod analog, există numerele reale y şi z astfel încât $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OE_2}$ şi $\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OE_3}$. Unicitatea numerelor x, y, z se demonstrează ca şi în cazul teoremei 1.4. □

Întrebarea naturală care se pune este: ce se întâmplă dacă avem mai mult de trei vectori? Răspunsul este dat de teorema care urmează.

Teorema 1.7. *Orice patru vectori sunt liniar dependenţi.*

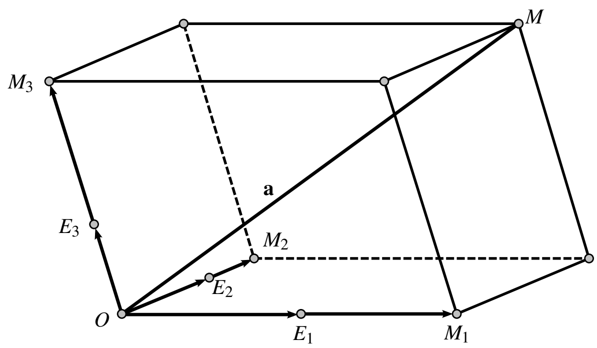


Figura 1.1:

Demonstraţie Presupunem că dintre cei patru vectori

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a} \tag{1.5.12}$$

trei sunt liniar independenţi, de exemplu

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3. \tag{1.5.13}$$

Atunci, în virtutea teoremei 1.6, există trei numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ astfel încât

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3,$$

adică cei patru vectori sunt, într-adevăr, liniar dependenţi.

Dacă vectorii (1.5.13) sunt liniar dependenţi, adică între ei există o relaţie de forma

$$\mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3 = 0, \tag{1.5.14}$$

unde nu toţi coeficienţii se anulează, această relaţie se poate rescrie sub forma

$$\mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3 + 0\mathbf{a} = 0,$$

adică vectorii (1.5.12) sunt liniar dependenţi. □

1.6 Orientarea sistemelor de doi şi trei vectori liniar independenţi

Definiţia 1.6. Un sistem (ordonat) de vectori liniar independenţi $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a_2}\}$ într-un plan se numeşte un sistem *drept* dacă atunci când ataşăm cei doi vectori punctului O din plan, adică alegem două puncte A_1 şi A_2 din plan astfel încât $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ şi $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, când rotim vectorul $\mathbf{a}_1$ în jurul punctului O pentru a-l aplica peste vectorul $\mathbf{a}_2$ (ca direcţie şi sens), pe drumul cel mai scurt, rotaţia se face în sens trigonometric (invers sensului acelor de ceasornic).

Acelaşi sistem se numeşte *stâng* dacă rotaţia menţionată mai sus se face în sensul acelor de ceasornic.

Observaţie. Este clar că dacă sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a_2}\}$ este drept, atunci sistemul $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a_1}\}$ este stâng şi viceversa.

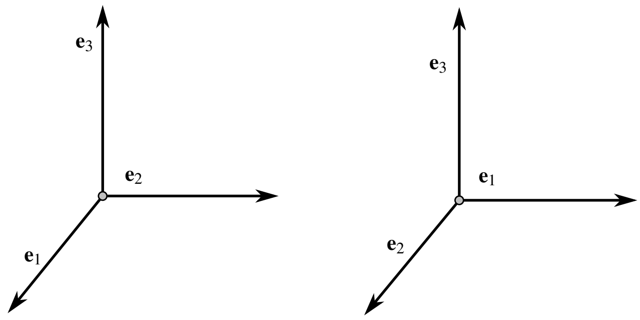


Figura 1.2:

Definiţia 1.7. Fie $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ un sistem ordonat de trei vectori liniar independenţi din spaţiu. Fixăm, ca şi mai sus, un punct O şi alegem trei puncte A_1, A_2, A_3 astfel încât să avem $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$, $i = 1,2,3$. Sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ se numeşte *drept* dacă în planul OA_1A_2, văzut din punctul A_3, rotaţia în jurul punctului O care aplică A_1 peste A_2 pe cel mai scurt drum, se face în sens trigonometric. În caz contrar, adică dacă rotaţia se face în sensul acelor de ceasornic, sistemul se numeşte *stâng*.

Observaţie. Se poate constata imediat că dacă sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ este drept, atunci tot drepte sunt şi sistemele $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1\}$ şi $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, în timp ce sistemele $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1\}$, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2\}$ şi $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ sunt stângi.

1.7 Puncte şi vectori. Rudimente de geometrie afină

După cum am văzut, mulţimea vectorilor liberi din plan (respectiv din spaţiu) formează un spaţiu vectorial real bidimensional (respectiv tridimensional). Pe de altă parte, dacă fixăm un punct O (fie în plan, fie în spaţiu, nu contează), atunci fiecărui punct M putem să-i asociem, în mod unic, vectorul $\overrightarrow{OM}$, pe care îl vom numi *vectorul de poziţie* al lui M (relativ la originea O) sau *raza vectoare* a lui M. Dacă punctul O este subînţeles, atunci vom folosi, pur şi simplu, notaţia $\overrightarrow{OM} \equiv \mathbf{r}_M$ sau chiar $\overrightarrow{OM} \equiv \mathbf{r}$. Punctul O odată fixat, obţinem o bijecţie între mulţimea vectorilor liberi din plan (sau spaţiu) şi mulţimea punctelor din plan (sau spaţiu).

În aparenţă, folosind această bijecţie, putem transfera structura de spaţiu vectorial de pe mulţimea vectorilor liberi pe mulţimea punctelor. Asta ar însemna să fim capabili să adunăm, de exemplu, punctele sau să le înmulţim cu scalari reali oarecare. Din păcate, acest lucru nu este posibil şi vom explica, în cele ce urmează, de ce.

Adunarea dintre un punct şi un vector. Operaţii cu puncte

Fie $O \in \mathbb{E}^3$ un punct dat. Considerăm alte două puncte, P şi Q. Atunci are loc relaţia

$$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PQ}$$

sau

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}. \tag{1.7.1}$$

Rescriem ecuaţia (8.1.1) sub forma

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} \tag{1.7.2}$$

("reducem" punctul O). Avem voie să utilizăm o astfel de notaţie, pentru că vectorul $\overrightarrow{PQ}$ *nu* depinde de alegerea punctului O.

Dăm, mai general, următoarea definiţie:

Definiţia 1.8. Suma dintre un punct P şi un vector $\mathbf{v}$ este un *punct* Q (unic determinat!) astfel încât $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$. Vom scrie

$$Q = P + \mathbf{v}. \tag{1.7.3}$$

1.8 Coordonate pe dreaptă

Fie Δ o dreaptă oarecare. Alegem pe ea un vector nenul oarecare, $\mathbf{e}$, pe care îl vom numi *vector unitar* sau *versor*.

Dacă acum $\mathbf{a}$ este un vector oarecare de pe dreaptă, atunci, conform secţiunii precedente, există un singur număr real x astfel încât $\mathbf{a} = x\mathbf{e}$. Numărul x se numeşte *componenta* vectorului $\mathbf{a}$, relativ la dreapta Δ, înzestrată cu versorul $\mathbf{e}$.

Alegem pe dreapta Δ, înzestrată cu versorul $\mathbf{e}$, un punct O, pe care îl vom numi *originea coordonatelor*. Dreapta Δ se va numi de-acum *axă de coordonate*. Dacă M este un punct oarecare al dreptei, vectorul $\overrightarrow{OM}$ se va numi *rază vectoare* sau *vector de poziţie* al punctului M, iar componenta acestui vector se numeşte *coordonata punctului M*.

Alegem, mai departe, punctul E pe dreaptă astfel încât să avem $\overrightarrow{OE} = \mathbf{e}$. Segmentul OE va fi ales ca scară a lungimilor pe dreapta Δ. Prin urmare, coordonata unui punct M de pe dreaptă nu este altceva decât magnitudinea (OM) a segmentului orientat $\overline{OM}$. Pentru a scoate în evidenţă că numărul real x este coordonata punctului M, vom scrie, de regulă, $M(x)$. Trebuie remarcat că există o infinitate de moduri

Figura 1.3:

de a asocia coordonate punctelor de pe dreaptă. Coordonata unui punct este unic determinată doar în momentul în care s-au ales:

- versorul dreptei;
- originea dreptei.

Datorită introducerii coordonatelor, fiecărui punct M de pe axa de coordonate Δ i se pune în corespondenţă un singur număr real – coordonata sa x. Invers, pentru fiecare număr real x există un singur punct M de pe axa Δ a cărui coordonată este x. Astfel, poziţia fiecărui punct de pe axa de coordonate este unic determinată prin prescrierea coordonatei acelui punct.

Notăm cu $\rho(M_1, M_2)$ distanţa dintre punctele M_1 şi M_2, adică lungimea segmentului M_1M_2. Această distanţă se poate exprima cu ajutorul coordonatelor. Mai precis, avem următoarea teoremă:

Teorema 1.8. *Pentru orice puncte $M_1(x_1)$ şi $M_2(x_2)$ de pe axa de coordonate au loc egalităţile:*

$$(M_1M_2) = x_2 - x_1, \tag{1.8.1}$$
$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|. \tag{1.8.2}$$

Demonstraţie Din teorema lui Chasles rezultă că

$$(OM_1) + (M_1M_2) = (OM_2) \implies (M_1M_2) = (OM_2) - (OM_1).$$

Utilizând definiţia coordonatelor, obţinem egalitatea (1.8.1). Formula (1.8.2) rezultă imediat din formula (1.8.1). □

1.9 Coordonate în plan

1.9.1 Coordonate afine

Peste tot în această secţiune vom considera că toate punctele şi toţi vectorii se află într-un plan Π.

Definiţia 1.9. Fie O un punct şi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – doi vectori liniar independenţi (necoliniari) din planul Π. Tripletul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ se numeşte *reper afin* sau *sistem de coordonate afin* în planul Π.

Ataşăm vectorii $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$ punctului O, construind punctele E_1 şi E_1 astfel încât $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1$ şi $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2$. Segmentele orientate $\overline{OE_1}$ şi $\overline{OE_2}$ definesc două axe de coordonate, Ox şi Oy. Punctul O se numeşte *originea coordonatelor*, iar vectorii $\mathbf{e}_1$ şi $\mathbf{e}_2$ – *vectorii bazei*.

Fie acum $\mathbf{a}$ un vector oarecare din planul Π. Din teorema 1.4 rezultă că $\mathbf{a}$ se poate reprezenta în mod unic sub forma

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2. \tag{1.9.1}$$

Definiţia 1.10. Coeficienţii x şi y din descompunerea (1.9.1) se numesc *componentele* vectorului $\mathbf{a}$ relativ la sistemul de coordonate $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

După cum s-a văzut în secţiunea 1.4, x şi y sunt, de fapt, magnitudinile proiecţiilor vectorului $\mathbf{a}$ pe axele Ox şi Oy, paralel cu axele OY, respectiv Ox. Pentru a scoate în evidenţă faptul că x şi y sunt componentele vectorului $\mathbf{a}$ vom scrie $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y)$ sau, pur şi simplu, $\mathbf{a}(x, y)$.

Fie, acum, M un punct oarecare al planului Π, în care s-a fixat un sistem de coordonate afine $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Vectorul $\overrightarrow{OM}$ se numeşte *raza vectoare* sau *vectorul de poziţie* al punctului M.

Definiţia 1.11. Componentele x şi y ale vectorului $\overrightarrow{OM}$ se numesc *coordonate afine* ale punctului M relativ la reperul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. De regulă, x se numeşte *abscisă*, în timp ce y se numeşte *ordonată*.

Un sistem de coordonate afine se mai notează şi cu Oxy, dacă vectorii bazei sunt subînţeleşi. Dacă x şi y sunt coordonatele unui punct M, vom utiliza în mod frecvent notaţia $M(x, y)$.

Introducerea componentelor vectorilor permite înlocuirea diferitelor relaţii dintre vectori cu relaţii între componentele lor. Avem, de exemplu:

Teorema 1.9. *Componentele unei combinaţii liniare de vectori sunt egale cu aceeaşi combinaţie liniară a componentelor vectorilor. Mai precis, dacă*

$$\mathbf{a}(X,Y) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{a}_i(X_i, Y_i),$$

atunci

$$X = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j Y_j.$$

Demonstraţie Cum componentele vectorilor nu sunt altceva decât magnitudinile proiecţiilor acestor vectori pe axele de coordonate, teorema rezultă direct din proprietăţile proiecţiilor. □

Consecinţa 1.3. *Dacă $X(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$ sunt două puncte din plan, atunci*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

adică pentru a obţine componentele vectorului definit de segmentul orientat $\overline{AB}$, trebuie să scădem din coordonatele extremităţii sale coordonatele originii.

Demonstraţie Rezultă imediat din teorema precedentă şi din relaţia

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

□

Consecinţa 1.4. *Pentru ca doi vectori $\mathbf{a}(x_1, y_1)$ şi $\mathbf{b}(x_2, y_2)$ să fie coliniari, este necesar şi suficient ca ei să aibă componentele corespunzătoare proporţionale.*

Demonstraţie După cum am văzut în secţiunea 1.5, vectorii **a** şi **b** sunt coliniari dacă şi numai dacă între ei există o relaţie de forma

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}, \tag{1.9.2}$$

cu λ real. Din teorema 1.9 rezultă că egalitatea (1.9.2) este echivalentă cu două egalităţi numerice:

$$x_2 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda y_1, \tag{1.9.3}$$

ceea ce încheie demonstraţia. Remarcăm că egalităţile (1.9.3) implică şi egalitatea

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1},$$

cu condiţia ca ambii numitori să fie diferiţi de zero. Menţionăm, pe de altă parte, că se poate utiliza convenţia că de fiecare dată când un numitor este zero, se admite că şi numărătorul care îi corespunde este zero, ceea ce înseamnă că, formal, putem scrie egalitatea precedentă şi când unul dintre numitori se anulează. □

Consecinţa 1.5. *Coordonatele mijlocului A al unui segment de dreaptă cu capetele în punctele $A_1(x_1, y_1)$ şi $A_2(x_2, y_2)$ sunt*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

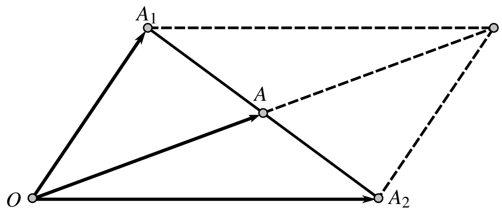


Figura 1.4:

Demonstrație Rezultă imediat din egalitatea

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right)$$

(vezi figura 1.4) şi din teoremă. $\square$

1.9.2 Coordonate rectangulare

Presupunem că în planul Π a fost aleasă o unitate de măsură pentru lungime. Alegem un punct O şi doi vectori de lungime 1, perpendiculari unul pe celălalt, $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{j}$. Sistemul afin de coordonate $(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$ se numeşte *sistem de coordonate rectangular* sau *cartezian*. Despre baza $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ vom spune că este *ortonormată* (ceea ce înseamnă că vectorii sunt *ortogonali*, adică perpendiculari şi "normaţi", adică de lungime 1).

Toate proprietăţile valabile într-un sistem de coordonate afin oarecare rămân adevărate şi într-un sistem rectangular, dar, de regulă, expresiile care intervin sunt mult mai simple atunci când sunt scrise în coordonate carteziene.

1.9.3 Coordonate polare

Alegem în planul Π un punct O, pe care îl numim *pol* şi o semidreaptă OA, pe care o vom numi *axă polară*. Mai alegem o unitate de măsură pentru lungime şi, în fine, un sens pozitiv de rotaţie în jurul polului O. De regulă, sensul pozitiv este sensul invers mersului acelor de ceasornic. Unghiurile se măsoară în radiani.

Fie acum M un punct oarecare al planului. Vom nota cu ρ distanţa de la M la polul O şi cu φ mărimea unghiului dintre semidreptele OM şi OA. Mărimile ρ şi φ se numesc *coordonate polare* ale punctului M. Mai precis, ρ se numeşte *rază polară*, în timp ce φ se numeşte *unghi polar*. Fiecărui punct din plan i se poate ataşa, în mod unic, o rază polară $\rho \geq 0$. Valorile lui φ, în schimb, pentru puncte diferite de pol, sunt definite până la un termen $2k\pi$, unde k este un număr întreg. Pentru ca fiecărui punct din plan, diferit de pol, să i se asocieze un singur unghi polar, este suficient să considerăm că $-\pi < \varphi \leq \pi$. Aceste valori ale lui φ se numesc *principale*. Vom spune acum că am introdus în plan *un sistem de coordonate polare*.

Considerăm în plan, simultan, un sistem de coordonate carteziene Oxy şi un sistem de coordonate polare astfel încât polul să coincidă cu originea coordonatelor carteziene, iar axa polară să coincidă cu direcţia pozitivă a axei Ox. În sfârşit, vom considera ca sens pozitiv de rotaţie în jurul polului acel sens

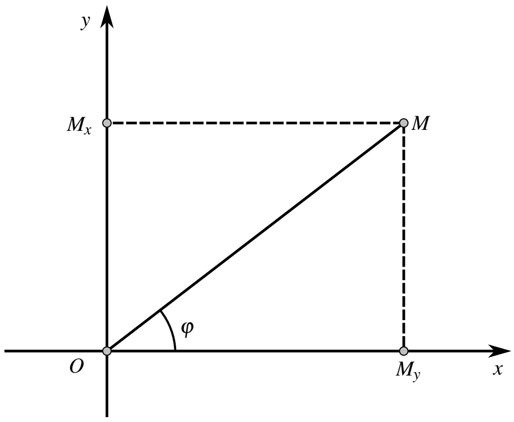


Figura 1.5:

în care trebuie să rotim direcţia pozitivă a axei Ox, pentru a o suprapune, pe drumul cel mai scurt, peste direcţia pozitivă a axei Oy.

Fie M un punct oarecare din plan (diferit de origine), x, y – coordonatele sale carteziene, iar ρ, φ – coordonatele sale polare. Avem, în mod evident:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \tag{1.9.4}$$

Formulele (1.9.4) exprimă coordonatele carteziene ale punctului M în funcţie de coordonatele sale polare. Pentru exprimarea coordonatelor polare în funcţie de cele carteziene, din nou, în ipoteza că punctul M nu coincide cu polul, se pot folosi formulele următoare, care rezultă imediat din (1.9.4):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Dacă $x \neq 0$ (adică dacă M nu este situat pe axa Oy, atunci putem scrie

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Din această ecuaţie noi trebuie să obţinem unghiul φ. După cum se ştie din trigonometrie, soluţia generală a ecuaţiei de mai sus este

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

unde $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Vom alege numărul întreg k astfel încât unghiul φ să fie în intervalul $(-\pi, \pi)$. Distingem patru cazuri, în funcţie de cadranul în care se află punctul M.

(1) Dacă M se află în primul cadran, atunci $x > 0, y \geq 0$, prin urmare $\operatorname{arctg}(y/x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Cum φ trebuie să se afle în acelaşi interval, putem alege $k = 0$, deci

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

(2) Dacă M se află în cel de-al doilea cadran, adică $x < 0, y \geq 0$, atunci $\operatorname{arctg}(y/x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Cum φ trebuie să fie în intervalul $(\pi/2, \pi]$, k trebuie să fie egal cu 1, deci

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi.$$

(3) Dacă M se află în cel de-al treilea cadran, adică $x < 0, y \geq 0$, atunci $\operatorname{arctg}(y/x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Cum φ trebuie să fie în intervalul $[-\pi, -\pi/2)$, k trebuie să fie egal cu -1, deci

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi.$$

(4) Dacă M se află în cel de-al patrulea cadran, adică $x > 0, y \geq 0$, atunci $\operatorname{arctg}(y/x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Cum φ trebuie să fie în intervalul $(-\pi/2, 0]$, k trebuie să fie egal cu 0, deci

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

1.10 Coordonate în spaţiu

1.10.1 Coordonate afine şi rectangulare

Fie O un punct oarecare al spaţiului şi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – trei vectori liniar independenţi (adică necoplanari).

Definiţia 1.12. Cuadrupletul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ se numeşte *reper afin* sau *sistem de coordonate afine* în spaţiu. Punctul O se numeşte *originea coordonatelor*, iar vectorii $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ se numesc *vectorii bazei*.

Definiţia 1.13. Se numesc *componente* ale unui vector $\mathbf{a}$ relativ la reperul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ coeficienţii x, y, z ai descompunerii:

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Coordonatele unui punct M, relativ la acelaşi reper sunt, prin definiţie, componentele x, y, z ale vectorului său de poziţie, $\overrightarrow{OM}$. Coordonata x se numeşte *abscisă*, coordonata y – *ordonată*, iar coordonata z – *cotă*.

Un sistem de coordonate afin se mai notează cu $Oxyz$, dacă vectorii bazei sunt subînţeleşi. Construim punctele E_1, E_2, E_3 astfel încât

$$\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2, \overrightarrow{OE_3} = \mathbf{e}_3. \tag{1.10.1}$$

Segmentele orientate $\overline{OE_1}, \overline{OE_2}$ şi $\overline{OE_3}$ determină cele trei *axe de coordonate*, Ox, Oy şi Oz. Cele trei plane determinate de câte două axe de coordonate se numesc *plane de coordonate*. Aceste plane împart spaţiul în opt zone, care se numesc *octanţi de coordonate*.

Ca şi în cazul reperelor plane, distingem sisteme de coordonate *drepte* şi stângi. Considerăm un triplet de vectori necoplanari $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Ataşam aceşti vectori unui punct O, adică determinăm punctele E_1, E_2, E_3, astfel încât să fie verificate relaţiile (1.10.1). Rotim segmentul orientat $\overline{OE_1}$, în planul OE_1E_2, în jurul lui O, pe cel mai scurt drum, până când el coincide, ca direcţie şi sens, cu segmentul orientat $\overline{OE_2}$. Dacă această rotaţie, privită din extremitatea segmentului orientat $\overline{OE_3}$ (cu alte cuvinte, din punctul E_3) se produce în sensul invers mersului acelor de ceasornic, vom spune că tripletul de vectori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ este *drept*, altfel vom spune că este *stâng*.

Un sistem de coordonate $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ se numeşte *drept* sau stâng, după cum tripletul $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ este drept sau stâng. Peste tot, în cele ce urmează, sistemele de coordonate vor fi totdeauna drepte, dacă nu se menţionează altfel.

Cel mai simplu dintre sistemele de coordonate afine în spaţiu este sistemul de coordonate rectangular sau cartezian. Presupunem că în spaţiu s-a ales o unitate de măsură pentru lungime. Atunci un sistem de coordonate rectangular sau cartezian în spaţiu este determinat de alegerea unui punct O şi a trei vectori de lungine 1, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, perpendiculari între ei.

Teorema 1.9 şi consecinţele sale se pot adapta fără probleme la cazul spaţiului, singura diferenţă fiind faptul că se mai adaugă încă o coordonată.

1.10.2 Coordonate cilindrice

Alegem o unitate de măsură pentru lungime în spaţiu. Alegem un plan oarecare, Π şi în acest plan alegem un punct O şi o semidreaptă Ox, care pleacă din acest punct. Alegem un sens de rotaţie pozitiv în planul Π, în jurul punctului O. Atunci în planul Π este definit un sistem de coordonate polar, în care polul este O, iar axa polară este Ox. În sfârşit, alegem o axă OZ, perpendiculară pe planul Π şi orientată astfel încât rotaţia pozitivă din planul Π, privită din direcţia pozitivă a axei Oz să se producă în sens invers mersului acelor de ceasornic.

Fie, acum, M un punct oarecare din spaţiu, M_1 – proiecţia sa ortogonală pe planul Π şi M_z – proiecţia ortogonală a punctului M pe axa Oz.

Coordonatele cilindrice ale punctului M sunt trei numere ρ, φ, z, unde ρ, φ sunt coordonatele polare ale punctului M_1 în planul Π, iar $z = (OM)$. Denumirea de "coordonate cilindrice" este legată de faptul că suprafaţa ce conţine toate punctele corespunzând aceleiaşi valori a coordonatei ρ este un cilindru. Fiecărui punct din spaţiu i se pot asocia coordonate ρ şi z unice, iar ρ este întotdeauna pozitivă. Valoarea lui φ este definită doar pentru puncte ce nu se află pe axa Oz şi, ca şi în cazul coordonatelor polare, este definită până la un multiplu întreg de π. Dacă în spaţiu este dat şi un sistem de coordonate cartezian, cu originea în O şi astfel încât axele Ox şi Oz să coiuncidă cu axele cu acelaşi nume ale sistemului cilindric, atunci coordonatele carteziene se pot exprima în funcţie de cele cilindrice prin relaţiile:

$$x = \rho \cos \varphi,\ y = \rho \sin \varphi,\ z = z.$$

1.10.3 Coordonate sferice

Pentru introducerea coordonatelor sferice este necesar, ca şi în cazul coordonatelor cilindrice, şă alegem o unitate de măsură pentru lungime, un plan Π, cu un punct O şi o axă Ox, precum şi a unei axe Oz.

Fie M un punct oarecare din spaţiu, iar M_1 – proiecţia sa ortogonală pe planul Π. Fie, mai departe, ρ – distanţa de la punctul M la punctul O; θ – unghiul dintre axa Oz şi segmentul orientat $\overline{OM}$ şi, în fine, φ – unghiul cu care trebuie rotită axa Ox în aşa fek încât să coincidă cu semidreapta OM_1. Numerele ρ, θ, φ se numesc *coordonate sferice* ale punctului M. Unghiul φ se numeşte *longitudine*, iar unghiul φ – *latitudine*.

Denumirea de "coordonate sferice" provine din faptul că suprafaţa ce conţine toate punctele cu o aceeaşi valoare a coordonatei ρ este o sferă. Fiecărui punct al spaţiului, diferit de O, îi corespund valori bine definite ale coordonatelor ρ şi θ. ρ este întotdeauna strict pozitivă, iar unghiul θ se consideră a

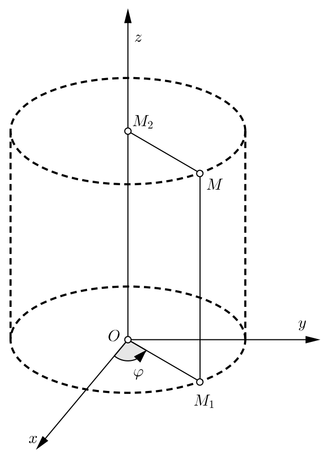


Figura 1.6:

varia în intervalul $[0,\pi]$. Valoarea lui φ nu este definită pentru punctele de pe axa Oz. Acolo unde este definită, ca şi în cazul coordonatelor polare, această valoare este definită doar până la un multiplu întreg de π. Ca şi în cazul coordonatelor cilindrice, dacă alegem şi un sistem de coordonate cartezian în aşa fel încât originile celor două sisteme să coincidă, ca şi axele Ox şi Oz, atunci coordonatele carteziene se exprimă în funcţie de cele sferice prin relaţiile:

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta.$$

1.11 Transformări de coordonate

1.11.1 Coordonate afine

Considerăm, în plan, două sisteme de coordonate afine, $(O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ şi $(O',\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2')$. Primul sistem îl vom numi *sistemul vechi*, iar cel de-al doilea – *sistemul nou*. Presupunem că se cunosc coordonatele punctului O', precum şi componentele vectorilor $\mathbf{e}_1'$ şi $\mathbf{e}_2'$ relativ la sistemul vechi:

$$O'(\alpha_1,\alpha_2),\ \mathbf{e}_1'(\alpha_{11},\alpha_{21}),\ \mathbf{e}_2'(\alpha_{12},\alpha_{22}).$$

Presupunem acum că un punct oarecare M din plan are coordonatele vechi x şi y şi coordonatele noi x' şi y'. Vrem să găsim o relaţie între cele două perechi de coordonate ale acestui punct. Avem, înainte de toate,

$$\begin{cases}\mathbf{e}_1'=\alpha_{11}\mathbf{e}_1+\alpha_{21}\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2'=\alpha_{12}\mathbf{e}_1+\alpha_{22}\mathbf{e}_2\\ \overrightarrow{OO'}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2, & \overrightarrow{OM}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2,\ \overrightarrow{O'M}=x'\mathbf{e}_1'+y'\mathbf{e}_2'\end{cases}. \tag{1.11.1}$$

Mai departe,

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}.$$

Din această egalitate, utilizând formulele (1.11.1), obţinem

$$\begin{aligned}x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2&=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha\mathbf{e}_2+x'(\alpha_{11}\mathbf{e}_1+\alpha_{21}\mathbf{e}_2)+y'(\alpha_{12}\mathbf{e}_1+\alpha_{22}\mathbf{e}_2)\\&=(\alpha_{11}x'+\alpha_{12}y'+\alpha_1)\mathbf{e}_1+(\alpha_{21}x'+\alpha_{22}y'+\alpha_2)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

În virtutea teoremei 1.4, obţinem atunci formulele de transformare

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_1 \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_2 \end{cases}. \tag{1.11.2}$$

Dacă în raţionamentele precedente schimbăm între ele coordonatele vechi şi cele noi, obţinem formulele de transformare

$$\begin{cases} x' = \beta_{11}x + \beta_{12}y + \beta_1 \\ y' = \beta_{21}x' + \beta_{22}y + \beta_2 \end{cases}, \tag{1.11.3}$$

unde

$$O(\beta_1, \beta_2),\ \mathbf{e}_1(\beta_{11}, \beta_{21}),\ \mathbf{e}_2(\beta_{12}, \beta_{22}).$$

Se poate constata cu uşurinţă că $\alpha_i = -\beta_i$, $i = 1,2$ şi că matricea

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

este inversa matricii

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}.$$

Considerăm acum, alături de punctul M, încă un punct, N, ale cărui coordonate vechi şi noi le vom nota, respectiv, cu x_1, y_1 şi x'_1, y'_1. Atunci, din formulele (1.11.2), obţinem

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}y'_1 + \alpha_1 \\ y_1 = \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}y'_1 + \alpha_2 \end{cases}. \tag{1.11.4}$$

După cum se ştie, componentele (vechi şi noi) ale vectorului $\overrightarrow{MN}$ vor fi date de

$$X = x_1 - x,\ Y = y_1 - y$$
$$X' = x'_1 - x',\ Y' = y'_1 - y'.$$

Utilizând formulele (1.11.2) şi (1.11.4), obţinem formulele de transformare pentru componentele unui vector:

$$X = \alpha_{11}X' + \alpha_{12}Y',$$
$$Y = \alpha_{21}X' + \alpha_{22}Y'.$$

Transformările de coordonate în spaţiu se scriu în mod absolut analog. Fie $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ şi $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ două sisteme de coordonate afine în spaţiu (cel vechi şi cel nou). Presupunem, de asemenea, ca şi mai înainte, că se cunosc coordonatele noii origini şi componentele vectorilor noii baze relativ la vechea bază:

$$O'(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),\ \mathbf{e}'_1(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}),$$
$$\mathbf{e}'_2(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{23}),\ \mathbf{e}'_3(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}).$$

Atunci vechile coordonate se exprimă în funcţiile de cele noi prin formulele:

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' + \alpha_1 \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' + \alpha_2 \\ z = \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' + \alpha_3 \end{cases}.$$

Cu ajutorul unor formule analoage se exprimă şi coordonatele noi în funcţie de coordonatele vechi. În ceea ce priveşte regulile de transformare a componentelor vectorilor, se obţine:

$$\begin{aligned} X &= \alpha_{11}X' + \alpha_{12}Y' + \alpha_{13}Z', \\ Y &= \alpha_{21}X' + \alpha_{22}Y' + \alpha_{23}Z', \\ Z &= \alpha_{31}X' + \alpha_{32}Y' + \alpha_{33}Z'. \end{aligned}$$

1.11.2 Coordonate rectangulare în plan

Considerăm acum cazul particular al transformărilor de coordonate în plan, când ambele sisteme de coordonate, atât cel vechi cât şi cel nou, sunt ortogonale. Vom nota sistemul de coordonate vechi cu $(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$, iar cel nou – cu $(O',\mathbf{i}',\mathbf{j}')$.

Vom distinge două cazuri, după cum rotaţiile pe drumul cel mai scurt de la $\mathbf{i}$ la $\mathbf{j}$ şi de la $\mathbf{i}'$ la $\mathbf{j}'$ se fac:

a) în aceeaşi direcţie (fie ambele în sensul acelor de ceasornic, fie ambele în sens opus mersului acelor de ceasornic);

b) în direcţii opuse.

În ambele cazuri vom nota cu φ unghiul dintre vectorii $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{i}'$, în sensul celei mai scurte rotaţii de la $\mathbf{i}$ la $\mathbf{j}$. Dacă notăm cu ψ unghiul dintre vectorii $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{j}'$, atunci în primul caz avem

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

în timp ce în cel de-al doilea caz avem

$$\psi = \varphi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

În ambele cazuri, avem următoarele expresii pentru componentele vectorilor $\mathbf{i}'$ şi $\mathbf{j}'$:

$$\alpha_{11} = \cos\varphi,\ \alpha_{21} = \sin\varphi,\ \alpha_{12} = \cos\psi,\ \alpha_{22} = \sin\psi.$$

În primul caz, formulele (1.11.2) capătă forma

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + \alpha_1, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + \alpha_2, \end{cases} \tag{1.11.5}$$

în timp ce în al doilea caz, avem:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi + \alpha_1, \\ y = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi + \alpha_2. \end{cases}$$

Sunt interesante următoarele două cazuri particulare importante ale formulelor (1.11.5):

1. Presupunem că $\mathbf{i} = \mathbf{i}'$ şi $\mathbf{j} = \mathbf{j}'$. Atunci formulele (1.11.5) capătă forma:

$$\begin{cases} x = x' + \alpha_1, \\ y = y' + \alpha_2 \end{cases}$$

   şi se numesc *formulele de transformare a coordonatelor prin transportul paralel (translaţia) axelor de coordonate cu vectorul* $\mathbf{a}(\alpha_1, \alpha_2)$.

2. Dacă $O' = O$, atunci formulele (1.11.5) capătă forma:

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi, \end{cases}$$

   şi se numesc *formulele de transformare a coordonatelor prin rotaţia sistemului în jurul originii cu unghiul* φ.

1.12 Produsul scalar al vectorilor

1.12.1 Definiţie şi proprietăţi fundamentale

Definiţia 1.14. Fie $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ doi vectori. Se numeşte *produs scalar* al celor doi vectori numărul real, notat $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, egal cu produsul dintre normele celor doi vectori şi al cosinusului unghiului dintre ei, adică:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos\varphi, \tag{1.12.1}$$

unde φ este unghiul dintre cei doi vectori.

Alegem un punct oarecare O în spaţiu şi construim un segment orientat $\overline{OA}$ astfel încât

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Notăm cu Δ axa definită de segmentul orientat $\overline{OA}$. Atunci

$$\|\mathbf{b}\| \cos\varphi = \mathrm{pr}_\Delta \mathbf{b},$$

unde proiecţia este ortogonală. Prin urmare, formula (1.12.1) se poate rescrie sub forma

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|a\| \,\mathrm{pr}_\Delta \mathbf{b}. \tag{1.12.2}$$

Denumirea de "produs scalar" este legată atât de faptul că rezultatul produsului scalar este un număr, cât şi de faptul că acest tip de produs are anumite proprietăţi comune cu produsul numerelor reale, deşi, după cum vom vedea mai jos, există diferenţe esenţiale între cele două tipuri de produse.

Vom enumera, în cele ce urmează, principalele proprietăţi ale produsului scalar şi le vom demonstra pe cele care nu sunt chiar evidente.

1) comutativitatea:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \tag{1.12.3}$$

Această proprietate rezultă direct din definiţia produsului scalar;

2) compatibilitatea cu înmulţirea vectorilor cu scalari:

$$(\lambda \mathbf{a})\cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}), \tag{1.12.4}$$

$$\mathbf{a}\cdot(\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}), \tag{1.12.5}$$

Este clar că, datorită comutativităţii produsului scalar, dacă una dintre cele două relaţii are loc, atunci are loc şi cealaltă, aşa că este suficient să demonstrăm una dintre ele, de exemplu (1.12.5). Utilizând formula (1.12.2) şi proprietăţile proiecţiei, obţinem succesiv:

$$\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|\,\mathrm{pr}_\Delta(\lambda\mathbf{b}) = \lambda\|\mathbf{a}\|\,\mathrm{pr}_\Delta\,\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

3) distributivitatea faţă de adunarea vectorilor:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}, \tag{1.12.6}$$

$$(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}. \tag{1.12.7}$$

Din nou, datorită comutativităţii, este suficient să demonstrăm prima afirmaţie. Vom utiliza, şi de data aceasta, reprezentarea (1.12.2) a produsului scalar,precum şi proprietăţile proiecţiei. Avem, aşadar,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \|\mathbf{a}\|\,\mathrm{pr}_\Delta(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \|\mathbf{a}\|\,\mathrm{pr}_\Delta\,\mathbf{b}+\|\mathbf{a}\|\,\mathrm{pr}_\Delta\,\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

Pe baza acestor trei proprietăţi, putem trage concluzia că înmulţirea combinaţiilor liniare de vectori se poate face termen cu termen, ca în exemplul următor:

$$(2\mathbf{a}+3\mathbf{b})(4\mathbf{c}-5\mathbf{d}) = 8\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}-10\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+12\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}-15\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}.$$

Ultimele două proprietăţi au un caracter oarecum mai "geometric".

4) Doi vectori **a** şi **b** sunt perpendiculari dacă şi numai dacă produsul lor scalar este egal cu zero:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0. \tag{1.12.8}$$

Într-adevăr, începem prin a scrie relaţia (1.12.8) sub forma

$$\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\varphi = 0. \tag{1.12.9}$$

Dacă vectorii sunt perpendiculari, atunci $\varphi = \pi/2$, deci $\cos\varphi = 0$, de unde $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$. Invers, să presupunem acum că vectorii verifică relaţia (1.12.9). Dacă unul dintre vectori este egal zero, atunci el poate fi considerat pe orice alt vector, deci condiţia este îndeplinită. Dacă ambii vectori sunt nenuli, atunci şi normele lor sunt nenule, deci relaţia (1.12.9) poate fi îndeplinită doar dacă $\cos\varphi = 0$, adică dacă cei doi vectori sunt perpendiculari.

Remarcăm că proprietatea 4) marchează o diferenţă esenţială dintre produsul scalar al vectorilor şi produsul numerelor reale. Astfel, produsul a două numere reale poate fi egal cu zero dacă şi numai dacă cel puţin unul dintre numere este egal cu zero. Produsul scalar a doi vectori, în schimb, poate fi egal cu zero şi dacă ambii vectori sunt diferiţi de zero.

5) Produsul scalar a unui vector cu el însuşi este egal cu pătratul normei acestui vector:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2. \tag{1.12.10}$$

Afirmaţia rezultă imediat din definiţia produsului scalar a doi vectori (în acest caz, fireşte, $\varphi = 0$).

Observaţie. Trebuie să remarcăm, petru evitarea confuziilor, că nu are sens să vorbim de produse scalare de mai mult de doi factori. Produsul scalar a doi vectori este un scalar, prin urmare acest produs nu mai poate fi înmulţit scalar, la rândul său, cu un al treilea vector. Acesta este motivul pentru care nu are sens să ne punem măcar problema asociativităţii produsului scalar al vectorilor liberi.

1.12.2 Exprimarea produsului scalar în coordonate

Alegem, în spaţiu, un sistem de coordonate rectangular, cu originea într-un punct O. Fie $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ baza ortonormată care generează acest sistem de coordonate. Faptul că baza este ortonormată înseamnă, reamintim, că toţi vectorii au lungime 1, iar vectorii sunt perpendiculari unii pe alţii. Din proprietăţile produsului scalar, descrise mai sus, se constată imediat că produsele scalare dintre vectorii bazei sunt date de următoarea tablă de multiplicare:

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \hline \mathbf{i} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{j} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{k} & 0 & 0 & 1 \end{array} \tag{1.12.11}$$

Presupunem acum că se dau doi vectori **a** şi **b**, care au următoarele expresii în raport cu baza de coordonate:

$$\mathbf{a} = X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = X'\mathbf{i}+Y'\mathbf{j}+Z'\mathbf{k}.$$

Utilizând tabla de înmulţire scalară (1.12.11) a vectorilor bazei, produsul scalar dintre **a** şi **b** va fi

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k})\cdot(X'\mathbf{i}+Y'\mathbf{j}+Z'\mathbf{k}) = XX'\mathbf{i}^2+XY'\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+\\ &+XZ'\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+YX'\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+YY'\mathbf{j}^2+YZ'\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}+ZX'\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}+ZZ'\mathbf{k}^2 =\\ &= XX'+YY'+ZZ'.\end{aligned}$$

Aşadar, produsul scalar a doi vectori, daţi prin componentele lor relativ la un sistem de coordonate rectangular $Oxyz$, se exprimă prin formula

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = XX'+YY'+ZZ'. \tag{1.12.12}$$

Cu această expresie, condiţia de ortogonalitate a vectorilor **a** şi **b** se va scrie, prin urmare,

$$XX'+YY'+ZZ' = 0. \tag{1.12.13}$$

De asemenea, combinând formulele (1.12.10) şi (1.12.12), obţinem pentru lungimea vectorului **a** formula

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \tag{1.12.14}$$

Să presupunem acum că se dau două puncte din spaţiu prin coordonatele lor carteziene ortogonale, $M(x,y,z)$ şi $M'(x',y',z')$. După cum se ştie, distanţa $d(M,M')$ dintre cele două puncte este egală cu lungimea vectorului $\overrightarrow{MM'}(x'-x,y'-y,z'-z)$, adică este dată de formula

$$d(M,M') = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}.$$

În sfârşit, utilizând formulele (1.12.1), (1.12.12) şi (1.12.14), putem stabili o formulă pentru calculul cosinusului unghiului format de vectorii $\mathbf{a}(X,Y,Z)$ şi $\mathbf{b}(X',Y',Z')$, daţi prin componentele lor relativ la o bază ortonormată:

$$\cos\varphi = \frac{XX'+YY'+ZZ'}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt{X'^2+Y'^2+Z'^2}}.$$

1.13 Produsul vectorial al vectorilor

1.13.1 Definiţie şi proprietăţi fundamentale

Definiţia 1.15. Produsul vectorial dintre vectorul $\mathbf{a}$ şi vectorul $\mathbf{b}$ este, prin definiţie, vectorul, notat prin $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, determinat prin următoarele condiţii:

1) dacă vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt coliniari, atunci, prin definiţie, produsul lor vectorial $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ este egal cu zero.

2) dacă cei doi vectori nu sunt coliniari, adică fac între ei un unghi φ, cu $0<\varphi<\pi$, atunci produsul lor vectorial se defineşte prin următoarele trei condiţii:

   (i) lungimea vectorului $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ este egală cu $\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cdot\sin\varphi$;

   (ii) vectorul $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ este perpendicular pe ambii vectori $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$;

   (iii) tripletul de vectori $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ este direct.

Vom enumera, mai întâi, proprietăţile fundamentale ale produsului vectorial a doi vectori.

1) Prima proprietate exprimă un fapt de natură geometrică: dacă vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ nu sunt coliniari, atunci norma vectorului $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ este egală cu aria paralelogramului construit pe segmentele OA şi OB, unde O este un punct arbitrar din spaţiu, iar $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$. De asemenea, este clar că aria triunghiului OAB este egală cu jumătate din norma produsului vectorial a vectorilor $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$.

Această proprietate rezultă imediat din chiar definiţia produsului vectorial.

2) Produsul vectorial este *anticomutativ*:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}. \tag{1.13.1}$$

Demonstraţia rezultă, din nou, direct din definiţie.

3) Produsul vectorial este compatibil cu înmulţirea cu scalari a vectorilor:

$$(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}), \tag{1.13.2}$$
$$\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \tag{1.13.3}$$

Datorită anticomutativităţii produsului vectorial, este suficient să demonstrăm una dintre cele două proprietăţi. Vom demonstra, prin urmare, relaţia (1.13.2). Dacă $\lambda=0$, sau dacă cei doi vectori sunt coliniari, atunci ambii membrii ai relaţiei sunt egali cu zero,prin urmare proprietatea are loc. Dă presupunem acum că nu suntem în nici una dintre aceste două situaţii. Lungimea vectorului $\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ este egală cu $|\lambda|\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\varphi$, unde φ este unghiul dintre cei doi vectori. Să evaluăm acum lungimea vectorului din membrul drept. Dacă $\lambda>0$, atunci vectorii $\mathbf{a}$ şi $\lambda\mathbf{a}$ au acelaşi sens, prin urmare unghiul dintre $\lambda\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ este tot φ. Aşadar,

$$\|(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}\| = \|\lambda\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\varphi = |\lambda|\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\varphi.$$

Dacă $\lambda < 0$,atunci vectorii $\lambda\mathbf{a}$ şi $\mathbf{a}$ au sensuri opuse,prin urmare unghiul dintre vectorii $\lambda\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ este egal cu $\pi - \varphi$. Prin urmare, în acest caz, avem:

$$\|(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b}\| = \|\lambda\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin(\pi - \varphi) = |\lambda|\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\varphi.$$

Astfel, vectorii din cei doi membrii ai relaţiei (1.13.2) au acceaşi normă, atât pentru valori pozitive, cât şi pentru valori negative ale scalarului λ. Este clar că aceşti doi vectori sunt coliniari, întrucât ambii sunt perpendiculari vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$. Mai trebuie să demonstrăm, prin urmare, că aceşti vectori au şi acelaşi sens. Se observă, însă, imediat, că pentru $\lambda > 0$ aceşti doi vectori au, ambii, acelaşi sens cu vectorul $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, în timp ce pentru $\lambda < 0$ ei au, ambii, sens opus vectorului $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

4) Produsul vectorial este distributiv faţă de adunarea vectorilor:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \tag{1.13.4}$$

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}. \tag{1.13.5}$$

Din nou, este suficient să demonstrăm prima egalitate, cea de-a doua rezultând, pe urmă, din anticomutativitate.

Egalitatea are loc, în mod evident, dacă unul dintre cei trei vectori este nul sau dacă suma $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ este nulă. Presupunem că nu suntem în nici una dintre aceste situaţii.

Vom demonstra mai întâi egalitatea

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c}_0 = \mathbf{a} \times \mathbf{c}_0 + \mathbf{b} \times \mathbf{c}_0, \tag{1.13.6}$$

unde $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}/\|\mathbf{c}\|$ este un vector unitar.

Vom arăta, mai întâi, cum anume se poate construi produsul vectorial al unui vector oarecare $\mathbf{a}$ cu un vector unitar $\mathbf{c}_0$. Ataşăm vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{c}_0$ unui punct O oarecare, deci construim punctele A şi C astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}_0$. Ducem acum prin punctul O un plan Π, perpendicular pe dreapta OC şi proiectăm ortogonal pe el segmentul orientat $\overline{OA}$. Segmentul orientat $\overline{OA'}$, proiecţia ortogonală pe Π a lui $\overline{OA}$, îl rotim,în planul Π,în jurullui O, cu un unghi de $\pi/2$, în sensul mersului acelor de ceasornic, dacă privim din punctul C. Segmentul orientat $\overline{OA''}$, obţinut în urma rotaţiei, va fi un reprezentant al produsului vectorial al vectorilor $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{c}_0$. Într-adevăr, dacă notăm cu φ unghiul dintre vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{c}_0$, atunci putem scrie:

$$\|\overline{OA''}\| = \|\overline{OA'}\| = \|\overline{OA}\|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{c}_0\|\sin\varphi.$$

În plus, se constată cu uşurinţă că vectorii $\overrightarrow{OA''}$ şi $\mathbf{a} \times \mathbf{c}_0$ au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens.

Trecem acum la demonstrarea relaţiei (1.13.6). Pentru aceasta, fixăm un punct O şi construim punctele A,B,C astfel încât $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}_0$, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$. Construim, mai departe,planul Π, care trece prin punctul O şi este perpendicular pe segmentul orientat $\overline{OC}$. Notăm cu A' şi B' proiecţiile ortogonale ale punctelor A şi B pe planul Π. Rotim triunghiul $OA'B'$ în planul Π, în jurul punctului O, cu un unghi de $\pi/2$, în sensul mersului acelor de ceasornic, dacă privim din punctul C. Se obţine, ca rezultat al rotaţiei, triunghiul $OA''B''$. Avem:

$$\begin{gathered} \overrightarrow{OB''} = \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{A''B''}, \\ \overrightarrow{OB''} = (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c}_0, \quad \overrightarrow{OA''} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}_0, \quad \overrightarrow{A''B''} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}_0. \end{gathered} \tag{1.13.7}$$

Aşadar, din (1.13.7) rezultă egalitatea (1.13.6). Pentru a obţine acum (1.13.4), este suficient să înmulţim relaţia (1.13.6) cu scalarul $\|\mathbf{c}\|$.

Proprietăţile produsului vectorial descrise mai sus permit formularea unei reguli pentru calculul produsului vectorial a două combinaţii liniare de vectori liberi: pur şi simplu se calculează produsul fiecărui termen din prima combinaţie cu fiecare termen din a doua combinaţie şi apoi se însumează rezultatele. De exemplu,

$$(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\times(2\mathbf{c}-3\mathbf{d}) = 2\mathbf{a}\times\mathbf{c}-3\mathbf{a}\times\mathbf{d}+4\mathbf{b}\times\mathbf{c}-6\mathbf{b}\times\mathbf{d}.$$

Observaţie. Produsul vectorial are o serie de similarităţi cu produsul scalar al vectorilor. Sunt, totuşi, o serie de diferenţe care trebuie ţinute minte:

1) Produsul vectorial *nu* este comutativ – ordinea factorilor contează.

2) Produsul vectorial a doi vectori este un vector, nu un scalar. Ca urmare, de data aceasta are sens să considerăm produse de mai mulţi factori. Totuşi, aşa cum vom vedea ceva mai târziu, produsul vectorial *nu* este asociativ.

1.13.2 Expresia produsului vectorial în funcţie de componentele factorilor

Considerăm un sistem de coordonate ortogonal $Oxyz$ şi fie $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ baza ortonormată de coordonate. Este uşor de verificat că vectorii bazei se înmulţesc vectorial după regulile descrise în următoarea tabelă:

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$

Fie, acum, $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ doi vectori daţi prin componentele lor:

$$\mathbf{a} = X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = X'\mathbf{i}+Y'\mathbf{j}+Z'\mathbf{k}.$$

Utilizând distributivitatea produsului vectorial în raport cu adunarea vectorilor, obţinem

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k})(X'\mathbf{i}+Y'\mathbf{j}+Z'\mathbf{k}) = (YZ'-ZY')\mathbf{i}+ \\ +(ZX'-XZ')\mathbf{j}+(XY'-YX')\mathbf{k},\end{aligned}$$

deci

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (YZ'-ZY')\mathbf{i}+(ZX'-XZ')\mathbf{j}+(XY'-YX')\mathbf{k}. \tag{1.13.8}$$

Ţinând cont de regula de dezvoltare a unui determinant de ordinul al treilea după prima linie, formula precedentă se mai poate scrie sub următoarea formă, mult mai uşor de reţinut:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}. \tag{1.13.9}$$

Observaţie. Din expresia analitică (1.13.9) rezultă imediat formule analitice pentru aria paralelogramului şi aria triunghiului determinate de cei doi vectori. Astfel, din formula menţionată rezultă imediat că

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{i}\begin{vmatrix} Y & Z\\ Y' & Z'\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix} X & Z\\ X' & Z'\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix} X & Y\\ X' & Y'\end{vmatrix},$$

adică

$$Aria_{par}\equiv\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|=\sqrt{\begin{vmatrix} Y & Z\\ Y' & Z'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X & Z\\ X' & Z'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X & Y\\ X' & Y'\end{vmatrix}^2}. \tag{1.13.10}$$

Prin urmare, aria triunghiului determinat de cei doi vectori este

$$Aria_{triun}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} Y & Z\\ Y' & Z'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X & Z\\ X' & Z'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X & Y\\ X' & Y'\end{vmatrix}^2}. \tag{1.13.11}$$

Să considerăm acum cazul în care avem trei puncte oarecare din planul xOy: $A(x_A,y_A,0),B(x_B,y_B,0),C(x_C,y_C,0)$. Ele determină doi vectori: $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ şi $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$. Este clar că $\mathbf{a}=\mathbf{a}(x_B-x_A,y_B-y_A,0)$ şi $\mathbf{b}=\mathbf{b}(x_C-x_A,y_B-y_A,0)$. Prin urmare,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_B-x_A & y_B-y_A & 0\\ x_C-x_A & y_C-y_A & 0\end{vmatrix}=\mathbf{k}\begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A\\ x_C-x_A & y_C-y_A\end{vmatrix}=\mathbf{k}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix},$$

de unde rezultă că

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|=\pm\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}.$$

Aşadar, aria triunghiului ABC din planul xOy este dată de formula

$$Aria_{ABC}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}. \tag{1.13.12}$$

Fireşte, semnul se alege astfel încît membrul drept să fie pozitiv. Este, de asemenea, de remarcat, că formula de mai sus ne dă un criteriu de coliniaritate pentru punctele A,B,C. Cum ele sunt coliniare exact atunci când aria triunghiului determinat de ele este zero, adică atunci când triunghiul este degenerat, înseamnă că cele trei puncte sunt coliniare exact atunci când determinantul din membrul drept al ecuaţiei (1.13.12) se anulează.

1.13.3 Dublul produs vectorial

După cum am putut constata până acum, produsul vectorial a doi vectori este, din nou, un vector, de aceea are sens să înmulţim acest vector cu un al treilea vector. Rezultatul acestei operaţii este ceea ce se numeşte *dublu produs vectorial*. Menţionăm că *produsul vectorial nu este asociativ*, de aceea nu se poate renunţa la paranteze aşa cum se face, de exemplu, în cazul produsului numerelor reale sau complexe sau în cazul produsului matricilor. De acest fapt ne putem convinge cu uşurinţă, studiind produsele elementelor bazei canonice a spaţiului tridimensional. Avem, de exemplu:

$$(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},$$

în timp ce

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{j})=0.$$

Fie, prin urmare, **a**, **b** şi **c** trei vectori din spaţiu. După cum am spus mai devreme, *dublul produs vectorial* al celor trei vectori este, prin definiţie, vectorul $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$. Vom demonstra, în cele ce urmează, că are loc următoarea relaţie:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}. \tag{1.13.13}$$

Dacă unul dintre vectori este nul, atunci, desigur, ambii membrii ai egalităţii de mai sus sunt egali cu zero, prin urmare nu avem ce demonstra. Acelaşi lucru se întâmplă, după cum ne putem convinge imediat, dacă vectorii **a** şi **b** sunt coliniari. Vom presupune, prin urmare, că toţi cei trei vectori sunt nenuli, iar vectorii **a** şi **b** sunt necoliniari. Considerăm vectorul $\mathbf{x}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}$.

Alegem o origine O arbitrară a spaţiului şi fie X,A,B,C patru puncte din spaţiu astfel încât să avem $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$, $\overrightarrow{OX}=\mathbf{x}$. Avem, prin urmare,

$$\overrightarrow{OX}=\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\times\overrightarrow{OA}.$$

Din definiţia produsului vectorial, deducem imediat că $\overrightarrow{OX}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{OA}$ şi se află în planul OAB. Pe de altă parte, deoarece tripletul de vectori

$$\{(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}),\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OX}\}$$

este drept, rezultă că vectorii $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OX}$ se află de aceeaşi parte a planului care conţine vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$. În plus, avem

$$\|\overrightarrow{OX}\|=\|\overrightarrow{OA}\|^2\|\overrightarrow{OB}\|\sin\theta,$$

unde θ este unghiul $\angle AOB$. Aceste proprietăţi ale vectorului $\overrightarrow{OX}$ definesc acest unghi în mod unic. Pe de altă parte, ne putem convinge cu uşurinţă că proprietăţile sunt verificate de vectorul

$$(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}.$$

Aşadar,

$$\overrightarrow{OX}=\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\times\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}.$$

Analog se demonstrează că

$$\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\times\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA}.$$

Reperul $\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\}$ este o bază a lui $\mathbb{R}^3$, aşadar există trei numere reale u,v,w astel încât

$$\overrightarrow{OC}=u\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{OB}+w(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}).$$

Dezvoltând $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times \overrightarrow{OC}$ şi ţinând cont de faptul că $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{OA}$ şi pe $\overrightarrow{OB}$, obţinem

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times \overrightarrow{OC} &= u(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA})\overrightarrow{OB} - u(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA} + v(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OB} - \\ &- v(\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA} = \\ &= \left[\left(-u\overrightarrow{OA} - v\overrightarrow{OB} - w(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})\right) \cdot \overrightarrow{OB}\right] \overrightarrow{OA} + \\ &+ \left[\left(u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB} + w(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})\right) \cdot \overrightarrow{OA}\right] \overrightarrow{OB} = \\ &= (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC})\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC})\overrightarrow{OA} = \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}.\end{aligned}$$

Observaţie. Fireşte, are sens să calculăm şi produsul $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Din anticomutativitatea produsului vectorial, obţinem, utilizând relaţia (1.13.13), stabilită mai devreme:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}.$$

Comparând vectorii $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ şi $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ajungem la concluzia că ei pot fie egali doar dacă

$$-(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = 0.$$

Astfel, *o condiţie necesară pentru ca cele două produse vectoriale duble să fie egale este necesar ca cei trei vectori să fie coplanari.* Această condiţie nu este, însă, şi suficientă, întrucât,după cum se vede din egalitatea de mai sus, coeficienţii celor trei vectori nu sunt arbitrari.

Se poate demonstra cu uşurinţă, utilizând relaţia (1.13.13) că pentru orice trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ are loc următoarea identitate (*identitatea lui Jacobi*):

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0. \tag{1.13.14}$$

1.14 Produsul mixt al vectorilor

1.14.1 Definiţie şi proprietăţi fundamentale

Fie $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ trei vectori. Se numeşte *produs mixt* al celor trei vectori numărul

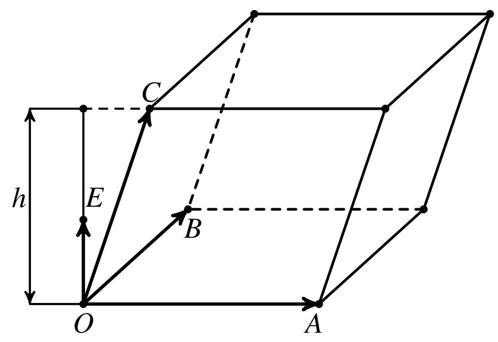
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \tag{1.14.1}$$

Produsul mixt al vectorilor are o interpretare geometrică remarcabilă, exprimată de următoarea teoremă.

Teorema 1.10. *Fie* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *şi* $\mathbf{c}$ *trei vectori necoplanari. Îi ataşam unui punct* O *şi fie* A, B, C *punctele pentru care*

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a},\ \overrightarrow{OB} = \mathbf{b},\ \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}.$$

Atunci produsul mixt $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *este egal cu volumul paralelipipedului construit pe segmentele* OA, OB, OC, *luat cu semnul plus dacă tripletul* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *este direct şi cu semnul minus dacă tripletul este stâng.*



Demonstraţie Fie V volumul paralelipipedului construit pe segmentele OA, OB şi OC, S – aria paralelogramului construit pe segmentele OA şi OB şi h – înălţimea paralelipipedului. Atunci $V = Sh$.

Ataşăm acum punctului O un vector unitar $\overrightarrow{OE}$, perpendicular pe segmentele OA şi OB şi orientat astfel încât tripletul format din vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ şi $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE}$ să fie direct. Atunci, în mod evident, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = S\mathbf{e}$. Prin urmare,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = S(\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}) = S\,\mathrm{pr}_{\mathbf{e}}\,\mathbf{c} = \pm Sh = \pm V,$$

unde se ia semnul plus dacă tripletul $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ este direct şi semnul minus dacă tripletul este stâng. □

Consecinţa 1.6. *Volumul tetraedrului OABC este dat de formula*

$$Vol_{OABC} = \pm\frac{1}{6}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

unde $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$.

Consecinţa 1.7. *Un sistem de trei vectori liniar independenţi* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *este drept dacă* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$ *şi stâng dacă* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$.

Consecinţa 1.8. *Un sistem* ortonormat *de trei vectori liniar independenţi* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *este drept dacă* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1$ *şi stâng dacă* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -1$.

Produsul mixt al vectorilor ne permite, de asemenea, să stabilim un criteriu de coplanaritate a trei vectori, cuprins în teorema care urmează.

Teorema 1.11. *Pentru ca trei vectori* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *şi* $\mathbf{c}$ *să fie coplanari este necesar şi suficient ca produsul lor mixt să fie egal cu zero:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0. \tag{1.14.2}$$

Demonstraţie Dacă vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sunt coplanari, atunci vectorul $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ fie este egal cu zero (dacă vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt coliniari), fie este perpendicular pe vectorul $\mathbf{c}$. În ambele cazuri egalitatea (1.14.2) are loc.

Invers, să presupunem că egalitatea (1.14.2) are loc. Dacă vectorii nu ar fi coplanari, atunci ei ar determina, ca în teorema precedentă, un paralelipiped de volum

$$0 \neq V = \pm(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

ceea ce contrazice egalitatea (1.14.2). □

1.14.2 Expresia produsului mixt în coordonate

Presupunem că, relativ la o bază ortonormată, vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sunt daţi prin componentele lor:

$$\mathbf{a}(X_1, Y_1, Z_1),\ \mathbf{b}(X_2, Y_2, Z_2),\ \mathbf{c}(X_3, Y_3, Z_3). \tag{1.14.3}$$

Utilizând expresiile în coordonate pentru produsul vectorial şi produsul mixt, obţinem:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (Y_1Z_2 - Y_2Z_1)X_3 + (X_2Z_1 - X_1Z_2)Y_3 + \\ + (X_1Y_2 - X_2Y_1)Z_3 = X_1Y_2Z_3 + X_2Y_3Z_1 + X_3Y_1Z_3 - X_1Y_3Z_2 - \\ - X_3Y_2Z_1 - X_2Y_1Z_3.\end{aligned}$$

Este uşor de constatat că această relaţie se poate rescrie cu uşurinţă cu ajutorul unui determinant de ordinul al treilea:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3. \end{vmatrix} \tag{1.14.4}$$

Din proprietăţile determinanţilor se obţin imediat următoarele relaţii între produsele mixte a trei vectori, luaţi în diferite ordini:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}) = -(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}) = -(\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}) = -(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}).$$

Prin urmare:

- dacă facem o permutare circulară a factorilor într-un produs mixt, valoarea produsului nu se schimbă;
- dacă se schimbă ordinea a doi factori (nu neapărat vecini), *semnul* produsului se schimbă (dar valoarea absolută nu!).

Se constată, de asemenea, fie din definiţie, fie din proprietăţile determinanţilor, că *dacă doi factori dintr-un produs mixt sunt liniar dependenţi, produsul se anulează*. În particular, din (1.14.4) rezultă că putem rescrie condiţia necesară şi suficientă (1.14.2) pentru ca vectorii (1.14.3) să fie coplanari sub forma

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.14.5}$$

1.15 Probleme

Problema 1.1. Un vector $\mathbf{v}$ face un unghi de 45° cu axa Ox, un unghi de 60° cu axa Oy, iar componenta sa pe Ox este $v_x = 3\sqrt{2}$. Să se determine modulul vectorului, unghiul pe care îl face cu axa Oz şi celelalte două componente.

Soluţie Fie v modulul vectorului. Atunci componentele vectorului sunt:

$$v_x = v \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} v,$$
$$v_y = v \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} v,$$
$$v_z = v \cdot \cos \gamma.$$

Dar pe v_x îl cunoaştem şi obţinem, prin urmare,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} v = 3\sqrt{2},$$

de unde obţinem că $v = 6$, aşadar $v_y = 3$. Pe de altă parte, $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2 = 36$, adică

$$18 + 9 + 36 \cos^2 \gamma = 36,$$

de unde

$$\cos^2 \gamma = \frac{1}{4}$$

sau

$$\cos \gamma = \pm \frac{1}{2}.$$

□

Problema 1.2. Să se determine un vector care face unghiuri egale cu cele trei axe ale unui reper ortonormat direct, ştiind că modulul vectorului este egal cu unitatea.

Problema 1.3. Ce relaţii trebuie să îndeplinească vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ astfel încât ei să formeze un triunghi?

Problema 1.4. Punctele $A'(1,2,1)$, $B'(2,0,0)$, $C'(0,1,3)$ sunt mijloacele laturilor unui triunghi. Să se determine coordonatele vârfurilor triunghiului.

Problema 1.5. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc paralelogramele arbitrare $ABB'A''$, $BCC'B''$, $CAA'C''$. Să se arate că se poate construi un triunghi având laturile egale şi paralele cu $\overrightarrow{A'A''}, \overrightarrow{B'B''}, \overrightarrow{C'C''}$.

Problema 1.6. Se dă o piramidă cu vârful în S şi baza un paralelogram $ABCD$ ale cărui diagonale se intersectează în punctul O. Să se demonstreze egalitatea vectorială:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

Problema 1.7. Verificaţi că vectorii $\mathbf{a}(4,1,-1), \mathbf{b}(1,2,-5), \mathbf{c}(-1,1,1)$ formează o bază în spaţiu. Determinaţi componentele vectorilor $\mathbf{l}(4,4,-5), \mathbf{m}(2,4,-10), \mathbf{n}(0,3,-4)$ în această bază.

Problema 1.8. Se dau vectorii necoplanari $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Stabiliţi dacă vectorii $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ sunt coplanari în fiecare dintre cazurile de mai jos. În caz afirmativ, indicaţi o relaţie de dependenţă liniară dintre ei.

1) $\mathbf{l} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c},\ \mathbf{m} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{a},\ \mathbf{n} = 2\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$;

2) $\mathbf{l} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{n} = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$;

3) $\mathbf{l} = \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Problema 1.9. În paralelogramul $ABCD$ punctul K este mijlocul segmentului CD, iar punctul O este punctul de intersecţie a diagonalelor. Considerând baza formată din vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AD}$, determinaţi, în această bază, componentele vectorilor $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{MO}$.

Problema 1.10. În trapezul $ABCD$ lungimile bazelor AD şi BC sunt în raportul $3:2$. Luând ca bază vectorii $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BD}$, să se determine,în această bază, componentele vectorilor $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$.

Problema 1.11. În trapezul $ABCD$, lungimile bazelor AD şi BC sunt în raportul $3:1$. O este punctul de intersecţie a diagonalelor trapezului, în timp ce S este punctul de intersecţie al prelungirilor laturilor neparalele. Luând ca bază vectorii $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AB}$, determinaţi componentele vectorilor $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AS}$.

Problema 1.12. Trei puncte, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, necoliniare, sunt vârfuri consecutive ale unui paralelogram. Determinaţi coordonatele celui de-al patrulea punct, D, al paralelogramului.

Problema 1.13. Se dau două puncte distincte $A(x_1, y_1, z_1)$ şi $B(x_2, y_2, z_2)$. Determinaţi coordonatele:

1) punctului M, situat pe segmentul AB, astfel încât $AM : BM = m : n$;

2) punctului M, situat în exteriorul segmentului AB, astfel încât $AM : BM = m : n$.

Problema 1.14. Se dau punctele $A(3, -2)$ şi $B(1, 4)$. Punctul M se află pe dreapta AB, iar $AM = 3AB$. Determinaţi coordonatele punctului M dacă:

1) M se află de aceeaşi parte a punctelor A şi B;

2) punctele M şi B se află de-o parte şi de cealaltă a punctului A.

Problema 1.15. Se dau vectorii necoliniar $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$. Demonstraţi că sistemul de vectori $\mathbf{m} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{n} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{p} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ este liniar dependent, iar vectorii $\mathbf{n}, \mathbf{p}$ sunt necoliniari. Exprimaţi vectorul $\mathbf{m}$ în funcţie de vectorii $\mathbf{n}, \mathbf{p}$.

Problema 1.16. Punctul M este centrul de greutate al triunghiului ABC. Exprimaţi:

1) vectorul $\overrightarrow{MA}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$;

2) vectorul $\overrightarrow{AB}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$;

3) vectorul $\overrightarrow{OA}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM}$, unde O este un punct oarecare din spaţiu.

Problema 1.17. Determinaţi coordonatele vârfurilor unui tetraedru $OABC$ în sistemul de coordonate cu originea în vârful O, în care baza de coordonate este formată din medianele $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ ale feţelor BOC, COA, AOB.

Problema 1.18. Să se determine coordonatele vârfurilor tetraedrului $ABCD$ într-un sistem de coordonate în care originea este centrul de greutate P al feţei BCD, iar baza este formată din vectorii $\overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{CR}, \overrightarrow{DS}$, unde Q, R, S sunt, respectiv, centrele de greutate ale feţelor ACD, ABD şi ABC.

Problema 1.19. a Determinaţi unghiurile dintre vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$, daţi prin intermediul componentelor lor, faţă de un reper ortonormat.

1) $\mathbf{a}(1,-1,1), \mathbf{b}(5,1,1)$;

2) $\mathbf{a}(1,-1,1), \mathbf{b}(-2,2,-2)$;

3) $\mathbf{a}(1,-1,1), \mathbf{b}(3,1,-2)$.

Problema 1.20. Să se determine distanţa dintre punctele A şi B, date prin intermediul coordonatelor lor faţă de o bază ortonormată.

1) $A(4,-2,3), B(4,5,2)$;

2) $A(-3,1,-1), B(-1,1,-1)$;

3) $A(3,-3,-7), B(1,-4,-5)$.

Problema 1.21. Se dau trei vectori: $\mathbf{a}(-1,2), \mathbf{b}(5,1), \mathbf{c}(4,-2)$. Calculaţi:

1) $\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$;

2) $\|\mathbf{a}\|^2-\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$;

3) $\|\mathbf{b}\|^2+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}+3\mathbf{c})$;

Problema 1.22. Se dau trei vectori: $\mathbf{a}(1,-1,1), \mathbf{b}(5,1,1), \mathbf{c}(0,3,-2)$. Calculaţi:

1) $\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$;

2) $\|\mathbf{a}\|^2+\|\mathbf{c}\|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$;

3) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})-\|\mathbf{a}\|^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.

Problema 1.23. Demonstraţi că vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ sunt perpendiculari.

Problema 1.24. Este adevărat că, pentru orice vectori $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ este îndeplinită egalitatea

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})?$$

Problema 1.25. Se ştie că $\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Determinaţi lungimile vectorilor $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ şi unghiurile dintre ei.

Problema 1.26. Pe vectorii $\mathbf{a}(2,3,1)$ şi $\mathbf{b}(-1,1,2)$ (ataşaţi unui punct) se construieşte un triunghi. Determinaţi aria acestui triunghi, precum şi lungimile celor trei înălţimi ale sale.

Problema 1.27. Unui punct i se ataşează patru vectori $\mathbf{a}(-1,1,-1)$, $\mathbf{b}(-1,1,1)$, $\mathbf{c}(5,-1,-1)$ şi $\mathbf{d}$. Vectorul $\mathbf{d}$ are lungimea 1 şi formează cu vectorii $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ unghiuri ascuţite egale. Determinaţi componentele vectorului $\mathbf{d}$.

Problema 1.28. Stabiliţi dacă următoarele triplete de vectori sunt formate din vectori coplanari:

1) $\mathbf{a}(2,3,5), \mathbf{b}(7,1,-1), \mathbf{c}(3,-5,-11)$;

2) $\mathbf{a}(2,0,1), \mathbf{b}(5,3,-3), \mathbf{c}(3,3,10)$.

Problema 1.29. Vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sunt necoplanari. Pentru ce valori ale lui λ sunt coplanari vectorii $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$, $4\mathbf{a} + 5\mathbf{b} + 6\mathbf{c}$, $7\mathbf{a} + 8\mathbf{b} + \lambda^2\mathbf{c}$?

Problema 1.30. Se dau vectorii necoliniari $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi scalarul p. Găsiţi un vector $\mathbf{x}$, care verifică egalitatea $(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$.

Problema 1.31. Diagonalele unui trapez isoscel sunt perpendiculare. Determinaţi aria trapezului, ştiind că înălţimea lui este egală cu h.

Problema 1.32. Aria unui trapez $ABCD$ este egală cu S, iar raportul bazelor este $AD : BC = 3 : 1$. Segmentul MN este paralel cu latura BC şi intersectează latura AB, astfel încât $AM : BN = 3 : 2$, $MN : CD = 1 : 3$. Segmentul AM este paralel cu segmentul BN. Determinaţi aria triunghiului BNC.

Problema 1.33. Măsura, în radiani, a unghiului dintre vectorii $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ este de $\frac{\pi}{6}$. Dacă $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\|\mathbf{v}\| = 7$, calculaţi $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ şi $\left\| \frac{1}{3}\mathbf{u} \times \frac{3}{4}\mathbf{v} \right\|$.

Problema 1.34. Dacă $ABCD$ este un tetraedru regulat de latură 1, calculaţi $\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$.

Problema 1.35. Calculaţi aria paralelogramului $ABCD$, dacă $\overrightarrow{AB} = (1,1,-1)$, în timp ce $\overrightarrow{AD} = (2,1,4)$.

Problema 1.36. Calculaţi aria triunghiului ABC dacă $\overrightarrow{AB} = (-1,1,0)$, iar $\overrightarrow{AC} = (0,1,3)$.

Problema 1.37. Determinaţi un vector de lungime 1 care să fie perpendicular pe vectorii $\mathbf{u} = (1,-3,1)$ şi $\mathbf{v} = (-3,3,3)$.

Problema 1.38. Se dau vectorii $\mathbf{u}(1,1,1)$ şi $\mathbf{v}(0,1,2)$. Să se determine o bază ortonormată pozitivă $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ a lui $\mathbb{R}^3$ astfel încât:

(i) $\mathbf{a}$ să aibă aceeaşi direcţie şi sens cu $\mathbf{u}$;

(ii) $\mathbf{b}$ să fie o combinaţie liniară a lui $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$, iar prima sa componentă să fie pozitivă.

Problema 1.39. Demonstraţi că dacă $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = 0$, atunci

(a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$;

(b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{u} = 3(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

CAPITOLUL 2

Dreapta în plan

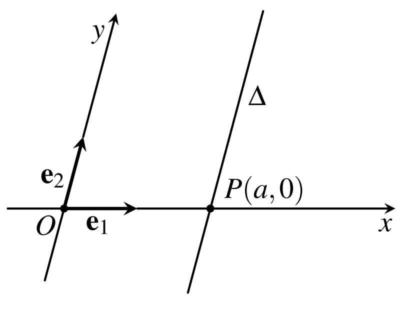
2.1 Ecuaţia dreptei scrisă cu ajutorul coeficientului unghiular (al pantei)

Fie Δ o dreaptă situată într-un plan. Se numeşte *vector director* al dreptei orice vector nenul a cărui direcţie coincide cu direcţia dreptei. Se înţelege că o aceeaşi dreaptă are o infinitate de vectori directori, dar toţi aceştia sunt coliniari între ei.

Presupunem că s-a ales un sistem de coordonate afin Oxy. Vom stabili acum ecuaţia dreptei Δ. Presupunem, mai întâi, că dreapta este paralelă cu axa Oy şi intersectează axa Ox într-un punct $P(a,0)$. Atunci este clar că pentru toate punctele $M(x,y)$ de pe dreapta Δ şi numai pentru ele avem

$$x = a. \tag{2.1.1}$$

Aşadar, (2.1.1) *este ecuaţia unei drepte paralele cu axa* Oy (adică o dreaptă *verticală*) şi care intersectează axa Ox în punctul $P(a,0)$. Este clar că toate dreptele de acest tip au vectori directori de componente $(0,m)$, unde m este un număr real nenul oarecare. Să presupunem acum că dreapta Δ nu este paralelă

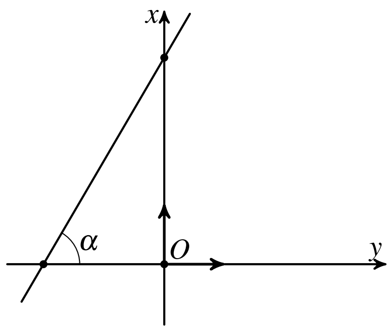


cu axa Oy. Atunci pentru orice vector director $\mathbf{a}(l,m)$ al acestei drepte avem $l \neq 0$, iar raportul $m:l$ are aceeaşi valoare constantă k, numită *coeficient unghiular* al dreptei Δ relativ la sistemul de coordonate ales.

Dacă, în particular, se consideră un sistem de coordonate ortogonal $(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$, atunci pentru coeficientul unghiular avem, în mod evident,

$$k = \operatorname{tg}\alpha,$$

unde α este unghiul dintre $\mathbf{i}$ şi orice vector director al dreptei Δ. Unghiul α se numeşte *unghiul de înclinare* sau *panta* dreptei Δ relativ la axa Ox. Deoarece vom considera în cele ce urmează vom utiliza în exclusivitate înclinarea relativ la axa Ox, pe viitor nu vom mai scoate în evidenţă în mod explicit acest fapt şi vom vorbi, în general, pur şi simplu despre panta dreptei.



În cele ce urmează, dacă nu se precizează altfel, vom utiliza în exclusivitate un sistem de coordonate rectangular, fixat odată pentru totdeauna şi nu ne vom mai referi la el.

Vom arăta acum cum se poate obţine ecuaţia unei drepte dacă se cunoaşte panta ei şi un punct de pe dreaptă. Fie, aşadar, o dreaptă Δ, de coeficient unghiular k. Fie, de asemenea, un punct $P(a,b)$ de pe dreaptă. Fie, acum $M(x,y)$ un punct de pe dreaptă, diferit de punctul P. Atunci vectorul $\overrightarrow{PM}(x-a,y-b)$ este un vector director al dreptei Δ, prin urmare

$$\frac{y-b}{x-a} = k. \tag{2.1.2}$$

De aici rezultă că

$$y-b = k(x-a). \tag{2.1.3}$$

Această ecuaţie este verificată de orice punct de pe dreaptă, inclusiv punctul P. Demonstrăm acum că, invers, dacă un punct verifică această ecuaţie, atunci el aparţine drepte. Fie, aşadar, un punct $M_1(x_1,y_1) \neq P$, care verifică ecuaţia (2.1.3), adică

$$y_1 - b = k(x_1 - a). \tag{2.1.4}$$

Cum $M_1 \neq P$, $x_1 - a \neq 0$, prin urmare, din (2.1.2) şi (2.1.4), obţinem că

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{y_1-b}{x_1-a}.$$

Aşadar, vectorii directori ai dreptelor Δ şi PM_1 sunt coliniari. Cum ambele drepte trec prin punctul P, ele coincid, deci $M_1 \in \Delta$. Astfel, ecuaţia (2.1.3) descrie o dreaptă care trece prin punctul P şi are coeficientul unghiular Δ.

Dacă, în particular, punctul P se află pe axa Oy (ceea ce este posibil, deoarece am presupus că dreapta noastră nu este paralelă cu această axă), adică dacă P are coordonatele $(0,b)$, atunci ecuaţia (2.1.3) capătă forma mai simplă:

$$y = kx + b.$$

Dacă dreapta este paralelă cu axa Oy, atunci panta sa este egală cu zero şi, dacă trece prin punctul $P(0,b)$, atunci ecuaţia ei este
$$y = b.$$

2.2 Ecuaţia generală a dreptei. Ecuaţia dreptei prin tăieturi

Definiţia 2.1. Se numeşte *ecuaţie de gradul întâi* sau *ecuaţie liniară* relativ la necunoscutele x şi y o ecuaţie de forma
$$Ax + By + C = 0, \tag{2.2.1}$$
unde $A, B, C \in \mathbb{R}$, iar coeficienţii A şi B nu se anulează simultan.

Teorema 2.1. *Orice dreaptă în plan poate fi descrisă printr-o ecuaţie de forma (2.2.1). Invers, orice ecuaţie de forma (2.2.1) reprezintă o dreaptă.*

Demonstraţie Dacă avem o dreaptă Δ care nu este paralelă cu axa Oy, atunci, după cum am văzut în secţiunea precedentă, ea poate fi descrisă prin ecuaţia liniară
$$y - kx - b = 0. \tag{2.2.2}$$
Dacă dreapta Δ este paralelă cu axa Oy, atunci ea este, din nou, dată printr-o ecuaţie liniară
$$x - a = 0. \tag{2.2.3}$$
Considerăm acum o ecuaţie de forma (2.2.1) oarecare. Dacă $B \neq 0$, atunci, împărţind ambii membrii ai ecuaţiei cu B şi introducând notaţiile $k = -A/B$, $b = -C/B$, putem aduce ecuaţia la forma (2.2.2). Dar ecuaţia (2.2.2) reprezintă o dreaptă, de coeficient unghiular k şi care trece prin punctul $P(0,b)$. Dacă în ecuaţia (2.2.1) $B = 0$, atunci această ecuaţie se poate aduce la forma (2.2.3) şi, prin urmare, reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oy. □

Ecuaţia (2.2.1) se numeşte *ecuaţia generală a dreptei în plan*. Vom evidenţia acum câteva cazuri particulare, în care unul sau doi coeficienţi ai ecuaţiei generale se anulează.

1. $C = 0$. În acest caz ecuaţia (2.2.1) se reduce la
$$Ax + By = 0. \tag{2.2.4}$$
Dreapta care se obţine trece prin originea coordonatelor, după cum se poate observa cu uşurinţă, înlocuind $x = 0$ şi $y = 0$ în ecuaţia de mai sus. Invers, dacă o dreaptă trece prin originea coordonatelor, atunci, înlocuind în ecuaţia (2.2.1) $x = 0$ şi $y = 0$ obţinem $C = 0$, prin urmare: *o condiţie necesară şi suficientă pentru ca o dreaptă dată prin ecuaţia sa generală să treacă prin origine este ca* $C = 0$.

2. $B = 0, C \neq 0$. În acest caz, ecuaţia (2.2.1) capătă forma
$$Ax + C = 0. \tag{2.2.5}$$
Dreapta dată de această ecuaţie este paralelă cu axa Oy, dar nu intesectează această axă. Se constată imediat că această dreaptă intersectează axa Ox în punctul de coordonate $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ şi toate punctele sale au coordonata x egală cu $-C/A$. Aşadar, un vector director al dreptei este, de exemplu, $(0,1)$, ceea ce confirmă faptul că dreapta este, într-adevăr, paralelă cu axa Oy. Invers, este uşor de văzut că orice dreaptă paralelă cu axa Oy şi care nu trece prin origine se poate scrie sub forma (2.2.5).

3. $B = 0$, $C = 0$. De data aceasta ecuaţia se reduce la

$$x = 0,$$

iar dreapta este chiar axa Oy.

4. $A = 0$, $C \neq 0$. Acest caz este analog cu cazul 2) şi conduce la o dreaptă paralelă cu axa Ox, dar care nu coincide cu această axă.

5. $A = 0, C = 0$. Acest caz este analog cu cazul 3), iar dreapta în chestiune este axa Ox.

Scoatem în evidenţă acum următoarele fapte: *fie Δ dreapta dată prin ecuaţia sa generală (2.2.1). Atunci vectorul $\mathbf{n}(A,B)$ este perpendicular pe dreaptă, în timp ce vectorul $\mathbf{a}(-B,A)$ este un vector director al dreptei.*

Într-adevăr, să alegem pe dreapta Δ două puncte distincte $M_1(x_1,y_1)$ şi $M_2(x_2,y_2)$. Avem, prin urmare,

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + C &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + C &= 0. \end{aligned}$$

Scăzând aceste ecuaţii membru cu membru, obţinem

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0.$$

Această egalitate înseamnă că vectorul $\mathbf{n}(A,B)$ este perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, prin urmare este perpendicular şi pe dreapta Δ. Cum vectorul $\mathbf{a}(-B,A)$ este, în mod evident, şi el perpendicular pe vectorul $\mathbf{n}$, rezultă că $\mathbf{a}$ este un vector director al dreptei Δ.

Observaţie. Fie $\mathbf{r}$ vectorul de poziţie al unui punct curent M de pe dreaptă, $\mathbf{n}$ – vectorul normal la dreaptă şi $\mathbf{r}_0$ vectorul de poziţie al punctului dat, M_0, prin care trece dreapta. Atunci, conform celor spuse mai sus, ecuaţia dreptei se poate scrie sub forma

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \tag{2.2.6}$$

Aceasta este o formă a ecuaţiei dreptei pe care o vom folosi destul de mult, de fiecare dată când dreapta este dată printr-un punct prin care trece şi un vector normal la dreaptă.

Să presupunem acum că în ecuaţia (2.2.1) toţi coeficienţii A,B,C sunt nenuli. Împărţim ecuaţia cu $-C$ şi notăm $a = -C/A$ şi $b = -C/B$. Atunci ecuaţia va deveni

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{2.2.7}$$

În mod evident, a şi b sunt lungimile cu semn ale segmentelor pe care dreapta Δ le taie pe axele de coordonate Ox şi Oy (e vorba de segmentele cuprinse între originea coordonatelor şi punctele de intersecţie a dreptei cu axele). Aceste lungimi se numesc *tăieturi* ale dreptei pe axă, de aceea, ecuaţia (2.2.7) se numeşte *ecuaţia dreptei Δ prin tăieturi*.

2.3 Ecuaţia vectorială şi ecuaţiile parametrice ale dreptei. Dreapta care trece prin două puncte

Orice punct M al planului este unic identificat prin vectorul său de poziţie $\overrightarrow{OM}$, relativ la originea coordonatelor. Fie Δ o dreaptă din plan, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ vectorul de poziţie al unui punct de pe dreaptă şi $\mathbf{a}$ vectorul director al dreptei. Notăm cu $\mathbf{r}$ vectorul de poziţie al unui punct M oarecare din plan. Dacă M aparţine dreptei, atunci

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{M_0M},$$

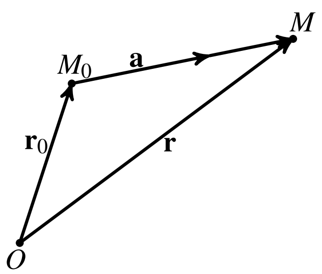
deci $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ este un vector director al dreptei, aşadar este coliniar cu vectorul $\mathbf{a}$. De aici rezultă că există un număr real t astfel încât să avem

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}. \tag{2.3.1}$$

Invers, dacă t este un număr real oarecare, este clar că punctul M din plan, al cărui vector de poziţie $\mathbf{r}$ verifică ecuaţia (2.3.1) este un punct de pe dreaptă. Ecuaţia (2.3.1) sau ecuaţia echivalentă cu ea

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \tag{2.3.2}$$

se numeşte *ecuaţia vectorială a dreptei*. Să presupunem acum că vectorii sunt daţi prin componentele



lor, $\mathbf{a}(l,m)$, $\mathbf{r}_0(x_0,y_0)$ şi $\mathbf{r}(x,y)$. Atunci ecuaţia vectorială (2.3.2) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}. \tag{2.3.3}$$

Ecuaţiile (2.3.3) se numesc *ecuaţiile parametrice ale dreptei* Δ.

Dacă dreapta Δ nu este paralelă cu nici una dintre axele de coordonate, atunci avem, în mod evident, $l \neq 0$ şi $m \neq 0$ şi atunci sistemul (2.3.3) este echivalent cu ecuaţia

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \tag{2.3.4}$$

care se numeşte *ecuaţia canonică a dreptei în plan*.

Remarcăm că, în general, în geometria analitică, se utilizează o anumită convenţie, care ne permite să scriem ecuaţia canonică şi pentru cazul în care dreapta este paralelă cu una dintre axele de coordonate. Convenţia este următoarea: *de fiecare dată când unul dintre numitorii din ecuaţia canonică a drepei se anulează, se consideră că numărătorul acelei fracţii este* identic nul. Să presupunem, prin urmare, că avem o ecuaţie de forma:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0}.$$

Atunci, conform convenţiei, această ecuaţie este, de fapt, echivalentă cu ecuaţia $y = 2$, adică reprezintă ecuaţia unei drepte paralele cu axa Ox.

Fie acum două puncte $M_0(x_0, y_0)$ şi $M_1(x_1, y_1)$ de pe dreapta Δ. Atunci $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ este un vector director al dreptei şi, prin urmare,

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \tag{2.3.5}$$

este *ecuaţia dreptei care trece prin punctele M_0 şi M_1*. Precizăm că, în conformitate cu convenţia făcută, punctele M_0 şi M_1 pot să se afle şi pe o dreaptă paralelă cu una dintre axele de coordonate (ceea ce are ca efect faptul că una dintre coordonatele celor două puncte va fi aceeaşi pentru ambele).

2.4 Poziţia reciprocă a două drepte în plan

Considerăm două drepte Δ_1 şi Δ_2, date prin ecuaţiile lor generale

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \tag{2.4.1}$$

A studia poziţia reciprocă a acestor două drepte înseamnă să stabilim numărul punctelor comune ale celor două drepte. Este evident că ne putem afla, în exclusivitate, în una dintre următoarele trei situaţii:

(i) dreptele se intersectează într-un punct;

(ii) dreptele coincid (ceea ce înseamnă că au o infinitate de puncte comune);

(iii) dreptele sunt paralele (deci nu au nici un punct comun).

Este clar că a studia poziţia reciprocă a dreptelor Δ_1 şi Δ_2 revine la investigarea sistemului de ecuaţii liniare (2.4.1), alcătuit din ecuaţiile generale ale dreptelor. Astfel, cele trei cazuri de mai sus corespund (în aceeaşi ordine), următoarelor cazuri posibile în analiza sistemului de ecuaţii:

(i) Sistemul de ecuaţii are soluţie unică. După cum se ştie din algebra liniară, această condiţie este echivalentă cu condiţia ca sistemul să fie un sistem Cramer, adică

$$\det \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.4.2}$$

(ii) Sistemul de ecuaţii este compatibil, dar nedeterminat. Asta înseamnă că

$$\det \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{2.4.3}$$

dar rangul matricii sistemului coincide cu rangul matricii extinse sau, ceea ce, în cazul nostru, când sunt doar două ecuaţii, este echivalent cu

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{2.4.4}$$

adică cele două ecuaţii (2.4.1) descriu aceeaşi dreaptă.

(iii) Sistemul de ecuaţii este incompatibil, ceea ce inseamnă că este verificată, din nou, ecuaţia (2.4.3) dar, de data aceasta,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \tag{2.4.5}$$

altfel spus, rangul matricii sistemului este egal cu 1, în timp ce rangul matricii extinse este egal cu 2. Egalitatea din (2.4.5) înseamnă că cele două drepte au vectori directori coliniari, în timp ce neegalitatea înseamnă că cele două drepte nu coincid, prin urmare ele sunt paralele.

2.5 Fascicole de drepte

Definiţia 2.2. Se numeşte *fascicol de drepte* mulţimea tuturor dreptelor dintr-un plan care trec printr-un punct S al planului, care se numeşte *centrul fascicolului*.

Pentru a specifica un fascicol de drepte în plan este suficient să specificăm centrul fascicolului şi două dintre dreptele sale.

Fie, prin urmare, în plan, două drepte distincte care trec prin punctul $S(x_0, y_0)$, date prin ecuaţiile lor generale,

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{2.5.1}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \tag{2.5.2}$$

Considerăm acum ecuaţia

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{2.5.3}$$

unde α şi β sunt numere reale oarecare, care nu se anulează simultan. Vom demonstra că această ecuaţie determină o dreaptă care trece prin punctul S. Rescriem ecuaţia sub forma

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + \alpha C_1 + \beta C_2 = 0. \tag{2.5.4}$$

Aici coeficienţii necunoscutelor nu se pot anula simultan. Într-adevăr, să presupunem că

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \quad \alpha B_1 + \beta B_2 = 0 \tag{2.5.5}$$

şi, de exemplu, $\alpha \neq 0$. Atunci şi $A_2 \neq 0$, pentru că dacă A_2 ar fi zero ar trebui să avem şi $A_1 = 0$, ceea ce ar contrazice ipoteza că dreptele (2.5.1) şi (2.5.2) se intersectează într-un punct. Analog se demonstrează că $B_2 \neq 0$, iar egalităţile (2.5.5) se pot scrie sub forma

$$A_1/A_2 = -\beta/\alpha,\ B_1/B_2 = -\beta/\alpha \quad \Leftrightarrow A_1/A_2 = B_1/B_2,$$

ceea ce nu este posibil, deoarece dreptele (2.5.1) şi (2.5.2) nu sunt paralele, ci se intersectează într-un punct. Astfel, coeficienţii necunoscutelor din ecuaţia (2.5.4) nu se pot anula simultan, de aceea, pentru orice α şi β ce nu se anulează simultan, această ecuaţie reprezintă o dreaptă. Este evident că dreapta (2.5.3) trece, într-adevăr, prin punctul $S(x_0, y_0)$.

Vom arăta acum, invers, că orice dreaptă din fascicol are o ecuaţie de forma (2.5.3), cu alte cuvinte, vom demonstra că oricum am alege o dreaptă din fascicolul de drepte din plan care trec prin punctul

$S(x_0, y_0)$, putem alege două constante α şi β, cel puţin una nenulă, astfel încât ecuaţia (2.5.3) să fie ecuaţia dreptei alese. Fie $M_1(X_1, y_1)$ un punct oarecare din plan, astfel încât $M_1 \neq S$. Este suficient să demonstrăm că putem alege constantele α, β astfel încât dreapta (2.5.3) să coincidă cu dreapta SM_1. Această afirmaţie se reduce la cerinţa ca x_1 şi y_2, coordonatele lui M_1, să verifice egalitatea

$$\alpha(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \beta(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0. \tag{2.5.6}$$

Cum punctul M_1 nu coincide cu centrul fascicolului, cel puţin una dintre cantităţile din paranteze este diferită de zero. Dacă

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 \neq 0,$$

atunci egalitatea (2.5.6) se poate rescrie sub forma:

$$\alpha = -\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}\beta.$$

Dacă îi dăm lui β o valoare nenulă arbitrară, obţinem valoarea corespunzătoare a lui α.

Prin urmare, pentru orice α şi β care nu se anulează simultan, ecuaţia (2.5.3) reprezintă ecuaţia unei drepte din fascicolul determinat de dreptele (2.5.1) şi (2.5.2) şi, invers, orice dreaptă a fascicolului se poate scrie sub forma (2.5.3). Ecuaţia (2.5.3) se numeşte *ecuaţia fascicolului de drepte* determinat de dreptele (2.5.1) şi (2.5.2). Remarcăm că ecuaţia dreptei (2.5.1) se obţine din ecuaţia (2.5.3) pentru $\beta = 0$ şi un $\alpha \neq 0$ arbitrar, în timp ce ecuaţia dreptei (2.5.2) se obţine din ecuaţia (2.5.3) pentru $\alpha = 0$ şi un $\beta \neq 0$ arbitrar.

Împărţind ambii membrii ai ecuaţiei (2.5.3) la α şi notând $\beta/\alpha = \lambda$, ecuaţia obţinută se scrie

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \tag{2.5.7}$$

Pentru orice λ, această ecuaţie corespunde unei drepte din fascicolul de drepte determinat de dreptele (2.5.1) şi (2.5.2). Invers, orice dreaptă a acestui fascicol, cu excepţia dreptei (2.5.2) se poate scrie sub forma (2.5.7) pentru un anumit λ.

Dacă se cunosc coordonatele centrului $S(x_0, y_0)$ al fascicolului, atunci ecuaţia fascicolului se poate scrie sub forma foarte simplă

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0. \tag{2.5.8}$$

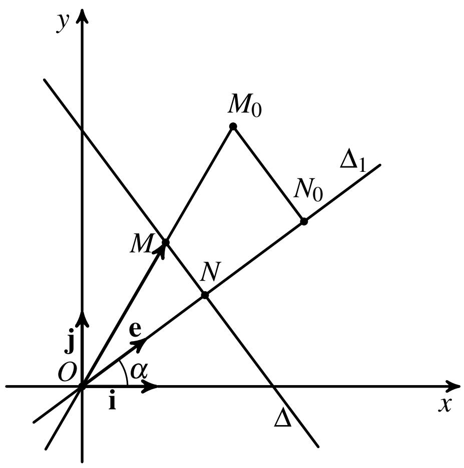
2.6 Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie Δ o dreaptă oarecare din plan.

Definiţia 2.3. Se numeşte *distanţă* de la un punct M_0 din plan până la dreapta Δ lungimea perpendicularei coborâte din punctul M_0 pe dreapta Δ.

Considerăm acum un versor **e** perpendicular pe dreapta Δ. Dacă Δ trece prin originea coordonatelor, atunci în calitate de **e** putem lua oricare dintre cei doi versori (opuşi) care sunt perpendiculari pe dreaptă. Dacă dreapta nu trece prin origine, atunci alegem acel versor **e**, perpendicular pe dreapta Δ, care este orientat dinspre originea coordonatelor către dreaptă. Notăm cu α unghiul dintre vectorii **i** şi **e**. Atunci

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(\cos\alpha, \sin\alpha).$$



Fie Δ_1 dreapta care trece prin origine şi care este perpendiculară pe dreaptaΔ. Notăm cu N intersecţia celor două drepte. Notăm, de asemenea, cu p distanţa de la origine până la dreapta Δ, adică lungimea segmentului ON. Desigur, dacă dreapta Δ trece prin origine, atunci $N = O$ şi $p = 0$.

Un punct $M(x,y)$ din plan aparţine dreptei Δ dacă şi numai dacă proiecţia sa ortogonală pe dreapta Δ_1 coincide cu N. Această condiţie este echivalentă cu condiţia:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e} = p.$$

Exprimând produsul scalar utilizând componentele vectorilor, obţinem, prin urmare

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{2.6.1}$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia normală* sau *ecuaţia normală Hesse* a dreptei.

Dreapta Δ împarte mulţimea tuturor punctelor din plan care nu îi aparţin în două submulţimi, numite *semiplane (deschise)*. Semiplanul care conţine versorul **e**, atunci când acesta este ataşat punctului N, se numeşte *pozitiv*, iar celălalt semiplan se numeşte *negativ*. Remarcăm că originea coordonatelor se găseşte totdeauna fie în semiplanul negativ, fie pe dreapta Δ.

Definiţia 2.4. Fie d distanţa de la punctul M_0 până la dreapta Δ. Se numeşte *abatere* a punctului M_0 de la dreapta Δ numărul δ definit prin următoarele condiţii:

1) $\delta = d$ dacă punctul M_0 se află în semiplanul pozitiv;

2) $\delta = -d$ dacă M_0 se află în semiplanul negativ;

3) $\delta = d = 0$ dacă M_0 se află pe dreapta Δ.

Teorema 2.2. *Să presupunem că în plan se dă o dreaptă Δ, prin ecuaţia ei normală (2.6.1). Atunci abaterea δ a unui punct oarecare $M_0(x_0,y_0)$ faţă de dreapta Δ şi distanţa d de la punct până la dreaptă sunt date de formulele:*

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p, \tag{2.6.2}$$
$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \tag{2.6.3}$$

Demonstraţie Fie N_0 piciorul perpendicularei coborâte din M_0 pe dreapta Δ_1. Din formula lui Chasles obţinem că
$$\delta = (NN_0) = (ON_0) - (ON) = \overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e} - p = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p.$$
Formula (2.6.3) rezultă din formula (2.6.2), întrucât $d = |\delta|$. □

Formula (2.6.2) conduce la următoarea regulă: *pentru a obţine abaterea unui punct oarecare M_0 faţă de o dreaptă, este suficient să înlocuim coordonatele punctului în membrul stâng al ecuaţiei normale a dreptei. Numărul obţinut pe această cale este abaterea căutată.*

Să presupunem acum că dreapta este dată prin ecuaţia sa generală,
$$Ax + By + C = 0, \tag{2.6.4}$$
şi vrem să găsim ecuaţia sa normală (2.6.1). Cum ecuaţiile (2.6.1) şi (2.6.4) reprezintă aceeaşi dreaptă, oeficienţiilor trebuie să fie proporţionali, prin urmare:
$$\cos\alpha = \lambda A,\ \sin\alpha = \lambda B,\ -p = \lambda C. \tag{2.6.5}$$
Din primele două relaţii din (2.6.5) obţinem
$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$
Potrivit celei de-a treia egalităţi din (2.6.5), rezultă că semnul lui λ trebuie să fie opus semnului termenului liber C din ecuaţia (2.6.4), dacă $C \neq 0$. Dacă $C = 0$, atunci λ poate să aibă orice semn. O schimbare de semn la λ aduce după sine schimbarea între ele a semiplanului pozitiv şi a celui negativ. Numărul λ se numeşte *factor normalizator* pentru ecuaţia (2.6.4), pentru că, după înmulţirea cu el, ecuaţia devine normală.

Pe baza celor remarcate, formulele pentru abaterea şi distanţa de la un punct $M_0(x_0, y_0)$ până la dreapta (2.6.4) se pot scrie
$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\ d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{2.6.6}$$
Să presupunem că se dă ecuaţia (2.6.4). Notăm
$$\delta' = \delta'(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C.$$

Teorema 2.3. *Pentru toate punctele din acelaşi semiplan determinat de dreapta (2.6.4), δ' are acelaşi semn, iar pentru punctele din semiplanul opus are semn contrar.*

Demonstraţie Afirmaţia acestei teoreme pentru ecuaţia normală
$$\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}(Ax + By + C)$$
sau, cu alte cuvinte, pentru mărimea
$$\delta(x_0, y_0) = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\delta'(x_0, y_0)$$
rezultă din teorema 2.2. Cum mărimile $\delta(x_0, y_0)$ şi $\delta'(x_0, y_0)$ diferă doar printr-un factor constant, care nu depinde de punctul $M_0(x_0, y_0)$, rezultă că afirmaţia rămâne adevărată şi pentru mărimea $\delta'(x_0, y_0)$. □

Teorema 2.3 permite stabilirea semnificaţiei geometrice a inegalităţilor

$$Ax + By + C > 0, \tag{2.6.7}$$

$$Ax + By + C < 0, \tag{2.6.8}$$

care leagă variabilele x şi y. Dacă x şi y sunt coordonatele carteziene ale unui punct din plan, atunci inegalitatea (2.6.7) este verificată doar de coordonatele punctele planului situate într-unul dintre semiplanele deschise determinate de dreapta

$$Ax + By + C = 0.$$

Inegalitatea (2.6.8) este verificată de coordonatele punctelor situate în cel de-al doilea semiplan deschis şi numai de ele. În mod corespunzător, inegalităţile

$$Ax + By + C \geq 0,$$

$$Ax + By + C \leq 0,$$

descriu câte un semiplan împreună cu semidreapta care îl mărgineşte (sau, cum se mai spune, câte un semiplan *închis*).

2.7 Unghiul dintre două drepte

Să presupunem că se dau, în plan, două drepte, Δ_1 şi Δ_2, prin intermediul ecuaţiilor lor generale:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{2.7.1}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \tag{2.7.2}$$

După cum s-a văzut, în calitate de vectori directori ai acestor drepte pot fi luaţi vectorii $\mathbf{a}_1(-B_1, A_1)$ şi $\mathbf{a}_2(-B_2, A_2)$. Prin urmare,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{2.7.3}$$

Aici cu φ se notează unul dintre cele două unghiuri formate de cele două drepte. Dacă dreptele sunt paralele, atunci, prin convenţie, se consideră că dreptele fac între ele un unghi egal cu zero.

Din formula (2.7.3) rezultă, în particular, condiţia necesară şi suficientă pentru ca dreptele (2.7.1) şi (2.7.2) să fie perpendiculare:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{2.7.4}$$

Să presupunem acum că dreptele Δ_1 şi Δ_2 sunt date nu prin ecuaţiile generale ci cu ajutorul coeficienţilor unghiulari:

$$y = k_1x + b_1, \tag{2.7.5}$$

$$y = k_2x + b_2. \tag{2.7.6}$$

Notăm cu φ unghiul cu care trebuie rotită dreapta Δ_1 în jurul punctului de intersecţie a dreptelor, pentru a se suprapune peste dreapta Δ_2. Dacă dreptele sunt paralele, atunci vom considera că $\varphi = 0$. Fie α_1

şi α_2 unghiurile pe care le fac cele două drepte cu axa Ox, adică avem $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Atunci $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ şi avem:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Astfel,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{2.7.7}$$

Din formula (2.7.7) se poate obţine cu uşurinţă condiţia de perpendicularitate a dreptelor (2.7.5) şi (2.7.6). Ea corespunde cazului în care $\operatorname{tg}\varphi$ nu există, adică, în formula (2.7.7), se anulează numitorul:

$$1 + k_1 k_2 = 0.$$

Astfel, condiţia necesară şi suficientă pentru ca dreptele (2.7.5) şi (2.7.6) să fie perpendiculare este ca

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{2.7.8}$$

2.8 Probleme

Problema 2.1. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin $(2,-3)$ şi este paralelă cu dreapta care trece prin $(4,1)$ şi $(-2,2)$.

Problema 2.2. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin $(-2,3)$ şi este pe perpendiculară pe dreapta $2x - 3y + 6 = 0$.

Problema 2.3. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului care uneşte punctele $(7,4)$ şi $(-1,-2)$.

Problema 2.4. Stabiliţi ecuaţia dreptei care trece prin $(2,-3)$ şi face un unghi de $60°$ cu direcţia pozitivă a axei Ox.

Problema 2.5. Stabiliţi ecuaţiile dreptelor care au panta $-3/4$ şi formează cu axele de coordonate un triunghi de arie 24.

Problema 2.6. Determinaţi forma normală Hesse a dreptei $3x - 4y - 6 = 0$.

Problema 2.7. Stabiliţi ecuaţia dreptelor care trec prin $(4,-2)$ şi sunt la o distanţă 2 faţă de origine.

Problema 2.8. Determinaţi ecuaţiile bisectoarelor unghiurilor formate de dreptele

$$(L_1)\ 3x - 4y + 8 = 0$$

şi

$$(L_2)\ 5x + 12y - 15 = 0.$$

Problema 2.9. Determinaţi ecuaţiile dreptelor paralele cu dreapta $12x - 5y - 15 = 0$, situate la distanţa 4 faţă de aceasta.

Problema 2.10. Determinaţi valoarea lui k astfel încât distanţa de la punctul $(2,3)$ la dreapta $8x + 15y + k = 0$ să fie egală cu 5.

Problema 2.11. Două mediane ale unui triunghi sunt situate pe dreptele $x+y=2$ şi $2x+3y=1$, iar punctul $A(1,1)$ este un vârf al triunghiului. Scrieţi ecuaţiile laturilor acestui triunghi.

Problema 2.12. Punctele $K(1,-1), L(3,4)$ şi $M(5,0)$ sunt, respectiv, mijloacele laturilor AD, AB şi CD ale patrulaterului $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în $O(2,2)$. Determinaţi coordonatele vârfurilor patrulaterului.

Problema 2.13. Stabiliţi ecuaţiile dreptelor care trec prin punctul $A(-1,5)$ şi sunt egal depărtate de punctele $B(3,7)$ şi $C(1,-1)$.

Problema 2.14. Stabiliţi ecuaţiile dreptelor egal depărtate de punctele $A(3,-1), B(9,1)$ şi $C(-5,5)$.

Problema 2.15. Punctele $K(1,-1), L(3,4)$ şi $M(5,0)$ sunt, respectiv, mijloacele laturilor AD, AB şi CD ale patrulaterului $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în $O(2,2)$. Determinaţi coordonatele vârfurilor patrulaterului.

Problema 2.16. Stabiliţi ecuaţiile dreptelor care trec prin punctul $A(-1,5)$ şi sunt egal depărtate de punctele $B(3,7)$ şi $C(1,-1)$.

Problema 2.17. Stabiliţi ecuaţiile dreptelor egal depărtate de punctele $A(3,-1), B(9,1)$ şi $C(-5,5)$.

Problema 2.18. Punctul $A(3,-2)$ este un vârf al unui pătrat, iar $M(1,1)$ este punctul de intersecţie a diagonalelor sale. Stabiliţi ecuaţiile laturilor pătratului.

Problema 2.19. Lungimea laturii unui romb cu unghiul ascuţit de 60° este egală cu 2. Diagonalele rombului se intersectează în punctul $M(1,2)$, iar diagonala cea mai lungă este paralelă cu axa Ox. Stabiliţi ecuaţiile laturilor rombului.

Problema 2.20. Determinaţi un punct de pe dreapta $5x-4y-4=0$ egal depărtat de punctele $A(1,0)$ şi $B(-2,1)$.

Problema 2.21. Determinaţi coordonatele unui punct A de pe dreapta $x+y=8$, care este egal depărtat de punctul $B(2,8)$ şi de dreapta $x-3y+2=0$.

Problema 2.22. Determinaţi coordonatele tuturor punctelor egal depărtate de punctul $A(-1,1)$ şi de dreptele $y=-x$ şi $y=x+1$.

Problema 2.23. În triunghiul ABC punctele $M_1(2,3)$, $M_2(0,7)$ şi $M_3(-2,5)$ sunt mijloacele laturilor BC, CA şi AB. Stabiliţi ecuaţia dreptei AB. Găsiţi unghiul dintre medianele AM_1 şi BM_2.

Problema 2.24. În paralelogramul $ABCD$ vârfurile A şi C au coordonatele $(1,2)$, respectiv $(7,10)$, iar $H(3,0)$ este piciorul perpendicularei coborâte din vârful B pe latura AD. Stabiliţi ecuaţia dreptei AD. Găsiţi unghiul dintre dreptele AD şi AB.

Problema 2.25. În paralelogramul $ABCD$ punctele $K(-1,2), L(3,4)$ şi $M(5,6)$ sunt mijloacele laturilor AB, BC, respectiv CD. Stabiliţi ecuaţia dreptei BC. Găsiţi unghiul dintre dreptele AL şi AM.

Problema 2.26. În trapezul $ABCD$ cu bazele AD şi BC latura CD este perpendiculară pe baze, punctele A şi C au coordonatele $(5,2)$, respectiv $(-2,3)$, iar prelungirile laturilor neparalele se intersectează în punctul $P(-3,6)$. Stabiliţi ecuaţia dreptei AD. Găsiţi unghiul dintre dreptele AD şi AB.

Problema 2.27. Punctele $K(1,3)$ şi $L(-1,1)$ sunt mijloacele bazelor unui trapez isoscel, iar punctele $P(3,0)$ şi $Q(-3,5)$ se află pe laturile neparalele. Stabiliţi ecuaţiile laturilor trapezului.

Problema 2.28. Stabiliţi ecuaţia dreptei care trece prin $A(3,1)$ şi face un unghi de 45° cu dreapta $3x-y-2=0$.

Problema 2.29. Punctul $A(2,0)$ este un vârf al unui triunghi echilateral, iar latura opusă se află pe dreapta $x+y-1=0$. Stabiliţi ecuaţiile celorlalte două laturi ale triunghiului.

Problema 2.30. Baza unui triunghi isoscel se află pe dreapta $x+2y=2$, iar una dintre laturile egale se află pe dreapta $y+2x=1$. Stabiliţi ecuaţia celei de-a treia laturi, ştiind că distanţa de la punctul de intersecţie a dreptelor date până la această latură este egală cu $1/\sqrt{5}$.

Problema 2.31. Se consideră acel unghi format de dreptele $y=x+1$ şi $y=7x+1$ în interiorul căruia se află punctul $A(1,3)$. Determinaţi coordonatele punctului B, situat în interiorul aceluiaşi unghi, situat la distanţa $4\sqrt{2}$ fată de prima dreaptă şi $\sqrt{2}$ faţă de cea de-a doua dreaptă.

Problema 2.32. Stabiliţi ecuaţia bisectoarei acelui unghi format de dreptele $x-7y=1$ şi $x+y=-7$, înăuntru căruia se află punctul $A(1,1)$.

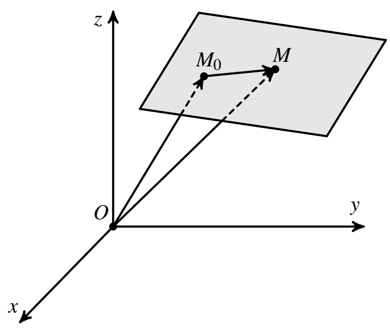
CAPITOLUL 3

Dreapta şi planul în spaţiu

3.1 Planul

3.1.1 Ecuaţia vectorială a planului

Fie $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$ doi vectori necoliniari din spaţiu şi M_0 un punct oarecare. Dacă ataşăm vectorii punctului M_0, atunci există două puncte, unic determinate, P şi Q, astfel încât $\mathbf{v} = \overrightarrow{M_0P}$ şi $\mathbf{w} = \overrightarrow{M_0Q}$. Cum vectorii $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$ sunt necoliniari, punctele M_0, P şi Q, la rândul lor, sunt necoliniare, deci determină un plan Π. Intenţionăm să descriem punctele acestui plan cu ajutorul punctului M_0 şi al vectorilor $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$.



Fie M un punct din spaţiu. Notăm cu $\mathbf{r}_0$ vectorul de poziţie al punctului M_0 şi cu $\mathbf{r}$ vectorul de poziţie al punctului M. Punctul M, în mod clar, aparţine planului dacă şi numai dacă vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ este coplanar cu vectorii $\overrightarrow{M_0P}$ şi $\overrightarrow{M_0Q}$, adică cu vectorii $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$. Să presupunem că M *aparţine* planului Π. Aceasta înseamnă, întrucât vectorii $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$ sunt liniar independenţi, că $\overrightarrow{M_0M}$ are o descompunere (unică) sub forma unei combinaţii liniare a vectorilor $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$, cu alte cuvinte, există (şi sunt unice) două numere reale s şi t astfel încât să avem

$$\overrightarrow{M_0M} = s\mathbf{v} + t\mathbf{w}. \tag{3.1.1}$$

Pe de altă parte, $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, deci ecuaţia precedentă se poate scrie

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{v} + t\mathbf{w}, \tag{3.1.2}$$

ecuaţie care se numeşte *ecuaţia vectorială a planului* Π.

Să presupunem acum că punctul M are coordonatele (x, y, z), M_0 are coordonatele (x_0, y_0, z_0), iar vectorii $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$ au componentele (v_x, v_y, v_z), respectiv (w_x, w_y, w_z). Atunci ecuaţia vectorială (3.1.2) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii scalare

$$\begin{cases} x = x_0 + sv_x + tw_x \\ y = y_0 + sv_y + tw_y \\ z = z_0 + sv_z + tw_z \end{cases}, \tag{3.1.3}$$

ecuaţii care se numesc *ecuaţiile parametrice ale planului* Π.

Ecuaţia planului se poate reprezenta sub formă vectorială şi fără a utiliza parametrii. Într-adevăr, avem următorul rezultat:

Teorema 3.1. *Ecuaţia vectorială a unui plan care trece printr-un punct M_0 şi este perpendicular pe un vector* $\mathbf{n}$ *dat este*

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{3.1.4}$$

Demonstraţie Fie Π planul determinat de punct şi de vectorul normal. Dacă M este un punct oarecare al planului, atunci $\overrightarrow{M_0M} \perp \mathbf{n}$, de unde rezultă că

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{3.1.5}$$

sau

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

□

3.1.2 Ecuaţia generală a planului

Definiţia 3.1. Se numeşte *ecuaţie liniară (generală) relativ la necunoscutele x, y, z* o ecuaţie de forma

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.1.6}$$

unde cel puţin unul dintre coeficienţii A, B, C ai necunoscutelor este diferit de zero.

Teorema 3.2. *Într-un sistem de coordonate carteziene rectangulare, un plan este definit de o ecuaţie liniară generală de forma (3.1.6).*

Demonstraţie Considerăm un plan care trece prin punctul M_0 şi are vectorul normal $\mathbf{n}(A, B.C)$. Atunci, pentru orice punct $M(x, y, z)$ din plan, avem

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

sau

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

sau, încă,

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

care este o ecuaţie liniară generală în x, y, z.

Invers, fie $M(x, y, z)$ un punct din spaţiu care verifică o ecuaţie de forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

cu $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Să presupunem, de exemplu, că în ecuaţia de mai sus $A \neq 0$. Atunci, în mod evident, punctul $M_0(-D/A, 0, 0)$ verifică, de asemenea, această ecuaţie. Notăm cu $\mathbf{n}$ vectorul de componente (A, B, C). Cum

$$\overrightarrow{M_0M} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x + D/A, y, z),$$

ecuaţia planului care trece prin M_0 şi are vectorul normal $\mathbf{n}$ este

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

sau

$$A(x + D/A) + By + Cz = 0 \text{ sau } Ax + By + Cz + D = 0,$$

prin urmare, punctul M este situat în planul care trece prin M_0 şi are pe $\mathbf{n}$ ca vector normal. $\square$

Cazuri particulare ale ecuaţiei generale a planului

a) Ecuaţia unui plan care trece prin origine este:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Într-adevăr, se observă imediat că ecuaţia de mai sus este verificată de originea $O(0, 0, 0)$.

b) Ecuaţiile planelor paralele cu axele de coordonate sunt

$$\begin{aligned} Ax + By + D &= 0 \quad \text{(paralele cu axa } Oz\text{)},\\ Ax + Cz + D &= 0 \quad \text{(paralele cu axa } Oy\text{)},\\ By + Cz + D &= 0 \quad \text{(paralele cu axa } Ox\text{)}. \end{aligned}$$

Într-adevăr, dacă în ecuaţia generală a planului punem $C = 0$, ea devine

$$Ax + By + D = 0.$$

În acest caz, vectorul normal la plan, $\mathbf{n}(A, B, 0)$ are proiecţia ortogonală pe axa Oz nulă, aşadar vectorul este perpendicular pe axă, deci planul este paralel cu axa Oz. La fel stau lucrurile şi în celelalte două cazuri. Dacă, în particular, şi $D = 0$, atunci planele *trec* prin axe, nu sunt doar paralele cu ele.

c) Ecuaţiile planelor paralele cu planele de coordonate sunt

$$\begin{aligned} Ax+D=0 &\quad \text{(paralele cu planul } yOz\text{)},\\ By+D=0 &\quad \text{(paralele cu planul } xOz\text{)},\\ Cz+D=0 &\quad \text{(paralele cu planul } xOy\text{)}. \end{aligned}$$

Într-adevăr, dacă, de exemplu, punem în ecuaţia planului $B=C=0$, ea se transformă în

$$Ax+D=0.$$

Vectorul normal la acest plan este $\mathbf{n}(A,0,0)$. Acest vector este perpendicular pe planul yOz, deci planul care îl are ca vector normal este *paralel* cu planul yOz. La fel se raţionează şi în cazul celorlalte două plane de coordonate.

Şi aici, ca şi mai sus, dacă punem şi $D=0$, obţinem plane care sunt paralele cu planele de coordonate şi trec prin origine, adică obţinem ecuaţiile *planelor de coordonate*, $x=0, y=0$, respectiv $z=0$.

3.1.3 Altă formă a ecuaţiei vectoriale a planului

Plecăm de la ecuaţia vectorială a planului care trece printr-un punct şi este paralel cu doi vectori necoliniari:

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=s\mathbf{v}+t\mathbf{w}.$$

Această ecuaţie este echivalentă cu cerinţa ca vectorii $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$ să fie liniar dependenţi, adică, de asemenea, cu condiţia ca

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{v},\mathbf{w})=0. \tag{3.1.7}$$

Această ecuaţie se numeşte, de regulă, pur şi simplu, *ecuaţia planului care trece prin punctul M_0 şi este paralel cu vectorii* $\mathbf{u}$ *şi* $\mathbf{v}$. Dacă dezvoltăm produsul mixt (3.1.7), se constată imediat că această ecuaţie este echivalentă cu ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=0 \tag{3.1.8}$$

sau cu ecuaţia

$$\begin{vmatrix} v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix} v_3 & v_1\\ w_3 & w_1\end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix}(z-z_0)=0. \tag{3.1.9}$$

3.1.4 Ecuaţia planului determinat de trei puncte necoliniare

Fie $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ trei puncte necoliniare din spaţiu. Atunci cele trei puncte determină un plan. Pentru a obţine ecuaţia sa, aplicăm metoda de la punctul precent. Mai precis, fie

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\equiv \overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),\\ \mathbf{w} &\equiv \overrightarrow{M_1M_3}(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1). \end{aligned}$$

Atunci aceşti doi vectori sunt, în mod evident, necoliniari şi paraleli cu planul. Planul a cărui ecuaţie o căutăm este cel care trece prin M_1 şi este paralel cu vectorii $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$. Prin urmare, ecuaţia sa este (vezi 3.1.8):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.10}$$

Ecuaţia (3.1.10) se poate rescrie în forma de mai jos, mai uşor de memorat:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.11}$$

3.1.5 Condiţia de coplanaritate a patru puncte

Din formula (3.1.11) rezultă imediat *condiţia de coplanaritate a patru puncte*:

Patru puncte M_1, M_2, M_3, M_4 sunt coplanare dacă şi numai dacă:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.12}$$

3.1.6 Ecuaţia planului prin tăieturi

Fie Π un plan care nu trece prin origine şi prin nici una dintre axe. Atunci, după cum am văzut mai sus, ecuaţia sa generală este

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

unde nici unul dintre cei patru coeficienţi nu se anulează. Fie P,Q,R cele trei puncte în care planul intersectează axele de coordonate. Atunci punctul de intersecţie cu Ox, determinat de ecuaŞiile $y=0, z=0$, va fi $P(-D/A,0,0)$, punctul de intersecţie c axa Oy, de ecuaţii $x=0,z=0$, va fi $Q(0,-D/B,0)$, în timp ce punctul de intersecţie cu axa Oz, de ecuaţii $x=0,z=0$, va fi $R(0,0,-D/C)$. Dacă introducem notaţiile

$$a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{D}{B},\ c=-\frac{D}{C},$$

ecuaţia planului care trece prin punctele P,Q,R se va scrie

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă dezvoltăm ecuaţia de mai sus, obţinem

$$bcx+cay+abz-abc=0$$

sau, dacă împărţim cu abc,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0. \tag{3.1.13}$$

Ecuaţia (3.1.13) se numeşte *ecuaţia planului prin tăieturi*. Motivul este legat de faptul că lungimile cu semn a,b,c se numesc *tăieturile* planului pe axele de coordonate. Ele sunt lungimile cu semn ale segmentelor determinate de origine şi de punctele de intersecţie ale planului cu cele trei axe de coordonate.

3.1.7 Ecuaţia normală a unui plan

Fie Π un plan şi OP – perpendiculara din origine pe plan. Dacă planul trece prin origine, atunci punctul P coincide cu originea, deci lungimea vectorului $\overrightarrow{OP}$ este egală cu zero. În cazul general, însă, fie

$$p \equiv \left\|\overrightarrow{OP}\right\|$$

lungimea acestui vector (egală, de fapt, cu distanţa de la origine la planul Π).

Fie $\mathbf{n}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ versorul vectorului $\overrightarrow{OP}$ (care este, în acelaşi timp, versorul normalei la plan). Atunci punctul P (piciorul perpendicularei pe plan din origine), va avea coordonatele

$$P(p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma),$$

prin urmare, dacă $M(x,y,z)$ este un punct oarecare din planul Π, atunci componentele sale vor fi

$$\overrightarrow{PM}(x-p\cos\alpha, y-p\cos\beta, z-p\cos\gamma).$$

Cum vectorii $\overrightarrow{PM}$ şi $\mathbf{n}$ sunt perpendiculari, avem

$$\overrightarrow{PM}\cdot\mathbf{n}=0$$

sau

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p\underbrace{\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)}_{=1}=0$$

sau, în final,

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \tag{3.1.14}$$

Ecuaţia (3.1.14) se numeşte *forma normală Hesse* sau, pur şi simplu, *forma normală* a ecuaţiei planului.

Forma normală a ecuaţiei unui plan este utilă în anumite situaţii, de aceea, vom arăta cum se poate obţine. Plecăm cu un plan scris sub forma generală,

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Acest plan are şi o ecuaţie normală,

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

Cum cele două ecuaţii trebuie să reprezinte acelaşi plan, coeficienţii lor trebuie să fie proporţionali:

$$\cos\alpha=\lambda A,\ \cos\beta=\lambda B,\ \cos\gamma=\lambda C,\ -p=\lambda D.$$

Dacă ridicăm la pătrat primele trei egalităţi şi le însumăm, obţinem

$$\lambda^2\left(A^2+B^2+C^2\right)=1,$$

unde am folosit, din nou, faptul că $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Aşasar,

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{3.1.15}$$

Semnul din (3.1.15) se alege astfel încât să fie opus semnului termenului liber D din ecuaţia generală. Dacă $D=0$, atunci semnul lui λ se poate alege oricum. λ se numeşte, din motive evidente, *factor normalizator* al ecuaţiei generale a planului.

Planul Π împarte mulţimea tuturor punctelor din spaţiu care nu aparţin lui Π în două submultimi, numite *semispaţii deschise*. Vom numi *semispaţiu pozitiv* acel semispaţiu înspre care este îndreptat vectorul $\mathbf{n}$. Celălalt se numeşte *semispaţiu negativ*. Trebuie remarcat că originea spaţiului se află întotdeauna fie în planul Π, fie în semispaţiul negativ.

3.1.8 Distanţa de la un punct la un plan

Definiţia 3.2. Se numeşte *distanţă* de la un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ la planul Π lungimea d a perpendicularei coborâte din punctul M_0 pe planul Π. Se numeşte *abatere* (sau *deviere*) a punctului M_0 relativ la planul Π numărul δ definit astfel încât:

a) $\delta=d$ dacă M_0 este în semispaţiul pozitiv determinat de Π;

b) $\delta=0$ dacă $M_0\in\Pi$;

c) $\delta=-d$ dacă M_0 este în semispaţiul negativ.

Teorema 3.3. *Dacă planul este dat prin ecuaţia normală*

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

atunci au loc formulele

$$\delta=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p; \tag{3.1.16}$$

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|. \tag{3.1.17}$$

Dacă planul este dat prin ecuaţia sa generală,

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

atunci au loc formulele

$$\delta=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{3.1.18}$$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{3.1.19}$$

Demonstraţie Notăm cu P_0 proiecţia ortogonală a lui M_0 pe dreapta OP. Atunci

$$\delta=(PP_0)=(OP_0)-(OP)=\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{OM_0}-p=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p.$$

Aşadar, formula (3.1.16) este demonstrată. (3.1.17) rezultă din (3.1.16), pentru că, în mod evident, $d=|\delta|$. □

3.1.9 Unghiul a două plane

Prin *unghiul a două plane* înţelegem măsura unghiului plan asociat unghiului diedru format de cele două plane, adică măsura unghiului format de direcţiile normale la cele două plane.

Este de remarcat că cele două plane formează, în fapt, nu unul ci *patru* unghiuri, două câte două opuse şi egale şi adiacente suplimentare.

Considerăm două plane

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \tag{3.1.20}$$

şi

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \tag{3.1.21}$$

Vectorii normali la cele două plane sunt $\mathbf{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ şi $\mathbf{n}_2(A_2,B_2,C_2)$, prin urmare unghiurile sunt date de

$$\cos\alpha_{1,2}=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{3.1.22}$$

Dacă membrul drept este pozitiv, se obţin unghiurile acuţite, dacă este negativ – unghiurile obtuze.

Din formula (3.1.22), rezultă că cele două plane sunt perpendiculare dacă şi numai dacă

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2. \tag{3.1.23}$$

Pe de altă parte, planele sunt paralele exact atunci când cei doi vectori normali sunt paraleli, adică dacă şi numai dacă

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{3.1.24}$$

3.2 Dreapta în spaţiu

3.2.1 Ecuaţia vectorială şi ecuaţiile parametrice ale dreptei

Fie Δ o dreaptă în spaţiu. Un vector nenul $\mathbf{a}$ se numeşte *vector director* al dreptei Δ dacă orice segment orientat din clasa lui $\mathbf{a}$ este paralel cu dreapta Δ. Dacă $\mathbf{a}(l,m,n)$ este un vector director al dreptei Δ, iar $M_0(x_0,y_0,z_0)$ este un punct oarecare al acestei drepte, atunci un punct arbitrar din spaţiu, $M(x,y,z)$, aparţine dreptei dacă şi numai dacă vectorul $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ este coliniar cu vectorul $\mathbf{a}$. Notăm cu $\mathbf{r}_0$, respectiv $\mathbf{r}$ vectorii de poziţie $\overrightarrow{OM_0},\overrightarrow{OM}$ ai punctelor M_0, respectiv M. Atunci

$$\overrightarrow{M_0M}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,$$

prin urmare vectorii $\overrightarrow{M_0M}$ şi $\mathbf{a}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă există un număr real t astfel încât să avem

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=t\mathbf{a},$$

sau

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{a}. \tag{3.2.1}$$

Ecuaţia (3.2.1) se numeşte *ecuaţia vectorială* a dreptei Δ, care trece prin punctul M_0 şi are ca vector director vectorul $\mathbf{a}$. Această ecuaţie este echivalentă, în mod evident, cu un sistem de trei ecuaţii scalare,

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \tag{3.2.2}$$

ecuaţii care se numesc *ecuaţiile parametrice* ale dreptei care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ şi are vectorul director $\mathbf{a}(l, m, n)$. Menţionăm că dacă se trece la un alt sistem de coordonate, forma ecuaţiilor parametrice ale dreptei se modifică (deoarece se schimbă atât coordonatele punctului M_0, cât şi componentele vectorului director), în timp ce ecuaţia vectorială are aceeaşi formă în orice sistem de coordonate afine (chiar dacă nu e vorba de o bază ortonormată).

3.2.2 Ecuaţiile canonice ale unei drepte în spaţiu

Dacă fiecare dintre componentele l, m, n ale vectorului director $\mathbf{a}$ este diferită de zero, atunci ecuaţiile (3.2.2) sunt echivalente cu sistemul

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}, \; \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \; \frac{z-z_0}{n} = \frac{x-x_0}{l}, \tag{3.2.3}$$

sistem pe care îl vom scrie, de regulă, sub forma

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}. \tag{3.2.4}$$

Ecuaţiile (3.2.4) se numesc *ecuaţiile canonice* ale dreptei care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are vectorul director $\mathbf{a}(l, m, n)$.

Observaţie. Din moment ce vectorul director $\mathbf{a}$ este diferit de zero, întotdeauna se poate găsi un sistem de coordonate în raport cu care toate componentele sale să fie nenule. Totuşi, în anumite sisteme de coordonate, una sau două dintre componentele sale pot fi egale cu zero. Nu există nici un motiv pentru care să nu putem scrie ecuaţiile canonice ale dreptei şi în astfel de sisteme de coordonate. Vom face, de aceea, aşa cum am procedat în cazul ecuaţiei canonice a dreptei în plan, convenţia că $0/0 = 0$. Ca lucrurile să fie foarte clare, precizăm că, cu această convenţie, un sistem de ecuaţii canonice de forma

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{0}$$

este echivalent cu sistemul de ecuaţii

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}, \; z = z_0, \quad l \neq 0, m \neq 0,$$

în timp ce un sistem de ecuaţii de forma

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{0}, \quad l \neq 0,$$

este echivalent cu sistemul

$$y = y_0, \; z = z_0.$$

3.2.3 Dreapta ca intersecţie de două plane

O dreaptă în spaţiu se poate reprezenta ca o intersecţie de două plane distincte, care trec printr-o aceeaşi dreaptă. Prin urmare, ea poate fi dată cu ajutorul unui sistem de două ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Cum planele care definesc dreapta nu sunt paralele, coeficienţii necunoscutelor din cele două ecuaţii ale sistemului (3.2.5) nu sunt proporţionali. Altfel spus, rangul matricii acestui sistem de ecuaţii liniare este maxim (adică este egal cu doi).

Ecuaţiile sistemului (3.2.5) care definesc o dreaptă dată nu sunt unice. În mod clar, fiecare dintre ele se poate înlocui cu o ecuaţie de forma

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

unde α şi β sunt numere reale care nu se anulează simultan, astfel încât, fireşte, sistemul să aibă, în continuare, rang maxim.

Este evident că şi afirmaţia inversă este adevărată, adică orice sistem de ecuaţii de forma (3.2.5), de rang doi, descrie o dreaptă în spaţiu.

De multe ori, trebuie să găsim vectorul director al unei drepte dată ca intersecţie de două plane. Considerăm dreapta (3.2.5) şi fie $\mathbf{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ şi $\mathbf{n}_2(A_2,B_2,C_2)$ – vectorii normali la cele două plane care determină dreapta. Atunci produsul lor vectorial,

$$\mathbf{v}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$$

este, în mod evident, un vector director al dreptei, prin urmare

$$\mathbf{v}=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

3.2.4 Ecuaţiile dreptei care trece prin două puncte

Să presupunem că se dau două puncte distincte $M_1(x_1,y_1,z_1)$ şi $M_2(x_2,y_2,z_2)$ ale unei drepte Δ. Atunci vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ este un vector director al dreptei, prin urmare dreapta Δ este dreapta care trece prin punctul M_1 şi are ca vector director vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}$. Aşadar ecuaţiile parametrice ale dreptei Δ (care trece prin punctul M_1 şi are ca vector director pe $\overrightarrow{M_1M_2}$), vor fi

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t, \\ y=y_1+(y_2-y_1)t, \\ z=z_1+(z_2-z_1)t. \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Ecuaţiile acestea se pot rescrie, fireşte, sub forma canonică:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{3.2.7}$$

3.2.5 Unghiul a două drepte în spaţiu

Prin definiţie, unghiul a două drepte în spaţiu este unghiul pe care îl formează *vectorii lor directori*. Menţionăm ,de la bun început, că nu este necesar ca cele două drepte să fie coplanare. Vectorii lor directori fiind vectori liberi, ei pot fi plasaţi cu originea în acelaşi punct. Un alt lucru care trebuie menţionat este că, folosind vectorii directori, unghiul dintre drepte nu este unic determinat. Mai precis, dacă schimbăm sensul unuia dintre vectorii directori, unghiul se transformă în suplementarul său. De aceea, dacă vrem să determinăm unghiul *ascuţit* dintre cele două drepte, trebuie să ne asigurăm că unghiul respectiv are un cosinus pozitiv.

Fie, prin urmare,

$$(D_1): \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \tag{3.2.8}$$

şi

$$(D_2): \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}, \tag{3.2.9}$$

de vectori directori $\mathbf{v}_1(l_1, m_1, n_1)$, respectiv $\mathbf{v}_2(l_2, m_2, n_2)$. Atunci unghiul dintre cele două drepte este dat de

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\|\cdot\|\mathbf{v}_2\|} = \pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \tag{3.2.10}$$

Unghiul *ascuţit* dintre cele două drepte este dat de

$$\cos\varphi = \frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \tag{3.2.11}$$

Dreptele (3.2.8) şi (3.2.9) sunt *perpendiculare* dacă vectorii lor directori sunt perpendiculari, adică dacă

$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 \equiv l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 = 0. \tag{3.2.12}$$

Dreptele (3.2.8) şi (3.2.9) sunt *paralele* dacă vectorii lor directori sunt coliniari, adică dacă există un scalar (nenul, în cazul nostru) $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât să avem

$$\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2 \tag{3.2.13}$$

sau (cu aceeaşi convenţie ca şi la ecuaţiile dreptei)

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{3.2.14}$$

3.3 Probleme diverse referitoare la drepte şi plane în spaţiu

3.3.1 Poziţiile relative a două plane

Presupunem că s-a fixat un sistem de coordonate afine $Oxyz$ şi sunt date două plane, prin ecuaţiile lor generale

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0, \tag{3.3.1}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0. \tag{3.3.2}$$

Este clar, din considerente geometrice, că cele două plane se pot afla în următoarele situaţii:

1) se taie după o dreaptă;

2) sunt paralele, dar nu coincid;

3) coincid.

Scopul nostru este să stabilim relaţiile care există între coeficienţii celor două ecuaţii în fiecare caz.

Vom numi *urmă* a planului (3.3.1) pe planul de coordonate xOy intersecţia dintre acest plan şi planul de coordonate. Dacă planul (3.3.1) nu este paralel cu planul xOy, atunci această intersecţie este o dreaptă care, privită că dreaptă în planul de coordonate, va avea, în mod evident, ecuaţia

$$A_1x+B_1y+D_1=0.$$

Analog se obţin urmele planului pe planele de coordonate xOz şi yOz, dacă planul nostru nu este paralel nici cu aceste plane de coordonate. Este clar că planul (3.3.2) coincide cu planul (3.3.1) dacă şi numai dacă urmele lor pe planele de coordonate coincid. Din studiul poziţiei reciproce a două drepte în plan, ştim deja ă aceasta se întâmplă dacă şi numai dacă toţi coeficienţii celor două plane sunt proporţionali, adică dacă şi numai dacă există un scalar nenul λ astfel încât să avem

$$A_1=\lambda A_2,\ B_1=\lambda B_2\ C_1=\lambda C_2,\ D_1=\lambda D_2 \tag{3.3.3}$$

sau

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2},$$

scriere care poate fi folisită dacă nici unul dintre coeficienţii celui de-al doilea plan nu se anulează sau dacă facem convenţia că în scrierea de mai sus, de fiecare dată când un coeficient al celei de-al doilea plan se anulează, la fel se întâmplă şi cu coeficientul similar al primei ecuaţii.

Din punct de vedere algebric, la aceeaşi concluzie se poate ajunge şi pe altă cale. Pentru ca planele (3.3.1) şi (3.3.2) să coincidă, este necesar şi suficient ca sistemul foemat din ecuaţiile lor să fie compatibil, dublu nedeterminat, ceea ce înseamnă exact condiţia (3.3.3).

Să presupunem acum, de exemplu, că primul plan este paralel cu planul xOy. Aceasta înseamnă, evident, că $A_1=B_1=0$, iar raţionamentul algebric de mai sus ne duce la aceeaşi cocluzie ca pentru planele în poziţie generală.

Dacă sistemul de ecuaţii (3.3.1)–(3.3.2) este incompatibil, atunci înseamnă că rangul sistemului trebuie să fie egal cu 1, în timp ce rangul matricei extinse trebuie să fie egal cu 2. Prin urmare, planele sunt paralele dacă şi numai dacă

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}, \tag{3.3.4}$$

cu aceeaşi convenţie ca mai sus asupra egalităţii cu zero a numitorilor.

Ultima situaţie posibilă este ca sistemul format din ecuaţiile planelor să fie de rang maxim, ceea ce înseamnă că intersecţia este o dreaptă. Aceasta înseamnă că primii trei coeficienţi nu pot fi proporţionali.

3.3.2 Poziţiile relative a trei plane

Considerăm trei plane, date prin ecuaţiile lor generale:

$$\begin{cases} (P_1)\, A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ (P_2)\, A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \\ (P_3)\, A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0. \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Pentru a stabili poziţiile relative ale celor trei plane, trebuie să studiem sistemul de ecuaţii (3.3.5). Fie Δ determinantul sistemului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

m – matricea sistemului,

$$m = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

şi M – matricea extinsă a sistemului,

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Notăm, de asemenea, cu $\mathbf{n}_1(A_1,B_1,C_1)$, $\mathbf{n}_2(A_2,B_2,C_2)$, $\mathbf{n}_3(A_3,B_3,C_3)$ vectorii normali la cele trei plane. Avem următoarele situaţii:

(a) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci sistemul (3.3.5) este compatibil determinat, prin urmare, are o singură soluţie: *planele se intersectează într-un punct*.

(b) Să presupunem acum că $\Delta = 0$, $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 3$, iar vectorii normali la cele trei plane sunt, doi câte doi, necoliniari. Deoarece rangul matricei sistemului este strict mai mic decât rangul matricei extinse, sistemul este incompatibil, prin urmare cele trei plane nu au nici un punct comun. Cum vectorii normali sunt, doi câte doi, necoliniari, rezultă că planele sunt, două câte două, neparalele. Ele se intersectează după câte o dreaptă, iar cele trei drepta care se obţin sunt paralele.

(c) De data aceasta avem, de asemenea, $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 3$, dar acum doi dintre cei trei vectori normali la plane sunt coliniari[1]. Două dintre cele trei plane (cele cu vectorii normali coliniari) sunt paralele între ele, iar cel de-al treilea le intersectează pe ambele.

(d) Să presupunem acum că $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 2$ (deci sistemul este compatibil), iar vectorii normali sunt doi câte doi necoliniari. În acest caz, planele sunt două câte două distincte şi trec prin aceeaşi dreaptă.

(e) Dacă $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 2$, iar doi dintre cei trei vectori normali sunt coliniari, atunci, din nou, sistemul este compatibil, două dintre plane coincid (cele care au vectorii normali coliniari), iar cel de-al treilea le intersectează după o dreaptă.

[1]Nu pot fi toţi trei coliniari, deoarece $\operatorname{rg} m = 2$!

(f) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 3$, atunci sistemul este incompatibil, aşadar planele nu se intersectează, dar ele sunt paralele între ele.

(g) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 2$, atunci două dintre plane coincid, iar cel de-al treilea este paralel cu ele.

(h) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 1$, atunci sistemul este compatibil dublu, toate cele trei plane coincid.

3.3.3 Fascicole de plane. Snopuri de plane

Definiţia 3.3. Se numeşte *fascicol de plane* mulţimea tuturor planelor care trec printr-o anumită dreaptă, care se numeşte *axa fascicolului*.

Să presupunem că sunt date două plane distincte concurente

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{3.3.6}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{3.3.7}$$

Teorema 3.4. *Dacă α şi β sunt două numere reale care nu se anulează simultan, atunci ecuaţia*

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \tag{3.3.8}$$

este ecuaţia unui plan ce aparţine fascicolului de plane determinat de planele (3.3.6) şi (3.3.7). Invers, orice plan al acestui fascicol se poate reprezenta cu ajutorul unei ecuaţii (3.3.8), pentru o anumită alegere a constantelor α şi β, care nu sunt ambele nule.

Demonstraţia acestei teoreme este perfect analogă cu demonstraţia teoremei similare pentru fascicole de drepte din plan, de aceea nu o vom mai reproduce aici.

Spre deosebire de cazul dreptelor din plan, unde am avut de considerat doar familiile de drepte care trec printr-un punct (adică fascicolele de drepte), în cazul planelor în spaţiu, pe lângă fascicolele de plane (care trec printr-o dreaptă), putem considera alte familii remarcabile de plane, cele ce trec printr-un punct. Începem prin a da următoarea definiţie:

Definiţia 3.4. Se numeşte *snop de plane* mulţimea tuturor planelor care trec printr-un punct dat, numit *centrul snopului de plane*.

Să presupunem că centrul snopului de plane este dat prin intermediul coordonatelor sale, $S(x_0, y_0, z_0)$. Atunci, în mod evident, orice plan care trece prin centrul snopului (şi, deci, aparţine snopului), se poate scrie sub forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{3.3.9}$$

unde constantele reale A, B, C nu sunt toate egale cu zero. Invers, pentru orice constante A, B, C care nu sunt toate egale cu zero, ecuaţia (3.3.9) este ecuaţia unui plan care trece prin centrul snopului.

Ca şi în cazul fascicolelor, însă, de multe ori nu este dat în mod explicit centrul snopului de plane, ci acesta este descris cu ajutorul ecuaţiilor unor plane care trec prin acest punct. Este util să avem o descriere a planelor snopului cu ajutorul unui număr redus de plane (mai precis, trei), care determină în mod unic centrul acestui snop. Avem următorul rezultat:

Teorema 3.5. *Fie*

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \end{cases} \tag{3.3.10}$$

ecuaţiile a trei plane care trec prin punctul $S(x_0,y_0,z_0)$ *astfel încât să fie îndeplinită condiţia*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.3.11}$$

Atunci pentru orice numere reale α,β,γ *care nu se anulează simultan, ecuaţia*

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\gamma(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0 \tag{3.3.12}$$

descrie un plan al snopului de plane cu centrul în punctul S. Invers, orice plan al acestui snop poate fi descris prin intermediul unei ecuaţii de acest tip, pentru o anumită alegere a constantelor α,β,γ.

Demonstraţie Rescriem, mai întâi, ecuaţia (3.3.12) sub forma

$$(A_1\alpha+A_2\beta+A_3\gamma)x+(B_1\alpha+B_2\beta+B_3\gamma)Y+(C_1\alpha+C_2\beta+C_3\gamma)Z+D_1\alpha+D_2\beta+D_3\gamma=0. \tag{3.3.13}$$

Pentru ca această ecuaţie să reprezinte, într-adevăr, ecuaţia unui plan, coeficienţii săi nu trebuie să se anuleze simultan.

Presupunem că coeficienţii lui x,y,z din această ecuaţie sunt egali cu zero:

$$\begin{cases} A_1\alpha+A_2\beta+A_3\gamma=0, \\ B_1\alpha+B_2\beta+B_3\gamma=0, \\ C_1\alpha+C_2\beta+C_3\gamma=0. \end{cases} \tag{3.3.14}$$

În virtutea ecuaţiei (3.3.11) sistemul de ecuaţii (3.3.14) cu necunoscutele α,β,γ, admite numai soluţia trivială $\alpha=\beta=\gamma=0$, ceea ce contrazice alegerea parametrilor α,β,γ. Prin urmare, ecuaţia (3.3.13) (decişi ecuaţia (3.3.12), care este echivalentă cu ea), este o ecuaţie liniară în raport cu x,y,z, aşadar este ecuaţia unui plan. Cum punctul S aparţine fiecăruia dintre planele (3.3.10), el verifică şi ecuaţia (3.3.12), adică planul acesta aparţine snopului.

Fie acum

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{3.3.15}$$

un plan oarecare al snopului.

Considerăm acum sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} A_1\alpha+A_2\beta+A_3\gamma=A, \\ B_1\alpha+B_2\beta+B_3\gamma=B, \\ C_1\alpha+C_2\beta+C_3\gamma=C, \end{cases} \tag{3.3.16}$$

în raport cu necunoscutele α, β, γ. În virtutea relaţiei (3.3.11), sistemul acesta admite o soluţie unică. Cum fiecare dintre planele (3.3.10), ca şi planul (3.3.15) trec prin punctul $S(x_0, y_0, z_0)$, rezultă că

$$\begin{cases} D_1 = -A_1x_0 - B_1y_0 - C_1z_0, \\ D_2 = -A_2x_0 - B_2y_0 - C_2z_0, \\ D_3 = -A_3x_0 - B_3y_0 - C_3z_0, \\ D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0. \end{cases}$$

De aici şi din egalităţile (3.3.16) obţinem

$$D_1\alpha + D_2\beta + D_3\gamma = D.$$

Astfel, pentru valorile alese ale lui α, β, γ ecuaţiile (3.3.12) şi (3.3.15) coincid. □

3.3.4 Poziţia relativă a unei drepte faţă de un plan

Considerăm un plan Π, dat prin ecuaţia generală

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3.3.17}$$

şi o dreaptă Δ, dată prin ecuaţiile sale parametrice

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \tag{3.3.18}$$

Trebuie să stabilim poziţia dreptei Δ relativ la planul Π.

Este clar, din motive geometrice, că sunt posibile următoarele situaţii:

(i) dreapta intersectează planul într-un punct;

(ii) dreapta este paralelă cu planul şi nu este situată în el;

(iii) dreapta este inclusă în plan.

Vom stabili care trebuie să fie legătura dintre coeficienţii planului şi cei ai dreptei pentru fiecare dintre cele trei situaţii.

Dacă înlocuim expresiile lui x, y, z din ecuaţiile dreptei Δ în ecuaţia planului Π, obţinem:

$$(Al + Bm + Cn)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{3.3.19}$$

Soluţia acestei ecuaţii în t reprezintă valoarea parametrului de pe dreaptă care corespunde punctului (sau punctelor) de intersecţie dintre dreaptă şi plan. Este uşor de văzut că ecuaţia admite o soluţie unică dacă şi numai dacă coeficientul lui t este diferit de zero, adică

$$Al + Bm + Cn \neq 0.$$

Semnificaţia geometrică a acestei relaţii este clară: vectorul director al dreptei nu este perpendicular pe vectorul normal la plan, adică dreapta nu este paralelă cu planul. Prin urmare, condiţia aceasta este condiţia ca *dreapta şi planul să se intersecteze într-un punct*.

Dacă este îndeplinită condiţia

$$Al+Bm+Cn=0, \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0,$$

atunci dreapta este paralelă cu planul, dar nu se intersectează cu el. Într-adevăr, prima condiţie arată că dreapta este paralelă cu planul, în timp ce a doua condiţie indică faptul că ecuaţia nu are soluţie.

În sfârsit, dacă este îndeplinită condiţia

$$Al+Bm+Cn=0, \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$$

atunci dreapta este inclusă în plan, pentru că, în acest caz, ecuaţia de intersecţie se transformă într-o identitate, care este verificată pentru orice t real.

3.3.5 Ecuaţia unui plan determinat de două drepte concurente

Considerăm dreptele

$$(D_1):\ \frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{m_1}=\frac{z-z_0}{n_1} \tag{3.3.20}$$

şi

$$(D_2):\ \frac{x-x_0}{l_2}=\frac{y-y_0}{m_2}=\frac{z-z_0}{n_2}, \tag{3.3.21}$$

care trec prin punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Atunci planul care trece prin cele două drepte este, în fapt, planul care trece prin punctul M_0 şi este paralel cu vectorii $\mathbf{v}_1(l_1,m_1,n_1)$ şi $\mathbf{v}_2(l_2,m_2,n_2)$, deci ecuaţia sa este

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \tag{3.3.22}$$

3.3.6 Ecuaţia planului determinat de o dreaptă şi un punct

Considerăm dreapta

$$(D):\ \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \tag{3.3.23}$$

şi punctul $M_2(x_2,y_2,z_2)$, care nu aparţine dreptei. Planul pe care îl căutăm este cel care trece prin punctul $M_1(x_1,y_1,z_1)$ şi este paralel cu vectorii $\mathbf{v}(l,m,n)$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, deci ecuaţia lui va fi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0. \tag{3.3.24}$$

3.3.7 Ecuaţia planului determinat de două drepte paralele

Considerăm dreptele paralele (şi distincte!)

$$(D_1): \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \tag{3.3.25}$$

şi

$$(D_2): \frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m} = \frac{z-z_2}{n}, \tag{3.3.26}$$

care trec prin punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$ şi $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Planul pe care îl căutăm este cel care trece prin punctul $M_1(x_1,y_1,z_1)$ şi este paralel cu vectorii $\mathbf{v}(l,m,n)$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, deci ecuaţia lui va fi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \tag{3.3.27}$$

3.3.8 Proiecţia unei drepte pe un plan

Considerăm dreapta

$$(D): \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \tag{3.3.28}$$

şi planul

$$(P): Ax+By+Cz+D=0. \tag{3.3.29}$$

Este uşor de constatat că dacă proiectăm ortogonal toate punctele dreptei (D) pe planul (P) obţinem o dreaptă situată în plan, pe care o vom numi *proiecţia dreptei* (D) *pe planul* (P). Dacă dreapta este *perpendiculară* pe plan, atunci dreapta aceasta, de fapt, se reduce la un singur punct, cel în care dreapta înţeapă planul. De aceea, în cele ce urmează, vom admite că dreapta *nu* este perpendiculară pe plan.

Dreapta pe care o căutăm o vom scrie ca intersecţie a două plane: planul (P) şi planul (P'), care trece prin dreapta (D) şi este perpendicular pe planul (P). În practică, acest plan este planul care trece prin punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de pe dreaptă şi este paralel cu cevtorul director al dreptei, $\mathbf{v}(l,m,n)$ şi vectorul normal la planul (P), $\mathbf{n}(A,B,C)$, Datorită ipotezei pe care am făcut-o mai sus, cei doi vectori sunt necoliniari, dei punctul şi cei doi vectori determină, în mod unic, planul (P').

După cum am văzut, ecuaţia planului (P') este

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0. \tag{3.3.30}$$

Aşadar, ecuaţiile proiecţiei dreptei pe plan sunt

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases} \tag{3.3.31}$$

3.3.9 Poziţia relativă a două drepte în spaţiu

Presupunem că se dau două drepte în spaţiu, prin intermediul ecuaţiilor lor parametrice

$$x = x_1 + l_1 t,\ y = y_1 + m_1 t,\ z = z_1 + n_1 t, \tag{3.3.32}$$
$$x = x_2 + l_2 s,\ y = y_2 + m_2 s,\ z = z_2 + n_2 s, \tag{3.3.33}$$

şi vrem să stabilim poziţia lor relativă.

Din considerente geometrice, este clar că putem avea următoarele situaţii:

(a) dreptele sunt concurente;

(b) dreptele coincid;

(c) dreptele sunt paralele, dar nu coincid;

(d) dreptele sunt necoplanare (strâmbe).

Vom stabili acum legăturile dintre coeficienţii celor două drepte pentru fiecare situaţie.

Considerăm vectorii directori ai celor două drepte:

$$\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1),\ \mathbf{a}_2(l_2, m_2, n_2).$$

Presupunem că aceşti vectori sunt coliniari, adică

$$l_1 = \lambda l_2,\ m_1 = \lambda m_2,\ n_1 = \lambda n_2. \tag{3.3.34}$$

Atunci dreptele sunt paralele, adică fie coincid, fie sunt paralele şi nu au nici un punct comun. Dreptele coincid dacă şi numai dacă vectorul $\overrightarrow{M_1M_2}$, unde $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, este paralel cu vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$, adică:

$$x_2 - x_1 = \mu l_1,\ y_2 - y_1 = \mu m_1,\ z_2 - z_1 = \mu n_1. \tag{3.3.35}$$

Astfel, egalităţile (3.3.34) şi (3.3.35) reprezintă condiţiile necesare şi suficiente pentru ca dreptele (3.3.32) şi (3.3.33) să coincidă. Pentru ca aceste drepte să fie paralele, fără să coincidă, este necesar şi suficient ca condiţia (3.3.34) să fie verificată, iar condiţia (3.3.35) – nu.

Să presupunem acum că vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ sunt necoliniari, adică nu este verificată condiţia (3.3.34). Atunci dreptele (3.3.32) şi (3.3.33) se intersectează într-un punct sau sunt necoplanare. Dacă se intersectează şi, prin urmare, se află într-un acelaşi plan Π, atunci vectorii $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}$ sunt coplanari. De aceea:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.3.36}$$

Invers, să presupunem că vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ sunt necoliniari şi este verificată condiţia (3.3.36). Alegem punctele A_1 şi A_2 astfel încât să avem $\overrightarrow{M_1A_1} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{M_2A_2} = \mathbf{a}_2$. Atunci segmentele M_1M_2, M_1A_1 şi M_2A_2 determinaă un plan, în care sunt situate dreptele (3.3.32) şi (3.3.33). Cum vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ sunt necoliniari, dreptele sunt concurente. Astfel, dreptele (3.3.32) şi (3.3.33) sunt concurente dacă şi numai dacă vectorii lor directori sunt necoliniari şi este verificată egalitatea (3.3.36). Remarcăm că această egalitate are loc şi dacă dreptele sunt paralele, pentru că în acest caz a doua şi a treia linie a determinantului sunt proporţionale. Prin urmare, condiţia necesară pentru ca dreptele noastre să fie *necoplanare* este

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

În restul acestui capitol vom presupune că reperul cu care lucrăm este ortonormat.

3.3.10 Distanţa de la un punct la o dreaptă în spaţiu

Vom stabili, în cele ce urmază, o formulă care ne dă distanţa d de la un punct M_1, de vector de poziţie $\mathbf{r}_1$, în spaţiu, la o dreaptă Δ, de ecuaţie vectorială $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$. Alegem, mai întai, un punct M_2 pe dreapta Δ astfel încât să avem $\overrightarrow{M_0M_2} = \mathbf{a}$.

Construim un paralelogram pe vectorii $\overrightarrow{M_0M_1}$ şi $\overrightarrow{M_0M_2}$. Atunci distanţa d căutată este egală cu lungimea perpendicularei M_1N, coborâte din vârful M_1 pe latura opusă a paralelogramului. Cum aria paralelogramului este egală cu

$$\|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\| d,$$

formula

$$d = \frac{\|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}$$

ne dă distanţa de la punctul M_1, de vector de poziţie $\mathbf{r}_1$ la dreapta Δ.

3.3.11 Perpendiculara comună a două drepte strâmbe

Considerăm două drepte în spaţiu,

$$(\Delta_1) : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \tag{3.3.37}$$

şi

$$(\Delta_2) : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}, \tag{3.3.38}$$

astfel încât cele două drepte să fie necoplanare, adică

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

După cum se ştie din geometria elementară, există o singură dreaptă care intersectează ambele drepte date şi este perpendiculară pe fiecare dintre ele. De aceea, ea se şi numeşte *perpendiculara comună* a celor două drepte.

Metoda de construire a perpendicularei comune este cât se poate de simplă. Mai întâi determinăm vectorul director al acestei perpendiculare. Fie $\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1)$, respectiv $\mathbf{a}_2(l_2, m_2, n_2)$ vectorii directori ai dreptelor Δ_1 şi Δ_2. Atunci vectorul $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ este, conform definiţiei, un vector care este perpendicular atât pe vectorul $\mathbf{a}_1$, cât şi pe vectorul $\mathbf{a}_2$, prin urmare el este, în mod evident, un vector director al perpendicularei comune. Cum

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix},$$

componentele acestui vector sunt

$$\beta_1 \equiv \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad \beta_2 \equiv \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \quad \beta_3 \equiv \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}. \tag{3.3.39}$$

Acum scriem ecuaţiile perpendicularei comune ca intersecţie de două plane: unul care trece prin prima dreaptă şi este perpendicular pe cea de-a doua şi unul care trece prin a doua dreaptă şi este perpendicular pe prima dreaptă.

Primul plan se va putea scrie, prin urmare:

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Într-adevăr, acest plan trece prin dreapta Δ_1 şi este paralel cu perpendiculara comulă, deci, în particular, este perpendicular pe dreapta Δ_2. În acelaşi mod, cel de-al doilea plan se va scrie:

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

prin urmare ecuaţiile perpendicularei comune vor fi:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

3.3.12 Lungimea perpendicularei comune a două drepte necoplanare

Considerăm, din nou, dreptele necoplanare (3.3.37) şi (3.3.38). Consideră, de asemenea, planul π care trece prin prima dreaptă şi este paralel cu cea de-a doua, adică planul de ecuaţie

$$\pi : \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Vectorul normal la acest plan este, în mod evident, $\mathbf{n}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, unde $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sunt date de (3.3.39).

Atunci lungimea perpendicularei comune (adică distanţa dintre dreptele necoplanare date), va fi egală cu distanţa de la un punct oarecare al dreptei Δ_2 (de exemplu punctul $M_2(x_2,y_2,z_2)$) până la planul π. Conform formulei pentru distanţa de la un punct la un plan, obţinem:

$$d(\Delta_1,\Delta_2)=d(M_2,\pi)=\left|\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}\right|.$$

3.3.13 Unghiul dintre o dreaptă şi un plan

Presupunem că se dă dreapta

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt \tag{3.3.40}$$

şi planul

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{3.3.41}$$

Vom nota cu φ unghiul dintre dreaptă şi plan (mai precis, unghiul dintre dreaptă şi proiecţia sa pe plan). Dacă dreapta este perpendiculară pe plan vom pune $\varphi=\pi/2$. Vom considera că $0\le\varphi\le\pi/2$. Cum vectorul $\mathbf{n}(A,B,C)$ este perpendicular pe planul (3.3.41), unghiul format de vectorul director $\mathbf{a}(l,m,n)$ al dreptei (3.3.40) cu vectorul $\mathbf{n}$ este fie $\psi=\pi/2-\varphi$, fie $\psi=\pi/2+\varphi$. Prin urmare,

$$\sin\varphi=|\cos\varphi|=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Condiţia ca dreapta să fie paralelă cu planul este ca vectorul normal la plan să fie perpendicular pe vectorul director al dreptei, adică

$$Al+Bm+Cn=0,$$

în timp ce condiţia ca dreapta să fie perpendiculară pe plan este ca vectorul normal la plan să fie paralel cu vectorul director al dreptei, adică

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

3.4 Probleme

Problema 3.1. Stabiliţi ecuaţia unui plan care trece prin $A(1,3,0)$ şi este paralel cu dreptele

$$\begin{cases} x+y-z+3=0\\ 2x-y+5z+1=0\end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} -x+y=1\\ 5x+y-z+2=0\end{cases}.$$

Problema 3.2. Stabiliţi ecuaţia unui plan care trece prin dreapta

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{2}$$

şi este paralel cu dreapta

$$\frac{x}{5}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{3}.$$

Problema 3.3. Stabiliţi ecuaţia unui plan care trece prin dreapta

$$\begin{cases} x=3+t, \\ y=2+5t, \\ z=-1+3t, \end{cases}$$

şi este paralel cu dreapta

$$\begin{cases} x=4-2t, \\ y=-8+t, \\ z=5+2t. \end{cases}$$

Problema 3.4. Determinaţi ecuaţia unui plan care trece prin punctul $A(-1,1,2)$ şi prin dreapta de ecuaţii

$$\begin{cases} x=1+5t, \\ y=-1+t, \\ z=2t. \end{cases}$$

Problema 3.5. Determinaţi ecuaţia unui plan care trece prin punctul $A(-1,1,2)$ şi prin dreapta de ecuaţii

$$\begin{cases} x+5y-7z+1=0, \\ 3x-y+2z+3=0. \end{cases}$$

Problema 3.6. Stabiliţi ecuaţia planului care trece prin dreptele paralele

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{1} \quad \text{şi} \quad \frac{x-2}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z+3}{1}.$$

Problema 3.7. Demonstraţi că următoarele două drepte sunt concurente şi stabiliţi ecuaţia planului determinat de ele:

$$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{4} \quad \text{şi} \quad \frac{x+5}{2}=\frac{y+8}{3}=\frac{z-4}{-1}.$$

Problema 3.8. Demonstraţi că următoarele două drepte sunt concurente şi stabiliţi ecuaţia planului determinat de ele:

$$\begin{cases} x=1+3t, \\ y=-1+4t, \\ z=2+5t \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x=1-t, \\ y=-1+2t, \\ z=2+4t. \end{cases}$$

Problema 3.9. O dreaptă se proiectează pe planul yOz, paralel cu axa Ox. Stabiliţi ecuaţia proiecţiei dacă dreapta este dată de ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = 1+2t, \\ y = 3t, \\ z = 1-t. \end{cases}$$

Problema 3.10. Stabiliţi ecuaţiile unei drepte care trece prin $O(0,0,0)$ şi intersectează dreptele

$$\begin{cases} x-y+z+2=0, \\ x-2y+3z-8=0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} y-z+1=0, \\ x+y-2z+4=0. \end{cases}$$

Problema 3.11. Stabiliţi ecuaţiile unei drepte care trece prin $O(0,0,0)$ şi intersectează dreptele

$$\begin{cases} x = 1+2t, \\ y = 2+3t, \\ z = -t \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x = 4t, \\ y = 5-5t, \\ z = 3+2t. \end{cases}$$

Problema 3.12. Stabiliţi ecuaţiile unei drepte care trece prin $A(-1,1,-1)$ şi intersectează dreptele

$$\begin{cases} x-y+z+2=0, \\ x-2y+3z-8=0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} y-z=0, \\ x+y-2z+4=0. \end{cases}$$

Problema 3.13. În fascicolul de plane determinat de planele $x+2y-3z+5=0$ şi $4x-y+3z+5=0$ să se determine două plane perpendiculare, dintre care unul dintre care să treacă prin punctul $M(1,3,1)$.

Problema 3.14. Să se determine coordonatele unui punct A situat pe dreapta

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

şi este egal de părtat de punctele $B(3,0,-2)$ şi $C(-1,1,5)$.

Problema 3.15. Determinaţi coordonatele unui punct A, situat pe dreapta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1},$$

aflat la distanţa $\sqrt{3}$ faţă de planul $x+y+z+3=0$.

Problema 3.16. Determinaţi coordonatele unui punct A, situat pe dreapta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5},$$

egalo depărtat de punctul $B(0,1,1)$ şi de planul $2x-y+2z+1=0$.

Problema 3.17. Punctele $A(1,-1,2)$ şi $B(3,0,4)$ sunt vârfuri ale cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Vectorul $\overrightarrow{AD}$ este perpendicular pe dreapta

$$\begin{cases} x = 0, \\ y - z = 0, \end{cases}$$

iar orientarea bazei $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}\right\}$ este directă, în timp ce suma coordonatelor vectorului $\overrightarrow{AA_1}$ este negativă. Stabiliţi ecuaţiile feţelor cubului.

Problema 3.18. Stabiliţi ecuaţiile simetricei dreptei

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4}$$

faţă de planul $5x - y + z - 4 = 0$.

Problema 3.19. Stabiliţi ecuaţiile proiecţiei ortogonale pe planul $x + 5y - z - 25 = 0$ ale dreptei

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

Problema 3.20. Stabiliţi ecuaţiile proiecţiei ortogonale pe planul $x + 5y - z - 25 = 0$ ale dreptei

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-1}.$$

Problema 3.21. Determinaţi unghiul dintre planul $4x + 4y - 7z + 1 = 0$ şi dreapta

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ 2x + y + 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Problema 3.22. Stabiliţi ecuaţiile dreptei care trece prin $A(1,3,2)$, este paralelă cu planul xOy şi formează un unghi de 45° cu dreapta

$$\begin{cases} x = z, \\ z = 0. \end{cases}$$

Problema 3.23. Stabiliţi ecuaţiile dreptei care trece prin $A(1,3,2)$, este paralelă cu planul xOy şi formează un unghi de $\arcsin(1\sqrt{10})$ cu planul $x - y = 1$.

Problema 3.24. Stabiliţi ecuaţia planului care trece prin $A(-1,2,1)$, este paralel cu dreapta

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-1}$$

şi formează un unghi de 60° cu dreapta

$$\begin{cases} x = z, \\ z = 0. \end{cases}$$

Problema 3.25. Laturile egale ale unui triunghi isoscel se intersectează în vârful $A(3,4,5)$. Celelalte două vârfuri sunt situate pe axele Ox şi Oy, iar planul triunghiului este paralel cu axa Oz. Determinaţi unghiurile triunghiului şi scrieţi ecuaţia planului său.

Problema 3.26. Determinaţi coordonatele unui punct A de pe dreapta

$$\begin{cases} x-y-3=0, \\ 2y+z=0, \end{cases}$$

situat la distanţa $\sqrt{6}$ faţă de dreapta $x=y=z$.

Problema 3.27. Determinaţi distanţa dintre dreptele

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-1}{-2} \quad \text{şi} \quad \frac{x-5}{-6}=\frac{y}{-12}=\frac{z}{4}.$$

Problema 3.28. Punctele $A(-1,-3,1)$, $B(5,3,8)$, $C(-1,-3,5)$ şi $D(2,1,-4)$ sunt vârfurile unui tetraedru. Determinaţi înălţimea tetraedrului coborâtă din vârful D pe faţa ABC.

Problema 3.29. Punctele $A(-1,-3,1)$, $B(5,3,8)$, $C(-1,-3,5)$ şi $D(2,1,-4)$ sunt vârfurile unui tetraedru. Determinaţi înălţimea feţei ABC, coborâte din C pe latura AB.

Problema 3.30. Punctele $A(-1,-3,1)$, $B(5,3,8)$, $C(-1,-3,5)$ şi $D(2,1,-4)$ sunt vârfurile unui tetraedru. Determinaţi distanţa dintre muchiile (strâmbe) AD şi BC.

Problema 3.31. Lungimea muchiei cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este egală cu 1. Determinaţi distanţa dintre vârful A şi planul B_1CD_1.

Problema 3.32. Feţele $ABCD$, ABB_1A_1 şi ADD_1A_1 ale paralelipipedului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sunt situate în planele $2x+3y+4z+8=0$, $x+3y-6=0$, respectiv $z+5=0$. Vârful C_1 are coordonatele $(6,-5,1)$. Determinaţi distanţa de la vârful A_1 la planul B_1BD.

Problema 3.33. Feţele $ABCD$, ABB_1A_1 şi ADD_1A_1 ale paralelipipedului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sunt situate în planele $2x+3y+4z+8=0$, $x+3y-6=0$, respectiv $z+5=0$. Vârful C_1 are coordonatele $(6,-5,1)$. Determinaţi distanţa de la vârful D la dreapta AB.

Problema 3.34. Feţele $ABCD$, ABB_1A_1 şi ADD_1A_1 ale paralelipipedului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sunt situate în planele $2x+3y+4z+8=0$, $x+3y-6=0$, respectiv $z+5=0$. Vârful C_1 are coordonatele $(6,-5,1)$. Determinaţi distanţa dintre dreptele AC şi A_1C_1.

CAPITOLUL 4

Conice pe ecuaţia canonică

4.1 Elipsa

Definiţie şi ecuaţie canonică

Definiţia 4.1. Se numeşte *elipsă* locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanţelor de la ele până la două puncte fixe F_1 şi F_2, numite *focare* este constantă, egală cu $2a$, presupunându-se că distanţa dintre cele două focare este $2c$, unde c este un număr real pozitiv sau nul, verificând inegalitatea $c < a$.

Desigur, dacă focarele sunt confundate, elipsa este un cerc.

Pentru a deduce ecuaţia elipsei, construim un sistem de coordonate ortonormat în plan în modul următor. Alegem ca origine mijlocul segmentului F_1F_2 şi alegem ca axă Ox dreapta F_1F_2 orientată astfel încât F_2 să aibă abscisă pozitivă. Prin urmare, focarele vor avea coordonatele $F_1(-c,0)$ şi $F_2(c,0)$. Axa Oy se alege astfel încât să se completeze un sistem ortonormat drept (deci, în particular, ca dreaptă, această axă nu este altceva decât mediatoarea segmentului F_1F_2). Dacă cumva elipsa este un cerc (adică $c = 0$), atunci orice sistem de coordonate drept ortonormat, cu originea în centrul cercului, va satisface necesităţile noastre.

Fie $M(x,y)$ un punct oarecare al elipsei. Atunci avem, pe de-o parte,

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{4.1.1}$$

Pe de altă parte, din definiţia elipsei, trebuie să avem

$$F_1M + F_2M = 2a. \tag{4.1.2}$$

Combinând aceste două ecuaţii, obţinem:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \tag{4.1.3}$$

Aceasta este, de fapt, ecuaţia elipsei, întrucât punctele elipsei, şi numai ele, verifică această ecuaţie.

Vom stabili acum o altă formă, mai atractivă, pentru ecuaţia (4.1.3) a elipsei. Trecem ultimul termen din ecuaţie în membrul drept şi ridicăm la pătrat. După reducerea termenilor asemnea, obţinem:

$$a\sqrt{(x-x)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Ridicând din nou la pătrat şi regrupând termenii, obţinem:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

sau, încă,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \tag{4.1.4}$$

Introducem acum o nouă cantitate,

$$b=\sqrt{a^2-b^2};$$

conform ipotezelor noastre, această cantitate este reală. Avem, prin urmare,

$$b^2=a^2-c^2, \tag{4.1.5}$$

prin urmare ecuaţia (4.1.4) devine

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4.1.6}$$

Am demonstrat până acum că fiecare punct al elipsei verifică ecuaţia (4.1.6). Vom arăta acum că şi afirmaţia inversă este adevărată, în sensul că orice punct $M(x,y)$ ale cărui coordonate verifică ecuaţia (4.1.6), este un punct al elipsei, adică verifică ecuaţia (4.1.2). Din ecuaţia (4.1.6), obţinem

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Utilizând această relaţie şi egalitatea (4.1.5), obţinem

$$F_1M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2}+\sqrt{\left(\frac{c}{a}+a\right)^2}=\left|a+\frac{c}{a}x\right|.$$

Cum, în virtutea relaţiei (4.1.6), $|x|\le a$ şi, în plus, $c<a$, avem

$$F_1M=a+\frac{c}{a}x. \tag{4.1.7}$$

Exact la fel se obţine

$$F_1M=a-\frac{c}{a}x. \tag{4.1.8}$$

Însumând ultimele două egalităţi, obţinem egalitatea (4.1.2). Astfel, relaţia (4.1.6) este ecuaţia elipsei. Ea se numeşte *ecuaţia canonică a elipsei*.

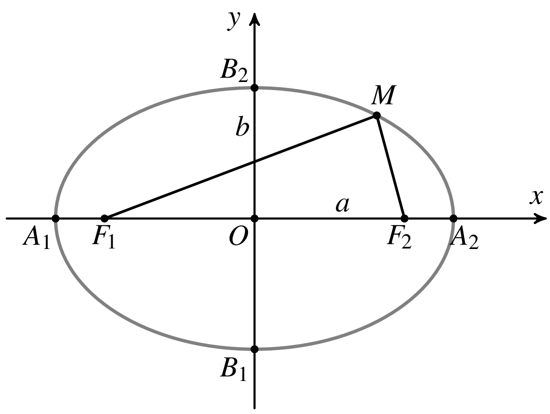


Figura 4.1: Elipsa

Studiul formei. Plecând de la ecuaţia (4.1.6), vom studia forma elipsei. Coordonatele punctelor de pe elipsă sunt supuse restricţiilor $|x| \leq a$ şi $|y| \leq b$. Prin urmare, elipsa este mărginită de un dreptunghi de laturi $2a$ şi $2b$, cu laturile paralele cu axele şi cu centrul în origine. Mai departe, remarcăm că în ecuaţia (4.1.6) a elipsei apar numai puteri pare ale coordonatelor, de aceea elipsa este simetrică faţă de axe şi, deci, şi faţă de origine. Aceasta înseamnă că dacă punctul $M(x,y)$ aparţine elipsei, atunci acelaşi lucru este valabil pentru punctele $M(-x,y)$, $M(x,-y)$ şi $M(-x,-y)$. Prin urmare, pentru a determina forma elipsei, este suficient să considerăm porţiunea ei cuprinsă în primul cadran al axelor de coordonate, iar în celelalte cadrane construcţia ei se poate face prin simetrie. Pentru primul cadran, din ecuaţia (4.1.6) se obţine:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{4.1.9}$$

Prin urmare, avem de studiat graficul funcţiei

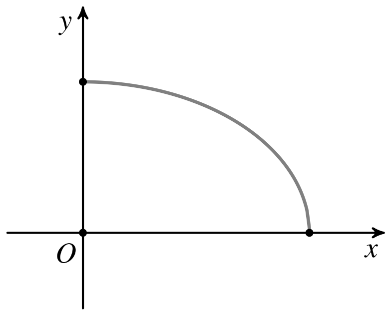


Figura 4.2: Porţiunea din elipsă cuprinsă în cadranul I

$$f : [0,a] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Este cât se poate de clar că nu avem de studiat limite la $\pm\infty$ sau asimptote, deci începem prin a calcula derivatele. Avem:

$$f'(x) = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

În ceea ce priveşte derivata a doua, se obţine:

$$f''(x) = \frac{ab}{(x-a)\,(x+a)\,\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Se observă imediat că ambele derivate sunt negative, deci funcţia este strict descrescăyoare şi concavă pe întreg domeniul de definiţie, ceea ce înseamnă că graficul său este cel din figura 4.2.

Axele de simetrie ale elipsei (axele Ox şi Oy), se numesc, pur şi simplu, *axe*, iar centrul de simetrie (originea coordonatelor), se numeşte *centrul elipsei*. Punctele A_1, A_2, B_1 şi B_2, în care axele se intersectează cu elipsa, se numesc *vârfuri* ale elipsei. Termenul de *semiaxe* se foloseşte atât pentru segmentele OA_1, OA_2, OB_1 şi OB_2, cât şi pentru lungimile lor, a şi b. În ipotezele noastre, când focarele elipsei sunt pe axa Ox, din relaţia (4.1.5) rezultă că $a > b$. În acest caz, a se numeşte *semiaxă mare*, iar b – *semiaxă mică*. Totuşi, ecuaţia (4.1.6) are sens şi în cazul în care $a < b$; aceasta va fi, însă, ecuaţia unei elipse care are focarele pe axa Oy, în loc de Ox, iar semiaxa mare va fi egală cu b.

Un al treilea caz posibil este cel în care $a = b$. În acest caz, ecuaţia (4.1.6) se transformă în

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{4.1.10}$$

În cele ce urmează vom privi cercul ca un caz particular de elipsă, în care cele două semiaxe sunt egale, iar focarele coincid cu centrul cercului.

Excentricitatea. Se numeşte *excentricitate* a elipsei numărul real

$$\varepsilon = c/a. \tag{4.1.11}$$

Întrucât, din ipoteza făcută iniţial, $c < a$, rezultă că $\varepsilon < 1$. În cazul cercului, focarele coincid, de aceea $c = 0$, iar excentricitatea este $\varepsilon = 0$.

Rescriem egalitatea (4.1.11) sub forma

$$\varepsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2}.$$

De aici se observă că excentricitatea determină forma elipsei: cu cât ε este mai aproape de zero, cu atât elipsa este mai apropiată de un cerc; dacă excentricitatea elipsei creşte, elipsa devine tot mai turtită.

Razele focale. Se numesc *raze focale* ale unui punct M al elipsei segmentele de dreaptă care unesc acest punct cu focarele F_1 şi F_2 ale elipsei. Lungimile lor, r_1 şi r_2 sunt date de formulele (4.1.7), respectiv (4.1.8), pe care le putem rescrie sub forma

$$r_1 = a + \varepsilon x,$$
$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

Intersecţia cu o dreaptă. Tangenta la o elipsă. Vom studia numărul de puncte de intersecţie pe care îl poate avea o dreaptă cu o elipsă. Vom presupune, mai întâi, că dreapta nu este paralelă cu axa Oy. Atunci ecuaţia sa se poate scrie cu ajutorul pantei:

$$y = kx + m. \tag{4.1.12}$$

Pentru a determina punctele de intersecţie ale acestei drepte cu elipsa (4.1.6), înlocuim expresia lui y din formula (4.1.12) în ecuaţia (4.1.6). Obţinem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx+m)^2}{b^2} = 1$$

sau

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2(m^2 - b^2) = 0.$$

Această ecuaţie ne dă abscisele punctelor de intersecţie. Întrucât este o ecuaţie de gradul doi, vor fi întotdeauna două puncte de intersecţie (distincte, confundate sau imaginare). Discriminantul ecuaţiei este:

$$\begin{aligned}\Delta = 4a^4k^2m^2 - 4a^2(m^2-b^2)(a^2k^2+b^2) = 4a^4k^2m^2 - 4a^4k^2m^2 - \\ - 4a^2m^2b^2 + 4a^2b^2k^2 + 4a^2b^4 = 4a^2b^2(a^2k^2+b^2-m^2).\end{aligned}$$

Semnul discriminantului este dat de factorul $s = a^2k^2 + b^2 - m^2$. Putem avea, deci, următoarele situaţii:

1. dacă $-\sqrt{a^2k^2+b^2} < m < \sqrt{a^2k^2+b^2}$, atunci $\Delta > 0$, iar dreapta şi elipsa au două puncte comune;
2. dacă $m = \pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$, atunci $\Delta = 0$, adică dreapta are un singur punct comun cu elipsa (dreapta este tangentă elipsei);
3. dacă $m \in \left(-\infty, -\sqrt{a^2k^2+b^2}\right) \cup \left(\sqrt{a^2k^2+b^2}, \infty\right)$, atunci $\Delta < 0$, iar dreapta şi elipsa nu au puncte comune.

Prin urmare, pentru orice pantă k există două tangente la elipsă, având această pantă, anume

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2+b^2}. \tag{4.1.13}$$

Dacă dreapta este paralelă cu axa Oy, atunci ecuaţia sa este de forma $x = h$. Dacă înlocuim în ecuaţia elipsei, obţinem

$$\frac{h^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

de unde

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right).$$

De aici se observă imediat că dreapta $x = h$ intersectează elipsa în două puncte distincte dacă $h \in (-a, a)$, este tangentă elipsei dacă $h = \pm a$ şi nu intersectează elipsa dacă $h \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

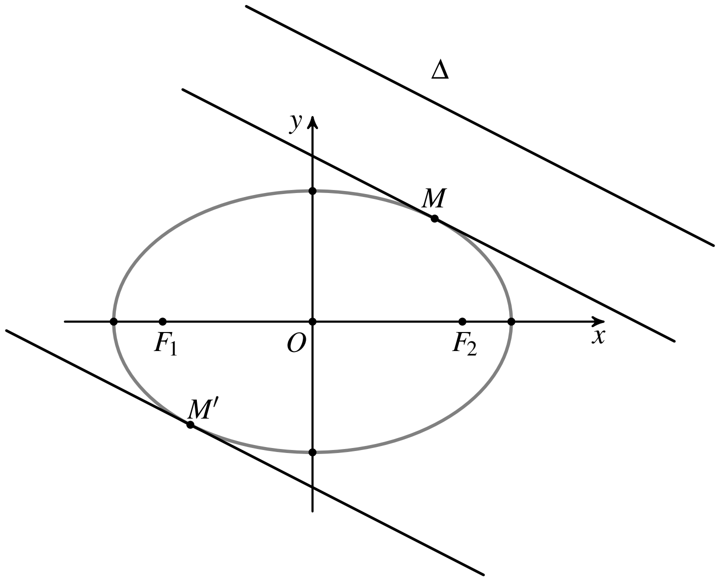


Figura 4.3: Tangentele la o elipsă paralele cu o dreaptă dată

Problema tangentei la o elipsă se poate aborda şi într-un alt mod. Anume, presupunem că vrem să determinăm ecuaţia tangentei într-un punct dat (x_0, y_0) al elipsei. Pentru a fixa ideile, presupunem că x_0 şi y_0 sunt ambele pozitive. Atunci ele se află pe o ramură a elipsei care poate fi descrisă prin ecuaţia

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Pentru a scrie ecuaţia tangentei, avem nevoie, mai întâi, de derivata lui y în x_0:

$$y'(x_0) = b\frac{-\frac{x_0}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0},$$

unde am ţinut cont de faptul că punctul (x_0, y_0) verifică ecuaţia elipsei. Prin urmare, după cum se ştie din analiză, ecuaţia tangentei este

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}x + \frac{b^2}{y_0}\frac{x_0^2}{a^2}.$$

Dacă înmulţim această ecuaţie cu $\frac{y_0}{b^2}$ obţinem

$$\frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{xx_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$$

sau, folosind din nou ecuaţia elipsei (pentru (x_0, y_0)),

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

adică ecuaţia tangentei într-un punct al unei elipse se poate scrie prin dedublare. Acelaşi rezultat se obţine, fără dificultate, şi dacă punctul de pe elipsă se află pe una dintre celelalte ramuri.

Vom descrie, în cele ce urmează, o altă metodă de a obţine ecuaţia tangentei într-un punct al unei elipse. Fie, prin urmare, $M_0(x_0, y_0)$ un punct al elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ecuaţiile parametrice ale unei drepte care trece prin M_0 vor fi:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în ecuaţia elipsei, obţinem:

$$b^2(x_0^2 + 2tlx_0 + l^2t^2) + a^2(y_0^2 + 2tmy_0 + m^2t^2) - a^2b^2 = 0$$

sau, grupând după puterile lui t,

$$t^2\left(b^2l^2 + a^2m^2\right) + 2t(a^2lx_0 + b^2my_0) + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0.$$

Cum punctul M_0 este pe elipsă, termenul liber al ecuaţiei trebuie să fie egal cu zero, deci ecuaţia se reduce la

$$t^2\left(b^2l^2 + a^2m^2\right) + 2t(b^2lx_0 + a^2my_0) = 0.$$

Pentru ca dreapta să fie tangentă elipsei, este necesar ca ecuaţia de mai sus să aibă rădăcină dublă. Aceasta se poate întâmpla dacă şi numai dacă termenul de gradul întâi dispare, adică dacă avem

$$b^2lx_0 + a^2my_0 = 0.$$

Dacă vectorul director al dreptei este $\mathbf{v}(l, m)$, ecuaţia de mai sus înseamnă că vectorul $\mathbf{n}(b^2x_0, a^2y_0)$ este perpendicular pe dreaptă, adică acest vector este vectorul perpendicular pe tangentă. De aici rezultă că ecuaţia tangentei se poate scrie sub forma

$$b^2x_0(x - x_0) + a^2y_0(y - y_0) = 0$$

sau

$$b^2x_0x + a^2y_0y - b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = 0.$$

Cum, din nou, punctul M_0 este pe elipsă, termenul liber este $-a^2b^2$, deci ecuaţia tangentei se scrie

$$b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0$$

sau

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{4.1.14}$$

În fine, vom discuta cazul în care ni se cere să determinăm tangentele duse dintr-un punct la o elipsă. Plecăm, din nou, de la ecuaţia canonică a elipsei,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

După cum am văzut mai sus, ecuaţia unei tangente neverticale la această elipsă se poate scrie sub forma

$$y = kx + \sqrt{a^2k^2 + b^2}.$$

Cerem ca această tangentă să treacă printr-un punct $M(x_1, y_1)$. Asta înseamnă că

$$y_1 = kx_1 + \sqrt{a^2k^2 + b^2}$$

sau

$$(y_1 - kx_1)^2 - a^2k^2 - b^2 = 0$$

sau, încă,

$$k^2(x_1^2 - a^2) - 2kx_1y_1 + y_1^2 - b^2 = 0. \tag{4.1.15}$$

Discriminantul ecuaţiei (4.1.15) este

$$\Delta = 4\left(b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2\right). \tag{4.1.16}$$

Pentru a avea două tangente prin punctul M trebuie să avem $\Delta > 0$, adică

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0. \tag{4.1.17}$$

Aceasta înseamnă că punctul M este exterior elipsei. Pantele celor două tangente vor fi

$$k_{1,2} = \frac{-x_1y_1 \pm \sqrt{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2}}{x_1^2 - a^2}.$$

Pentru a avea o singură tangentă, trebuie să avem $\Delta = 0$, adică

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{4.1.18}$$

De data asta, punctul trebuie să fie pe elipsă, iar panta unicei tangente va fi

$$k = \frac{-x_1y_1}{x_1^2 - a^2}.$$

Este uşor de constatat că, în acest caz, ecuaţia tangentei este chiar acea care se obţine prin dedublare, adică

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0.$$

În fine, nu avem tangente dacă $\Delta < 0$, adică dacă

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < 0 \tag{4.1.19}$$

sau, ceea ce este acelaşi lucru, dacă punctul M este în interiorul elipsei. Examinăm acum cazul şn care

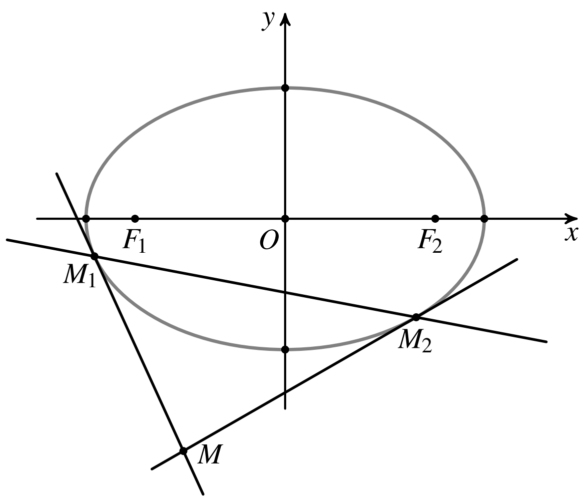


Figura 4.4: Tangente (neverticale) la elipsă dintr-un punct exterior

una dintre tangentele duse din punctul M este verticală. Este clar, atunci, că această tangentă trebuie să aibă ecuaţia

$$x = \pm a.$$

Aşadar, vom avea $M = M(\pm a, y_1)$. Ce-a de-a doua tangentă din M nu poate să fie tot verticală, deci ecuaţia sa trebuie să fie de forma

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}. \tag{4.1.20}$$

Pentru ca tangenta să treacă prin M, trebuie să avem

$$y_1 = \pm ka \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2} \tag{4.1.21}$$

sau, ridicând la pătrat,

$$(y_1 \mp ka)^2 = a^2k^2 + b^2 \tag{4.1.22}$$

adică

$$y_1^2 \mp 2y_1ka + a^2k^2 = a^2k^2 + b^2$$

sau

$$\pm 2y_1ak = y_1^2 - b^2. \tag{4.1.23}$$

Dacă $y_1 = 0$, atunci ecuaţia de mai sus (în k) nu are soluţie, ceea ce este normal, pentru că, în acest caz M este unul dintre vârfurile de pe Ox ale elipsei, deci nu există decât o singură tangentă, cea verticală. în caz contrar, din ecuaţia (4.1.23) rezultă că

$$k = \pm \frac{y_1^2 - b^2}{2ay_1}, \tag{4.1.24}$$

semnul alegându-se în funcţie de vârful prin care trece tangenta verticală.

Exemplul 4.1. content...

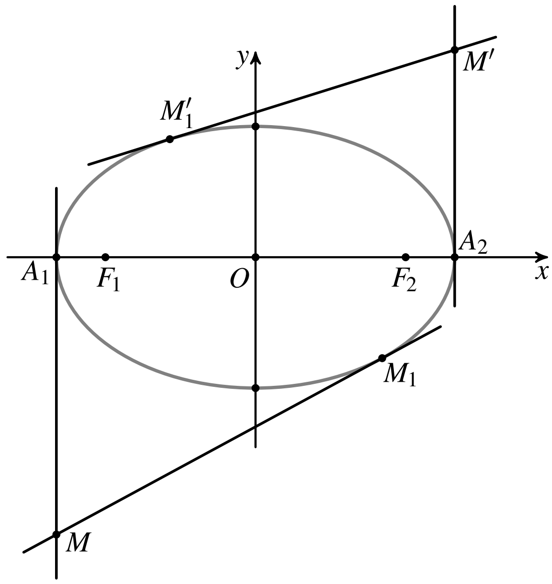


Figura 4.5: Tangente la elipsă, cu o tangentă verticală

4.2 Hiperbola

Definiţia şi deducerea formei canonice Considerăm că se dau, în plan, două puncte F_1 şi F_2, distanţa dintre care este egală cu $2c$. Mai alegem un număr real a, care verifică inegalitatea

$$0 < a < c. \tag{4.2.1}$$

Definiţia 4.2. Se numeşte *hiperbolă* figura geometrică formată din toate punctele din plan pentru care valoarea absolută a diferenţei distanţelor până la punctele fixe F_1 şi F_2 este constantă, egală cu $2a$. Punctele F_1 şi F_2 se numesc *focare* ale hiperbolei.

Este clar acum de ce am impus dubla inegalitate (4.2.1): dacă $a = 0$, atunci figura este neinteresantă, întrucât ea se reduce la o dreaptă (mediatoarea segmentului F_1F_2), în timp ce dacă $a > c$, figura este mulţimea vidă.

Vom stabili acum ecuaţia hiperbolei. În acest scop, alegem un reper cartezian în care axa Ox să coincidă cu dreapta F_1F_2, cu sensul de la F_1 înspre F_2. Originea o alegem în mijlocul segmentului F_1F_2. Prin urmare, coordonatele focarelor vor fi $F_1(-c,0)$ şi $F_2(c,0)$. Dacă $M(x,y)$ este un punct oarecare al hiperbolei, atunci, în conformitate cu definiţia, avem

$$|F_1M - F_2M| = 2a$$

sau

$$F_1M - F_2M = \pm 2a. \tag{4.2.2}$$

Dacă înlocuim în ecuaţia (4.2.2) expresiile

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

obţinem

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a. \tag{4.2.3}$$

Aceasta este ecuaţia hiperbolei. În cele ce urmează, vom obţine o formă mai simplă a ei. Trecem al doilea radical în membrul drept şi ridicăm ambii membrii la pătrat şi obţinem

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Dacă ridicăm din nou la pătrat şi reducem termenii asemenea, obţinem

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1. \tag{4.2.4}$$

introducem acum mărimea

$$b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

În virtutea inegalităţii (4.2.1), ea este reală. Atunci

$$b^2=c^2-a^2, \tag{4.2.5}$$

iar ecuaţia (4.2.4) capătă forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4.2.6}$$

Am demonstrat până acum că toate punctele hiperbolei, care verifică, deci, ecuaţia (4.2.3), verifică, de

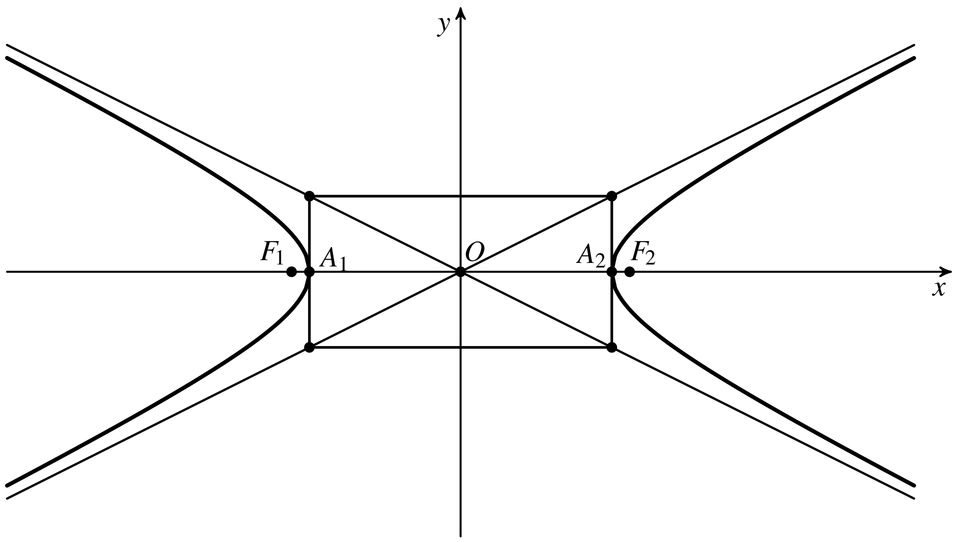


Figura 4.6: Hiperbola

asemenea, ecuaţia (4.2.6). Vom demonstra, acum, că şi afirmaţia inversă este adevărată. Fie, prin urmare, $M(x,y)$ un punct ce verifică ecuaţia (4.2.6). Atunci

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right).$$

Folosind această relaţie şi egalitatea (4.2.5), obţinem

$$\begin{aligned} F_1M &= \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{x^2+2cx+c^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2} = \left|\frac{c}{a}x+a\right|. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

În mod analog, se obţine

$$F_2M = \left|\frac{c}{a}x-a\right|. \tag{4.2.8}$$

Cum din egalitatea (4.2.6) rezultă că $|x| \geq a$, iar, în virtutea inegalităţii (4.2.1), $c > a$, rezultă că pentru $x \geq a$ formulele (4.2.7) şi (4.2.8) ne conduc la

$$F_1M = \frac{c}{a}x+a, \quad F_2M = \frac{c}{a}x-a. \tag{4.2.9}$$

Prin urmare,

$$F_1M - F_2M = 2a.$$

Pentru $x \leq -a$ avem

$$F_1M = -\frac{c}{a}x-a, \quad F_2M = -\frac{c}{a}x+a. \tag{4.2.10}$$

Prin urmare,

$$F_1M - F_2M = -2a.$$

Aşadar, orice punct care verifică ecuaţia (4.2.6) verifică, de asemenea, ecuaţia (4.2.2), deci şi ecuaţia (4.2.3). Prin urmare, ecuaţia (4.2.6) este echivalentă cu ecuaţia hiperbolei. Ea se numeşte *ecuaţia canonică a hiperbolei*.

Studiul formei hiperbolei. Asimptote. Din ecuaţia (4.2.6) se vede imediat că $|x| \geq a$. Aceasta înseamnă că hiperbola este situată, în întregime, în afara benzii verticale delimitată de dreptele $x = -a$ şi $x = a$.

Ca şi în cazul elipsei, în ecuaţia canonică a hiperbolei intră numai puteri pare ale variabilelor x şi y, ceea ce înseamnă că şi hiperbola are două axe de simetrie (axele de coordonate) şi un centru de simetrie (originea coordonatelor). De aceea, este suficient să studiem forma hiperbolei în primul cadran al axelor de coordonate, întrucât în celelalte trei se poate, apoi, deduce prin simetrie. În acest cadran, se obţine, din ecuaţia (4.2.6):

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \quad x \geq a. \tag{4.2.11}$$

Graficul acestei funcţii, care începe din punctul $A(a,0)$ este nemărginit la dreapta şi superior. Este uşor de constatat că dreapta

$$y = \frac{b}{a}x \tag{4.2.12}$$

este asimptotă oblică la $+\infty$ a acestui grafic. Este, de asemenea, clar, din motive de simetrie, că dreptele

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

sunt, ambele, asimptote oblice la graficul hiperbolei, atât la $+\infty$, cât şi la $-\infty$.

În cazul elipsei, am văzut că există un dreptunghi, cu centrul în origine şi de laturi $2a$, respectiv $2b$, cu laturile paralele cu axele de coordonate, care conţine întreaga elipsă şi care este, de asemenea, tangenr elipsei. Un rol asemănător îl joacă în cazul hiperbolei acelaşi dreptunghi, atâta doar că:

- hiperbola se află în exteriorul dreptunghiului;
- doar două dintre laturile dreptunghiului sunt tangente la elipsă şi
- diagonalele acestui dreptunghi (dreptele lor suport, de fapt) sunt chiar asimptotele hiperbolei.

Hiperbola este o figură alcătuită din două ramuri. Semnul "+" din egalitatea (4.2.2) corespunde ramurii din dreapta, în timp ce semnul "−" corespunde ramurii din stânga. Centrul de simetrie al hiperbolei se numeşte, pur şi simplu, *centrul* hiperbolei. Axele sale de simetrie se numesc *axele hiperbolei*. Mai precis, axa care intersectează hiperbola se numeşte *axă reală*, în timp ce axa ce nu o intersectează se numeşte *axă imaginară*. Punctele A_1 şi A_2, în care axa reală intersectează hiperbola se numesc *vârfuri* ale hiperbolei. De asemenea, ca şi în cazul elipsei, numerele a şi b se numesc *semiaxe* ale hiperbolei. Dacă $a = b$, atunci hiperbola se numeşte *echilateră*. E uşor de constatat că în cazul unei hiperbole echilatere asimptotele formează un unghi de 45° cu axa Ox.

Alături de hiperbola (4.2.6), se poate considera şi curba de ecuaţie

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.2.13}$$

Se poate vedea cu uşurinţă că şi această curbă este o hiperbolă, pentru care focarele sunt situate pe axa Oy. Vom spune despre cele două hiperbole (care au aceleaşi axe şi aceleaşi asimptote) că sunt *conjugate*.

Excentricitatea. Se numeşte *excentricitate* a hiperbolei numărul

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Este clar, din însăşi definiţia hiperbolei, că $\varepsilon > 1$. Excentricitatea determină forma dreptunghiului fundamental, deci, în ultimă instanţă, forma hiperbolei. Astfel, cu cât excentricitatea este mai mare, cu atât cele două ramuri ale hiperbolei se apropie mai mult de axa Oy şi, cu cât excentricitatea este mai apropiată de 1, cu atât hiperbola se apropie mai tare de axa Ox.

Intersecţia hiperbolei cu o dreaptă. Tangenta la o hiperbolă. Analog cu ceea ce am făcut în cazul elipsei, ne vom ocupa acum de problema intersecţiei dintre o hiperbolă dată de ecuaţia implicită (4.2.6) şi o dreaptă.

Să presupunem, mai întâi, că dreapta nu este orizontală. Atunci ecuaţia ei se poate scrie cu ajutorul pantei, adică

$$y = kx + m. \tag{4.2.14}$$

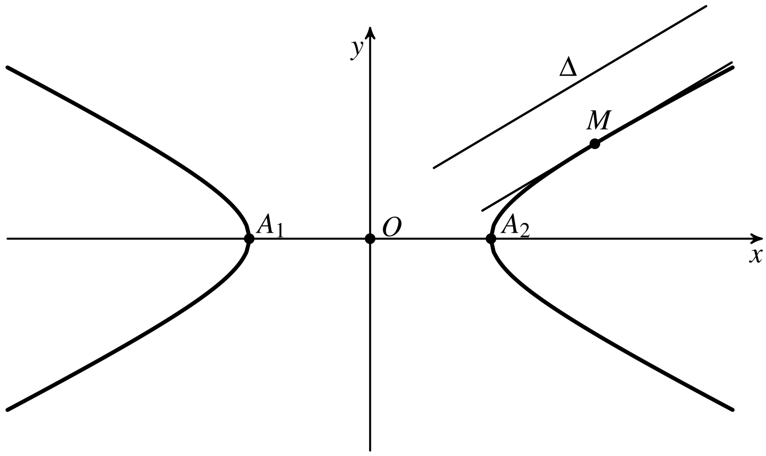


Figura 4.7: Tangenta la o hiperbolă, de direcţie dată

Dacă înlocuim pe y din formula de mai sus în ecuaţia (4.2.6) a hiperbolei, obţinem ecuaţia care ne dă abscisa (sau abscisele) punctului (sau punctelor) de intersecţie:

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kmx - a^2(b^2 + m^2) = 0. \tag{4.2.15}$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia de intersecţie*. Dacă $b^2 - a^2k^2 \neq 0$, atunci ecuaţia (4.2.15) este de gradul doi, deci pentru a determina numărul rădăcinilor sale reale trebuie să facem apel la discriminantul ecuaţiei. Avem

$$\Delta = -4a^2b^2\left(-b^2 + a^2k^2 - m^2\right). \tag{4.2.16}$$

Pentru ca dreapta să fie tangentă la hiperbolă, trebuie să avem $\Delta = 0$, adică

$$a^2k^2 = b^2 + m^2.$$

Este clar că, întrucât $b \neq 0$, vom avea, întotdeauna, două tangente, pentru un m dat. Dacă $\Delta > 0$, adică dacă

$$a^2k^2 < b^2 + m^2,$$

atunci dreapta şi hiperbola vor avea două puncte în comun.

Dacă $\Delta < 0$, adică dacă

$$a^2k^2 > b^2 + m^2,$$

atunci dreapta şi hiperbola nu vor avea în comun.

Dacă, pe de altă parte, $b^2 - a^2k^2 = 0$, atunci sunt posibile două situaţii:

1. $m = 0$;
2. $m \neq 0$.

În prima situaţie, avem două drepte, de pante $k = \pm b/a$, care trec prin origine. Este clar că aceste două drepte nu sunt altceva decât asimptotele hiperbolei, despre care ştim, deja, că nu au puncte comune cu hiperbola.

În ce-a de-a doua situaţie, avem de-a face cu drepte care sunt paralele cu asimptotele hiperbolei, aşadar ele intersectează hiperbola exact într-un punct.

Ecuaţia tangentei la hiperbolă prin dedublare. Utilizând exact aceeaşi metodă ca şi în cazul elipsei, se obţine

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

pentru ecuaţia tangentei în punctul $M_0(x_0, y_0)$ al hiperbolei.

Tangente la hiperbolă duse dintr-un punct exterior. Procedăm exact ca şi în cazul elipsei. Începem cu situaţia în care nici una dintre tangentele duse din $M(x_1, y_1)$ nu este verticală. Atunci, după cum am văzut, ecuaţia tangentei este de forma

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}.$$

Pentru ca tangenta să treacă prin M, trebuie să avem

$$y_1 - kx_1 = \pm\sqrt{a^2k^2 - b^2}$$

sau, ridicând la pătrat,

$$(y_1 - kx_1)^2 = a^2k^2 - b^2.$$

Se obţine, astfel, ecuaţia

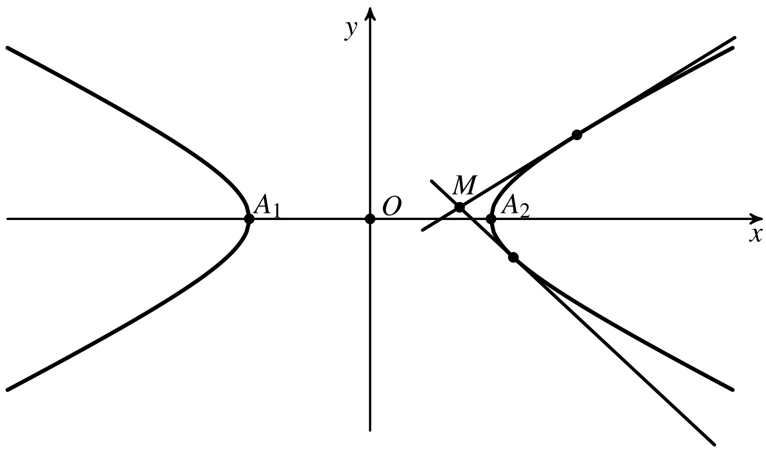


Figura 4.8: Tangente la hiperbolă dintr-un punct exterior (tangente neverticale)

$$(x_1^2 - a^2)k^2 - 2x_1y_1k + (y_1^2 + b^2) = 0.$$

Aceasta este ecuaţia care ne dă pantele celor două tangente. Discriminantul ei este:

$$\Delta = 4(a^2y_1^2 - b^2x_1^2 + a^2b^2) = -4a^2b^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right).$$

Se observă imediat că:

- avem două tangente dacă
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < 0,$$
adică punctul este între cele două ramuri ale hiperbolei;

- avem o singură tangentă dacă
$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1=0,$$
adică dacă punctul este pe hiperbolă;
- nu avem tangente dacă
$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1>0,$$
adică dacă punctul este în interiorul uneia dintre ramurile hiperbolei.

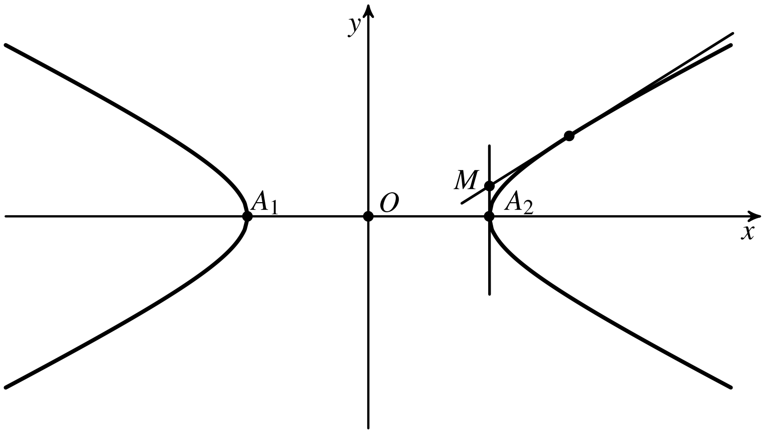


Figura 4.9: Tangente la hiperbolă dintr-un punct exterior (o tangentă verticală)

Examinăm acum cazul în care una dintre tangente este verticală, ceea ce înseamnă că are ecuaţia

$$x=\pm a.$$

Aşadar, vom avea $M=M(\pm a,y_1)$. Ce-a de-a doua tangentă din M nu poate să fie tot verticală, deci ecuaţia sa trebuie să fie de forma

$$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2-b^2}. \tag{4.2.17}$$

Pentru ca tangenta să treacă prin M, trebuie să avem

$$y_1=\pm ka\pm\sqrt{a^2k^2-b^2} \tag{4.2.18}$$

sau, ridicând la pătrat,

$$(y_1\mp ka)^2=a^2k^2-b^2 \tag{4.2.19}$$

adică

$$y_1^2\mp 2y_1ka+a^2k^2=a^2k^2-b^2$$

sau

$$\pm 2y_1ak=y_1^2+b^2. \tag{4.2.20}$$

Dacă $y_1 = 0$, atunci ecuaţia de mai sus (în k) nu are soluţie, ceea ce este normal, pentru că, în acest caz M este unul dintre vârfurile de pe Ox ale elipsei, deci nu există decât o singură tangentă, cea verticală. în caz contrar, din ecuaţia (4.1.23) rezultă că

$$k = \pm \frac{y_1^2 + b^2}{2ay_1}, \tag{4.2.21}$$

semnul alegându-se în funcţie de vârful prin care trece tangenta verticală.

4.3 Parabola

Definiţia şi ecuaţia canonică

Definiţia 4.3. Se numeşte *parabolă* locul geometric al punctelor din plan care sunt egal depărtate de o dreaptă fixă Δ, numită *directoare* şi de un punct fix F, numit *focar*.

Fie p distanţa de la punctul F la dreapta Δ. Construim un sistem rectangular de coordonate în plan în modul următor. În calitate de axă Ox alegem perpendiculara coborâtă din punctul F pe dreapta Δ, cu sensul de la directoare înspre focar, în timp ce axa Oy va fi mediatoarea segmentului determinat de F şi piciorul perpendicularei coborâte din F pe Δ, cu sensul ales astfel încât reperul xOy să fie drept, unde O este punctul de intersecţie a celor două axe de coordonate. Aceasta înseamnă că punctul F are coordonatele $(p/2, 0)$, în timp ce ecuaţia dreptei Δ este $x = -p/2$. ' Fie, acum, $M(x, y)$ un punct oarecare

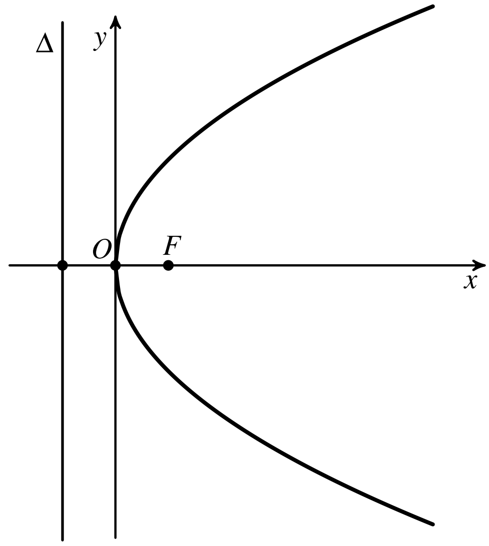


Figura 4.10: Parabola

al parabolei. Atunci, distanţa de la M la F este egală cu

$$d(M, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

în timp ce distanţa de la M la Δ este

$$d(M,\Delta) = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Aşadar, ecuaţia parabolei este, conform definiţiei,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \tag{4.3.1}$$

Este uşor de constatat că egalitatea (4.3.1) poate avea loc doar dacă

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2},$$

adică dacă

$$x \geq -\frac{p}{2}.$$

ceea ce înseamnă că ecuaţia parabolei, (4.3.1) se poate rescrie sub forma

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \tag{4.3.2}$$

Prin ridicare la pătrat, această ecuaţie este echivalentă (în acest caz particular!!) cu ecuaţia

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

sau, după reducerea termenilor asemenea, cu ecuaţia

$$y^2 = 2px. \tag{4.3.3}$$

Ecuaţia (4.3.3) se numeşte *ecuaţia canonică a parabolei de parametru* p.

Forma parabolei. Remarcăm, înainte de toate, că din ecuaţia canonică (4.3.3) rezultă imediat că x poate lua doar valori nenegative, prin urmare parabola dată de această ecuaţie este situată de partea dreaptă a axei Oy.

Cum ecuaţia (4.3.3) conţine variabila y doar la puterea a doa, rezultă că parabola este simetrică faţă de axa Ox şi, deci, pentru studiul formei, este suficient să examinăm partea din parabolă situată în primul cadran. În acest cadran, ecuaţia parabolei se poate scrie sub forma

$$y = \sqrt{2px}. \tag{4.3.4}$$

Dacă se calculează primele două derivate ale lui y, se obţine imediat că

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2px}}, \tag{4.3.5}$$

respectiv

$$y'' = -\frac{\sqrt{2}p^2}{4(px)^{3/2}}. \tag{4.3.6}$$

Aşadar, pe intervalul $(0,\infty)$, $y' > 0$, în timp ce $y'' < 0$. Aceasta înseamnă că funcţia y este strict crescătoare şi concavă pe acest interval. Forma curbei în cadranul al patrulea se obţine din cea din cadranul 1, printr-o reflexie faţă de axa Ox.

Axa de simetrie a parabolei (4.3.3), adică axa Ox, se numeşte *axa parabolei*, în timp ce punctul în care parabola intersectează axa (originea, în cazul nostru), se numeşte *vârful parabolei*.

Parametrul parabolei. Mărimea p care apare în ecuaţia canonică (4.3.3) se numeşte *parametru focal* sau, pur şi simplu, *parametru* al parabolei. Vom indica, şn cele ce urmează, o altă interpretare geometrică a acestui parametru. Considerăm dreapta care trece prin focarul parabolei şi este perpendiculară pe axa parabolei. Se observă, imediat, că ecuaţia acestei drepte este

$$x = \frac{p}{2}. \tag{4.3.7}$$

Fie M_1 şi M_2 punctele de intersecţie dintre această dreaptă şi parabolă. Rezolvând sistemul de ecuaţii format de ecuaţiile (4.3.3) şi (4.3.7), obţinem $y = \pm p$, prin urmare

$$p = FM_1. \tag{4.3.8}$$

Astfel, *parametrul p al parabolei este egal cu lungimea perpendicularei ridicate pe axa parabolei, între focarul parabolei şi punctul în care perpendiculara intersectează parabola.*

Parametrul este cel care defineşte forma şi dimensiunile parabolei.

Observaţie. Alături de ecuaţia (4.3.3), tot parabole definesc şi următoarele trei ecuaţii (canonice!):

$$y^2 = -2px, \quad x^2 = 2py, \quad x^2 = -2py. \tag{4.3.9}$$

Astfel, prima ecuaţie ne dă o parabolă simetrică faţă de axa Oy în raport cu parabola (4.3.3), iar celelalte două parabole se obţin aplicând o rotaţie de $90°$, respectiv $-90°$, parabolei (4.3.3), în jurul originii.

Intersecţia parabolei cu o dreaptă. Tangenta la o parabolă. Considerăm parabola (4.3.3) şi o dreaptă, pe care o considerăm, în prima instanţă, neverticală. Pentru a determina punctele de intersecţie, trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = kx + b. \end{cases}$$

Înlocuind cea de-a doua ecuaţie în prima, obţinem ecuaţia în x:

$$k^2x^2 + 2(kb - p)x + b^2 = 0. \tag{4.3.10}$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia de intersecţie* dintre parabolă şi dreaptă. Cum ea este o ecuaţie de gradul doi în x, înseamnă că parabola şi dreapta pot avea în comun două puncte distince, un singur punct (sau două puncte confundate) sau niciun punct, în funcţie de discriminantul ecuaţiei (4.3.10).

Un calcul simplu ne arată că discriminantul este dat de

$$\Delta = 4p(p - 2bk). \tag{4.3.11}$$

Prin urmare,

(i) Parabola şi dreapta au două puncte distincte în comun dacă

$$\Delta > 0, \quad \text{adică} \quad kb < \frac{p}{2}.$$

(ii) Parabola şi dreapta au două puncte confundate în comun (adică, de fapt, un singur punct) dacă

$$\Delta = 0, \quad \text{adică} \quad kb = \frac{p}{2}.$$

În acest caz parabola şi dreapta sunt tangente. De remarcat că, întrucât parametrul p al parabolei este strict pozitiv, rezultă că (devreme ce $kb \neq 0$):

- tangenta la o parabolă nu poate fi orizontală (mai precis, în cazul general, nu poate fi paralelă cu axa parabolei);
- nu există tangente neverticale la o parabolă care să treacă prin vârful parabolei.

(iii) Parabola şi dreapta nu puncte în comun dacă

$$\Delta < 0, \quad \text{adică} \quad kb > \frac{p}{2}.$$

În particular, orice dreaptă paralelă cu axa parabolei (adică orizontală) intersectează parabola în două puncte distincte; de asemenea, orice dreaptă (neverticaă) care trece prin origine intersectează parabola în două puncte distincte.

Să analizăm, acum, intersecţia dintre parabola (4.3.3) şi o dreaptă verticală. În acest caz, avem de rezolvat sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ x = a, \end{cases}$$

care ne conduce la ecuaţia de intersecţie (în y de data aceasta);

$$y^2 - 2ap = 0. \tag{4.3.12}$$

Cum, din nou, $p > 0$, intersecţia este:

(i) o pereche de puncte distincte, dacă $a > 0$;

(ii) o pereche de puncte confundate (adică un singur punct) dacă $a = 0$. Dreapta este, în acest caz tangetă parabolei. Ea coincide cu axa Oy.

(iii) mulţimea vidă, dacă $a < 0$.

Ecuaţia tangentei într-un punct al parabolei. Plecăm, din nou, de la ecuaţia canonică a parabolei şi considerăm o dreaptă care intersectează parabola într-un punct $M_0(x_0, y_0)$. Ecuaţiile parametrice ale dreptei vor fi, deci

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia parabolei, obţinem

$$(y_0 + mt)^2 = 2p(x_0 + lt)$$

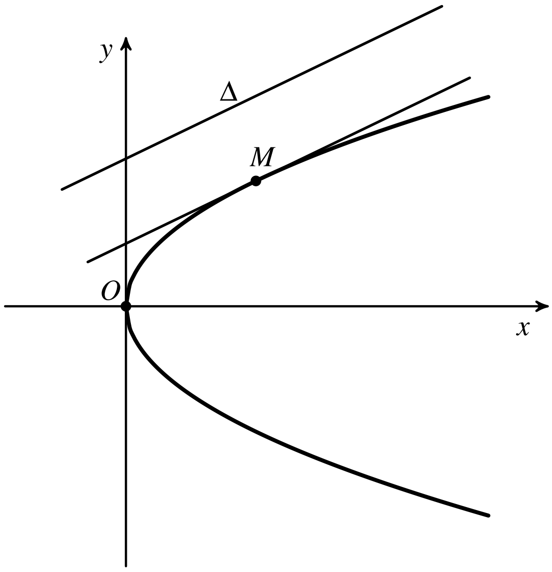


Figura 4.11: Tangenta la o parabolă, paralelă cu o direcţie

sau, după ce facem calculele,

$$m^2t^2 + 2t(-pl + my_0) + y_0^2 - 2p_0 = 0.$$

Termenul liber se anulează, deoarece M_0 se află pe parabolă, deci ecuaţia se reduce

$$m^2t^2 + 2t(-pl + my_0) = 0.$$

Condiţia de tangenţă înseamnă, ca şi în cazul celorlalte conice, că ecuaţia de intersecţie trebuie să aibă soluţie dublă, deci, în cazul nostru, coeficientul lui t trebuie să fie zero:

$$-pl + my_0 \equiv \mathbf{v}(l, m) \cdot \mathbf{n}(-p, y_0) = 0,$$

adică vectorul $\mathbf{n}(-p, y_0)$ este vectorul normal al tangentei. Prin urmare, ecuaţia tangentei este:

$$-p(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$$

sau

$$yy_0 = p(x + x_0),$$

unde am utilizat, din nou, faptul că punctul M_0 aparţine parabolei. Şi de data aceasta, ca şi în cazul conicelor cu centru, spunem că această formă a ecuaţiei parabolei a fost obţinută prin dedublare. E o mică diferenţă faţă de cazul celorlalte două conice, pentru că aici apare x la puterea întâi. De data asta, regula de dedublare înseamnă că:

- x se înlocuieşte cu $(x + x_0)/2$;
- y^2 se înlocuieşte cu yy_0.

Tangente duse dintr-un punct exterior parabolei. Considerăm un punct $M(x_1,y_1)$. Începem, ca de obicei, cu cazul tangentelor neverticale. Am văzut că ele au ecuaţia de forma

$$y = kx + \frac{p}{2k}.$$

Pentru ca M să se afle pe tangentă, trebuie să avem

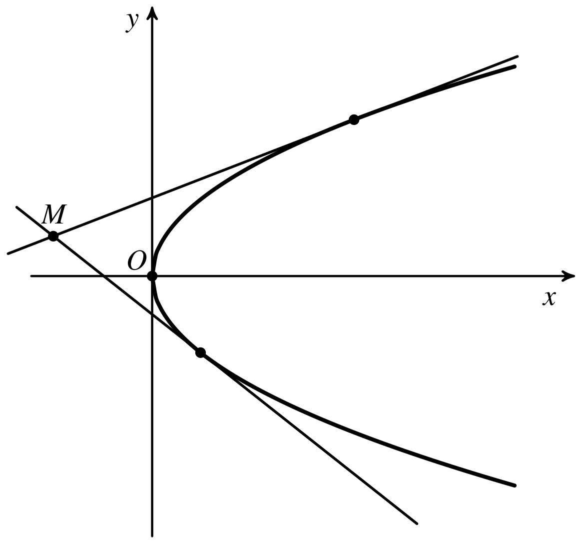


Figura 4.12: Tangente neverticale la o parabolă, dintr-un punct exterior

$$y_1 = kx_1 + \frac{p}{2k},$$

de unde

$$2x_1k^2 - 2y_1k + p = 0.$$

Discriminantul este

$$\Delta = 4(y_1^2 - 2px_1).$$

Prin urmare:

- avem două tangente dacă $y_1^2 - 2px_1 > 0$ (punctul e în afara parabolei);
- avem o singură tangentă dacă $y_1^2 - 2px_1 = 0$ (punctul este pe parabolă);
- nu avem tangente dacă $y_1^2 - 2px_1 < 0$ (punctul este în interiorul parabolei).

Ecuaţia tangentei este de forma

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

cu k dat de ecuaţia de gradul doi de mai sus.

Să vedem ce se întâmplă dacă una dintre tangente este verticală. Ea trebuie să aibă ecuaţia

$$x = 0.$$

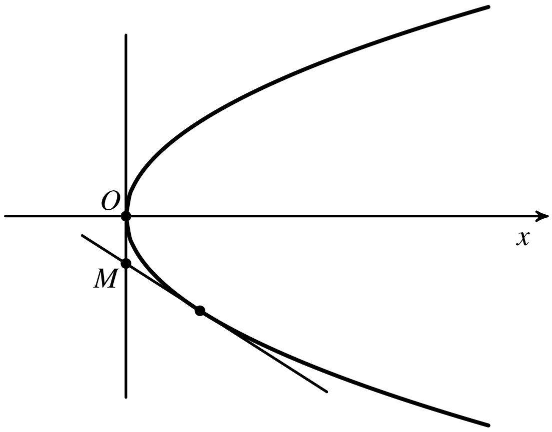


Figura 4.13: Tangente la parabolă dintr-un punct exterior (o tangentă verticală)

Figura 4.14: parabola4

Căutăm panta celei de-a doua tangente. Remarcăm, mai întâi, că $x_1 = 0$. Ecuaţia tangentei trebuie să fie

$$y = kx + \frac{p}{2k}.$$

Ca să treacă prin M,

$$y_1 = \frac{p}{2k}.$$

Dacă $y_1 = 0$, atunci avem o singură tangentă (cea verticală). În caz contrar,

$$k = \frac{p}{2y_1},$$

adică ecuaţia tangentei este

$$y - y_1 = \frac{p}{2y_1}x.$$

4.4 Probleme

Problema 4.1. Determinaţi locul geometric al mijloacelor coardelor elipsei $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, care sunt paralele cu dreapta $x + 2y = 1$.

Problema 4.2. Se consideră elipsa $x^2 + 4y^2 = 25$. Să se determine coardele care trec prin $A(7/2, 7/4)$ pentru care punctul A este mijlocul lor.

Problema 4.3. Prin punctul $M(0,3)$ să se ducă o dreaptă care să intersecteze elipsa $x^2 + 4y^2 = 20$ în două puncte A şi B astfel încât $MA = 2MB$.

Problema 4.4. Se consideră elipsa $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Să se găsească punctele M de pe elipsă pentru care unghiul $\widehat{F_1MF_2}$ este drept.

Problema 4.5. Se consideră elipsa $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Să se găsească punctele M de pe elipsă pentru care unghiul $\widehat{F_1MF_2}$ este de $60°$.

Problema 4.6. Se consideră elipsa $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Să se găsească punctele M de pe elipsă pentru care unghiul $\widehat{F_1MF_2}$ este maxim.

Problema 4.7. Determinaţi tangentele la elipsa $\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$ care sunt paralele cu dreapta

$$3x+2y+7=0.$$

Problema 4.8. Determinaţi tangentele la elipsa $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ care sunt paralele cu dreapta

$$4x-2y+23=0$$

şi calculaţi distanţa dintre ele.

Problema 4.9. Determinaţi locul geometric al mijloacelor coardelor hiperbolei $x^2-2y^2=1$, care sunt paralele cu dreapta $2x-y=0$.

Problema 4.10. Se consideră hiperbola $x^2-\frac{y^2}{4}=1$. Să se găsească punctele M de pe hiperbolă pentru care unghiul $\widehat{F_1MF_2}$ este drept.

Problema 4.11. Se consideră hiperbola $x^2-\frac{y^2}{4}=1$. Să se găsească punctele M de pe hiperbolă pentru care unghiul $\widehat{F_1MF_2}$ este de $60°$.

Problema 4.12. Se consideră hiperbola $x^2-\frac{y^2}{4}=1$. Să se găsească punctele M de pe hiperbolă pentru care unghiul $\widehat{F_1MF_2}$ este maxim.

Problema 4.13. Calculaţi aria formată de asimptotele hiperbolei $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ şi de dreapta

$$3x+2y-7=0.$$

Problema 4.14. Determinaţi tangentele la hiperbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=1$ care sunt paralele cu dreapta

$$4x+2y-5=0.$$

Problema 4.15. Determinaţi tangenta la parabola $y^2=16x$ care trece prin punctul $(-2,2)$.

Problema 4.16. Determinaţi tangentele comune la elipsele

$$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{9}=1 \quad \text{şi} \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{18}=1.$$

Problema 4.17. Determinaţi relaţia dintre coordonatele punctului (x_0, y_0) astfel încât din el să nu se poată duce nici o tangentă la hiperbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Problema 4.18. Pe hiperbola $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ determinaţi punctul M cel mai apropiat de dreapta

$$3x + 2y + 1 = 0$$

şi determinaţi distanţa de la acest punct la dreaptă.

Problema 4.19. Determinaţi ecuaţiile tangentelor duse din punctul $A(-1, -7)$ la hiperbola $x^2 - y^2 = 16$.

Problema 4.20. Din punctul $P(1, -5)$ se duc tangente la hiperbola $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$. Determinaţi distanţa de la punctul P la coarda hiperbolei care uneşte punctele de contact ale tangentelor cu hiperbola.

Problema 4.21. Determinaţi valorile pantei k pentru care dreapta $y = kx + 2$ este tangentă la parabola $y^2 = 4x$.

Problema 4.22. Scrieţi ecuaţia tangentei la parabola $y^2 = 8x$ care este paralelă cu dreapta

$$3x + 2y - 3 = 0.$$

Problema 4.23. Scrieţi ecuaţia tangentei la parabola $y^2 = 16x$ care este perpendiculară pe dreapta

$$4x + 2y + 7 = 0.$$

Problema 4.24. Scrieţi ecuaţia tangentei la parabola $y^2 = 12x$ care este paralelă cu dreapta

$$3x - 2y + 30 = 0$$

şi determinaţi distanţa dintre tangentă şi această dreaptă.

Problema 4.25. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la parabola $y^2 = 36x$ duse din punctul $A(2, 9)$.

Problema 4.26. Din punctul $A(5, 12)$ se duc tangente la parabola $y^2 = 5x$. Scrieţi ecuaţia dreptei care uneşte punctele de contact.

Problema 4.27. Din punctul $P(-3, 12)$ se duc tangente la parabola $y^2 = 10x$. Calculaţi distanţa de la punctul P la coarda parabolei care uneşte punctele de contact.

CAPITOLUL 5

Cuadrice pe ecuaţii reduse

5.1 Cuadrice pe ecuaţii reduse

Se numeşte *cuadrică* în $\mathbb{R}^3$ mulţimea punctelor $P(x,y,z)$ ale căror coordonate verifică o ecuaţie de gradul al doilea, adică o ecuaţie de forma

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+a_{23}yz+a_{33}z^2+a_{10}x+a_{20}y+a_{30}y+a_{00}=0, \tag{5.1.1}$$

unde toţi coeficienţii sunt numere reale, iar coeficienţii termenilor de gradul al doilea nu sunt toţi nuli (adică, altfel spus, ecuaţia este, realmente, de gradul al doilea). În această secţiune nu vom aborda teoria generală a cuadricelor, ci ne vom mulţumi să studiem acele cuadrice care sunt scrise sub forma canonică, adică, în esenţă, termenii de gradul al doilea micşti nu sunt prezenţi, iar termenii de gradul întâi, dacă este posibil, sunt absenţi, de asemenea. Vom vedea ca aceasta nu este întotdeauna cazul. Urmează să vedem, mai târziu, că, printr-o schimbare de coordonate, orice cuadrică se reduce la una dintre aceste cuadrice pe care le vom studia mai jos.

5.2 Elipsoidul

O submulţime $S\subset\mathbb{R}^3$ se numeşte *elipsoid* dacă există un sistem de coordonate cartezian şi trei numere a,b,c, strict pozitive, astfel încât

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}. \tag{5.2.1}$$

Altfel spus, un elipsoid este o suprafaţă de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{5.2.2}$$

Numerele a, b, c se numesc *semiaxe* ale elipsoidului. Dacă ele sunt distincte două câte două, atunci elipsoidul se numeşte *elipsoid triaxial*. Dacă două dintre ele sunt egale (de exemplu $a = b$), atunci elipsoidul nostru este ceea ce se numeşte un *elipsoid de rotaţie*:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

şi se poate obţine prin rotirea unei elipse în jurul unei axe (axa Oz), în cazul nostru). Dacă, în sfârşit, toate semiaxele sunt egale: $a = b = c$, elipsoidul nostru este o sferă de rază a.

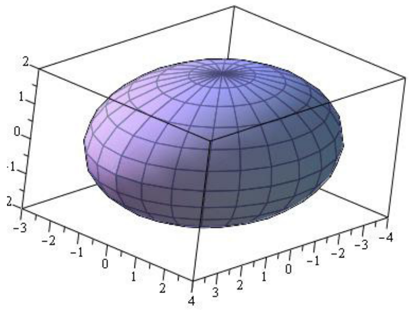


Figura 5.1: Elipsoidul

Vom enumera acum o serie de proprietăţi ale elipsoidului care ne vor permite, în cele din urmă, să stabilim forma acestei suprafeţe.

Proprietatea 1. *Elipsoidul (5.2.2) este mărginit de un paralelipiped dreptunghic, cu feţele paralele cu planele de coordonate, cu centrul în origine, de muchii egale, respectiv, cu* $2a, 2b, 2c$ *Aşadar, în particular,* elipsoidul, ca mulţime de puncte, este o mulţime mărginită.

Demonstraţie Într-adevăr, ecuaţia (5.2.2) se poate rescrie sub forma

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}.$$

Cum membrul stâng al aceste ecuaţii este, în mod evident, pozitiv, acelaşi lucru trebuie să se întâmple şi cu membrul drept, ceea ce ne conduce la inegalitatea

$$\frac{x^2}{a^2}\leq 1,$$

de unde $x \in [-a, a]$. Perfect analog rezultă că $y \in [-b, b]$ şi $z \in [-c, c]$, adică tocmai ceea ce voiam să demonstrăm, că $(x, y, z) \in [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c]$. □

Elipsoidul este o figură care are un grad destul de înalt de simetrie:

Proprietatea 2. *Elipsoidul are trei plane de simetrie: xOy, yOz, zOx, trei axe de simetrie: Ox, Oy, Oz, precum şi un centru de simetrie, originea $O(0,0,0)$ a axelor de coordonate. În plus, dacă elipsoidul nu este triaxial, el poate avea şi alte plane şi axe de simetrie (nu şi alte centre de simetrie, însă).*

Demonstraţie Fie $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un punct al elipsoidului. Atunci coordonatele sale verifică ecuaţia

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1.$$

Pentru a demonstra că, de exemplu, planul xOy este plan de simetrie, este suficient să demonstrăm că simetricul lui M_0 faţă de acest plan aparţine, de asemenea, elipsoidului. Dar este evident că simetricul lui M_0 este punctul de coordonate $(x_0,y_0,-z_0)$, ale cărui coordonate, în mod evident, verifică ecuaţia elipsoidului, deci aparţine elipsoidului. Raţionamentul este analog pentru celelalte plane de coordonate. Planele de coordonate se mai numesc şi *plane principale* ale elipsoidului, întrucât ele sunt plane de simetrie.

Faptul că axele de coordonate sunt axe de simetrie rezultă imediat din observaţiile de mai sus, întrucât ele sunt intersecţii de plane de simetrie. De asemenea, originea coordonatelor este centru de simetrie, deoarece este intersecţia a două (de fapt chiar trei) axe de simetrie. Axele de coordonate, ca axe de simetrie ale elipsoidului, se mai numesc şi *axe principale* ale acestuia.

Să presupunem acum că elipsoidul nostru este elipsoid de rotaţie, de exemplu, în jurul axei Oz. Afirmăm că orice plan care trece prin axa de rotaţie este plan de simetrie.

Am văzut că ecuaţia unui plan care trece prin axa Oz are o ecuaţie de forma $\Pi : Ax+By=0$. Să presupunem, ca mai sus, că $M_0(x_0,y_0,z_0)$ este un punct de pe elipsoid, care acum este elipsoid de rotaţie în jurul axei Oz, deci coordonatele sale verifică ecuaţia:

$$\frac{x_0^2+y_0^2}{a^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1.$$

Vom stabili coordonatele simetricului M_0' al lui M_0 relativ la planul Π. Ecuaţiile normalei la planul Π care trece prin M_0 sunt

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{0}.$$

Determinăm mai întâi punctul de intersecţie M_1 dintre această normală şi planul Π. Evident, coordonatele acestui punct sunt date de sistemul

$$\begin{cases} Bx-Ay=Bx_0-Ay_0 \\ z=z_0 \\ Ax+By=0 \end{cases}.$$

Obţinem, prin urmare, $x_1=\frac{B^2x_0-ABy_0}{A^2+B^2}$, $y_1=\frac{A^2y_0-ABx_0}{A^2+B^2}$, $z_1=z_0$. Punctul M_1 trebuie să fie mijlocul segmentului M_0M_0', deci trebuie să avem

$$\begin{cases} x_0'=2x_1-x_0 \\ y_0'=2y_1-y_0 \\ z_0'=2z_1-z_0. \end{cases}$$

Aşadar,

$$x_0' = \frac{2B^2x_0 - 2ABy_0}{A^2+B^2} - x_0 = \frac{(B^2-A^2)x_0 - 2ABy_0}{A^2+B^2},$$

$$y_0' = \frac{2A^2y_0 - 2ABx_0}{A^2+B^2} - y_0 = \frac{-2ABx_0 + (A^2-B^2)y_0}{A^2+B^2},$$

$$z_0' = z_0.$$

Avem, prin urmare,

$$\begin{aligned}\frac{x_0'^2+y_0'^2}{a^2} + \frac{z_0'^2}{c^2} &= \frac{(B^2-A^2)^2x_0^2 + 4A^2B^2y_0^2 - 4AB(B^2-A^2)x_0y_0}{a^2(A^2+B^2)^2} + \\ &+ \frac{(B^2-A^2)^2y_0^2 + 4A^2B^2x_0^2 + 4AB(B^2-A^2)x_0y_0}{a^2(A^2+B^2)^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = \\ &= \frac{(A^2+B^2)^2x_0^2 + (A^2+B^2)^2y_0^2}{a^2(A^2+B^2)^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{x_0^2+y_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1,\end{aligned}$$

deci punctul M_0' aparţine elipsoidului, ceea ce înseamnă că planul Π este plan de simetrie al elipsoidului.

În mod analog, în cazul sferei se demonstrează că orice plan care trece prin originea coordonatelor este plan de simetrie şi, în mod implicit, orice dreaptă care trece prin originea coordonatelor este axă de simetrie. □

În demersul nostru de a stabili forma elipsoidului, începem prin a determina curbele după care planele de simetrie îl intersectează:

Proprietatea 3. *Intersecţiile planelor de simetrie ale unui elipsoid cu elipsoidul sunt trei elipse reale.*

Demonstraţie Intersecţia elipsoidului cu planul xOy este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Aceastea sunt, în mod evident, ecuaţiile unei elipse situate în planul xOy, de semiaxe a şi b.

Intersecţia elipsoidului cu planul yOz este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Aceastea sunt ecuaţiile unei elipse situate în planul yOz, de semiaxe b şi c.

Intersecţia elipsoidului cu planul zOx este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Aceastea sunt ecuaţiile unei elipse situate în planul zOy, de semiaxe a şi c. □

(1) Vom studia acum intersecţiile elipsoidului cu plane de ecuaţii $z = k$, unde k este un număr real (plane paralele cu planul xOy). Această intersecţie este dată de ecuaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}.$$

Din acelaşi motiv ca la punctul (1), al doilea dintre sistemele de mai sus are soluţie nevidă dacă şi numai dacă $1 - \frac{k^2}{c^2} \leq 0$, adică dacă şi numai dacă $-c \leq k \leq c$. Dacă $k = \pm c$, atunci intersecţia se reduce la un punct. Este vorba de punctul $(0,0,c)$, dacă avem $k = c$, respectiv punctul $(0,0,-c)$, dacă avem $k = -c$. Remarcăm că aceste puncte sunt, de fapt, punctele în care axa Oz, de ecuaţii $x = 0, y = 0$, intersectează elipsoidul. Vom vedea că mai există patru puncte analoage, pe celelalte două axe de coordonate. Ele se numesc *vârfuri* ale elipsoidului.

Situaţia cu adevărat interesantă, care ne dă o primă idee relativ la forma elipsoidului (şi care justifică denumirea) este cea în care $-c < k < c$. În acest caz, intersecţia este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = k \end{cases},$$

care, din moment ce numitorii sunt strict pozitivi, este, în mod evident, o elipsă, situată în planul $z = k$, de semiaxe egale, respectiv, cu $a\sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)}$ şi $b\sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)}$. Este clar că lungimile semiaxelor descresc pe măsură ce $|k|$ creşte. În particular, ele au valoarea maximă pentru cazul în care $k = 0$, adică pentru cazul în care planul de intersecţie este chiar planul de coordonate xOy. Atunci ecuaţiile elipsei de intersecţie sunt

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

(2) Intersecţiile cu plane paralele cu planele de coordonate xOz şi yOz sunt analoage şi ne conduc la rezultate analoage.

Planul tangent într-un punct al unui elipsoid

Considerăm elipsoidul (5.2.2) şi un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ al său. Vom studia intersecţia unei drepte oarecare ce trece prin M_0 cu elipsoidul. Ecuaţiile parametrice ale unei astfel de drepte sunt:

$$(\Delta) : \begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + n \cdot t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{5.2.3}$$

$\mathbf{v}(l, m, n)$ este, desigur, vectorul director al dreptei Δ. Pentru a determina punctele de intersecţie dintre elipsoid şi dreapta Δ, înlocuim x, y, z din ecuaţiile dreptei (5.2.3) în ecuaţia elipsoidului. Se obţine:

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} + \frac{(z_0 + nt)^2}{c^2} - 1 = 0$$

sau, după ce facem calculele şi grupăm după puterile lui t,

$$\begin{aligned} & t^2 \left(b^2c^2l^2 + a^2c^2m^2 + a^2b^2n^2\right) + 2t \left(b^2c^2x_0l + a^2c^2y_0m + a^2b^2z_0n\right) + \\ & + b^2c^2x_0^2 + a^2c^2y_0^2 + a^2b^2z_0^2 - a^2b^2c^2 = 0. \end{aligned}$$

Termenul liber al ecuaţiei de mai sus este egal cu zero, deoarece punctul coordonatele punctului M_0 verifică ecuaţia elipsoidului. Ca atare, ecuaţia se transformă în

$$t^2 \left(b^2c^2l^2 + a^2c^2m^2 + a^2b^2n^2\right) + 2t \left(b^2c^2x_0l + a^2c^2y_0m + a^2b^2z_0n\right) = 0. \tag{5.2.4}$$

Această ecuaţie o vom numi *ecuaţie de intersecţie* dintre elipsoid şi dreapta Δ. Este clar că ecuaţia de intersecţie este, întotdeauna, de gradul al doilea şi ea va admite două soluţi reale, care corespund punctului M_0 şi celui de-al doilea punct de intersecţie. Pentru ca dreapta să fie *tangentă* elipsoidului, este necesa (şi suficient) ca ecuaţia de intersecţie să admită o soluţie dublă (evident, $t = 0$). Pentru aceasta, coeficientul termenului de gradul întâi în t din ecuaţia (5.2.4) trebuie să fie egal cu zero, adică

$$b^2c^2x_0l + a^2c^2y_0m + a^2b^2z_0n = 0. \tag{5.2.5}$$

Ecuaţia (5.2.5) are o interpretare geometrică remarcabilă. Considerăm vectorul $\mathbf{n}\left(b^2c^2x_0, a^2c^2y_0, a^2b^2z_0\right)$. Atunci ecuaţia (5.2.5) se poate scrie

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{5.2.6}$$

Semnificaţia acestei ecuaţii este aceea că *fiecare dreaptă care trece prin M_0 şi al cărui vector director verifică ecuaţia (5.2.5) este perpendiculară pe vectorul* **n**. Prin urmare, mulţimea acestor drepte prin M_0, tangente la elipsoid, formează un plan, *planul tangent la elipsoid în punctul M_0*, care are vectorul normal **n**. Prin urmare, ecuaţia planului tangent în M_0 se scrie

$$b^2c^2x_0(x-x_0)+a^2c^2y_0(y-y_0)+a^2b^2z_0(z-z_0)=0$$

sau

$$b^2c^2x_0x+a^2c^2y_0y+a^2b^2z_0z-b^2c^2x_0^2-a^2c^2y_0^2-a^2b^2z_0^2=0.$$

Din ecuaţia elipsei rezultă că termenul liber al ecuaţiei de mai sus este egal cu $-a^2b^2c^2$, deci ecuaţia devine

$$b^2c^2x_0x+a^2c^2y_0y+a^2b^2z_0z-a^2b^2c^2=0$$

sau, după ce împărţim la $a^2b^2c^2$,

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1. \tag{5.2.7}$$

Ecuaţia (5.2.7) se numeşte *ecuaţia planului tangent la elipsoid în punctul M_0 de pe elipsoid, obţinută prin dedublare*, pentru că se obţine din ecuaţia elipsoidului, înlocuind pe x^2 cu xx_0, pe y^2 cu yy_0 şi pe z^2 cu zz_0.

5.3 Conul de gradul al doilea

Definiţia 5.1. Se numeşte *con de gradul al doilea* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relative la un sistem ortonormat verifică o ecuaţie de forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{5.3.1}$$

unde a,b,c sunt numere reale strict pozitive.

Conul de gradul al doilea are aceleaşi simetrii ca şi elipsoidul, ele fiind legate direct de faptul că în ecuaţia sa toate coordonatele apar exclusiv la puterea a doua:

(1) trei plane de simetrie (planele de coordonate);

(2) trei axe de simetrie (axele de coordonate);

(3) un centru de simetrie (originea).

O proprietate remarcabilă a conului de gradul al doilea este aceea că *este o suprafaţă riglată*: prin fiecare punct al său trece o dreaptă (care se numeşte *generatoare* a conului).

Mai precis, *dacă $M_0(x_0,y_0,z_0)$ este un punct oarecare al conului, iar O este originea coordonatelor, atunci fiecare punct $M(x,y,z)$ al dreptei OM_0 se află pe con.* Demonstraţia acestei afirmaţii este foarte simplă. Într-adevăr, este foarte uşor de constatat că ecuaţiile parametrice ale dreptei OM_0 sunt:

$$\begin{cases} x=x_0\cdot t,\\ y=y_0\cdot t,\\ z=z_0\cdot t. \end{cases}$$

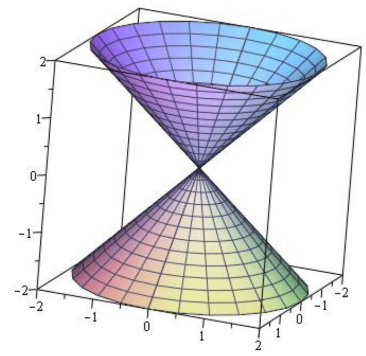


Figura 5.2: Conul de gradul al doilea

Dacă înlocuim în ecuaţia conului, obţinem:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}=t^2\underbrace{\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)}_{=0}=0,$$

deci punctele dreptei verifică, într-adevăr, ecuaţia conului.

Datorită proprietăţii de mai sus se spune că O este *vârful conului*.

Intersecţii cu plane paralele cu planele de coordonate

Utilizăm, şi în cazul conului de gradul al doilea, această metodă de a identifica forma suprafeţei.

(1) *Plane paralele cu xOy.* Un astfel de plan are, în mod evident, ecuaţia de forma $z=k$, unde k este o constantă reală. O astfel de intersecţie este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0\\ z=k\end{cases}\qquad\text{sau}\qquad\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{k^2}{c^2}\\ z=k\end{cases}.$$

În cazul în care $k\neq 0$, al doilea sistem de ecuaţii se poate rescrie sub forma

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2k^2/c^2}+\dfrac{y^2}{b^2k^2/c^2}=1\\ z=k\end{cases}.$$

Evident, aceste ecuaţii descriu o elipsă de semiaxe $\dfrac{a|k|}{c}$ şi $\dfrac{b|k|}{c}$, situată în planul $z=k$.

Dacă, pe de altă parte, $k=0$ (adică intersecţia se face cu planul xOy), atunci sistemul de ecuaţii de intersecţie se reduce la

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0\\ z=0\end{cases},$$

iar acest sistem este verificat de un singur punct (originea, adică vârful conului).

(2) *Intersecţii cu plane paralele cu planul xOz.* În acest caz, sistemul de ecuaţii care ne dă punctele de intersecţie se scrie

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \end{cases}$$

ceea ce ne conduce la

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{h^2}{b^2}. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

Ecuaţiile (5.3.2) reprezintă, dacă $h \neq 0$, ecuaţiile unei hiperbole situate în planul $y = h$, de semiaxe $\dfrac{a|h|}{b}$ (pe axa paralelă cu Ox), respectiv $\dfrac{c|h|}{b}$ (pe axa paralelă cu Oz). Este de remarcat că axa paralelă cu Oz este cea care intersectează hiperbola, în timp ce axa paralelă cu Ox nu o intersectează.

Pe de altă parte, dacă $h = 0$, aceleaşi ecuaţii reprezintă o pereche de drepte (generatoare ale conului), de ecuaţii

$$\begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{z}{c} - \dfrac{x}{a} = 0, \end{cases} \qquad \text{respectiv} \qquad \begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{z}{c} + \dfrac{x}{a} = 0. \end{cases}$$

(3) *Intersecţia cu plane paralele cu planul yOz.* – Este perfect analoagă cu cazul precedent.

Observaţie. Se poate demonstra că, utilizând plane care nu sunt neapărat oaralele cu planele de coordonate, prin secţiunile plane ale conului de gradul al doilea se pot obţine toate conicele. De fapt, acesta este motivul pentru care conicele se mai numesc şi *secţiuni conice*.

Planul tangent într-un punct al conului de gradul al doilea. Ecuaţia planului tangent într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al conului de gradul al doilea se obţine prin dedublare, ca şi în cazul elipsoidului, aşa că nu vom mai repeta raţionamentul. Prin urmare, ecuaţia planului tangent în M_0 este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 0. \tag{5.3.3}$$

O proprietate remarcabilă a planului tangent într-un punct al conului este aceea că el conţine generatoarea care trece prin acel punct. Într-adevăr, neneratoarea care trece prin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ are ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = z_0 t. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în membrul stâng al ecuaţiei planului tangent, obţinem

$$\frac{x_0^2 t}{a^2} + \frac{y_0^2 t}{b^2} - \frac{z_0^2 t}{c^2} = t\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right) = 0,$$

ceea ce înseamnă că, într-adevăr, planul tangent conţine generatoarea rectilinie a conului care trece prin punctul de tangenţă.

Con de rotaţie. În cazul în care $a = b$, ecuaţia conului devine

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

De data aceasta, secţiunile cu plane paralele cu planul xOy sunt cercuri. Conurile de acest tip se numesc *conuri de rotaţie*. Vom vedea mai târziu că suprafeţele de acest tip se pot obţine prin rotirea unei drepte care trece prin origine în jurul axei Oz.

5.4 Hiperboloidul cu o pânză.

Definiţia 5.2. Se numeşte *hiperboloid cu o pânză* locul geometric al punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un sistem rectangular verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{5.4.1}$$

une a, b, c sunt numere reale strict pozitive, care se numesc *semiaxele* hiperboloidului.

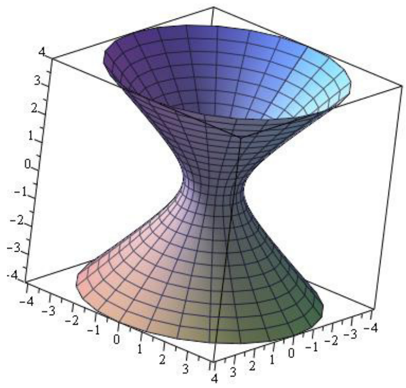


Figura 5.3: Hiperboloidul cu o pânză

Simetriile hiperboloidului cu o pânză sunt aceleaşi cu cle ale elipsoidului, prin urmare nu le vom mai descrie. Ne ocupăm, însă, de intersecţiile sale cu plane paralele cu planele de coordonate.

(1) *Plane paralele cu planul xOy.* În acest caz, avem de studiat sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce ne conduce la

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} + 1. \end{cases}$$

Cum membrul drept este întotdeauna strict pozitiv, ecuaţiile se pot rescrie ca

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}\right)^2} = 1. \end{cases}$$

Acestea sunt ecuaţiile unei elipse de semiaxe $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}$ şi $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}$, pentru orice valori ale lui h. Un caz particular important este cel şn care $h = 0$ (adică suntem în planul de coordonate xOy). Elipsa care se obţine (de semiaxe minime!) se numeşte *elipsă de stricţiune* sau de *gâtuire*.

(2) *Plane paralele cu planul xOz.* În acest caz, curba de intersecţie are ecuaţiile

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{b^2}. \end{cases} \tag{5.4.2}$$

Aici avem trei situaţii de analizat:

(a) Dacă $1 - \dfrac{h^2}{c^2} < 0$, adică $h^2 > c^2$, atunci sistemul (5.4.2) se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{h^2}{b^2} - 1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}\right)^2} - \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

adică avem de-a face cu o hiperbolă de semiaxe $c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}$ şi $a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}$, situată într-un plan paralel cu planul xOz, la care axa care intersectează hiperbola este paralelă cu axa Oz, iar cealaltă axă este paralelă cu axa Ox.

(b) Dacă $1 - \dfrac{h^2}{c^2} = 0$, adică $h = \pm c$, atunci sistemul (5.4.2) se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} y = \pm c, \\ \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = \pm c, \\ \left(\frac{z}{c} - \frac{x}{a}\right)\left(\frac{z}{c} + \frac{x}{a}\right) = 0. \end{cases} \tag{5.4.3}$$

Pentru fiecare valoare a lui h (c sau $-c$) ecuaţia de mai sus reprezintă o pereche de drepte. Pentru $h = c$, obţinem

$$\begin{cases} y = c, \\ \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} y = c, \\ \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0, \end{cases}$$

în timp ce pentru $h = -c$, obţinem

$$\begin{cases} y = -c, \\ \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} y = -c, \\ \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0. \end{cases}$$

(c) Dacă $1 - \frac{h^2}{c^2} > 0$, adică $h^2 < c^2$, atunci sistemul (5.4.2) se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} y = h, \\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{1-h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

adică avem de-a face cu o hiperbolă de semiaxe $a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$ şi $c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$, situată într-un plan paralel cu planul xOz, la care axa care intersectează hiperbola este paralelă cu axa Ox, iar cealaltă axă este paralelă cu axa Oz.

(3) *Plane paralele cu planul yOz.* Acest caz este perfect analog cu cazul precedent.

Generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză. După cum am văzut mai sus, pe hiperboloidul cu o pânză există linii drepte. Patru dintre ele au fost găsite mai devreme, ca intersecţii dintre planele xOz şi yOz cu suprafaţa. Pe suprafaţă, însă, există mult mai multe drepte. Practic, prin fiecare punct al suprafeţei trece câte o pereche de drepte, conţinute în întregime pe suprafaţă. Aceste drepte se numesc *generatoare rectilinii* ale hiperboloidului cu o pânză.

Pentru ane convinge de acest fapt, rescriem ecuaţia hiperboloidului cu o pânză sub forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

ecuaţie care se mai poate scrie şi sub forma

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Considerăm acum sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{5.4.4}$$

unde λ şi μ sunt două numere reale care nu se anulează simultan.

Întrucât, după cum am spus, cei doi parametrii nu se anulează simultan, sistemul (5.4.4) reprezintă o dreaptă. Dacă înmulţim membru cu membru cele două ecuaţii ale sistemului obţinem fie $0 = 0$, dacă unul dintre parametrii se anulează, fie ecuaţia hiperboloidului cu o pânză. Aceasta înseamnă că dreapta (5.4.4) se află pe hiperboloid. Dacă lăsăm cei doi parametrii să varieze, obţinem o familie de drepte, care formează *prima familie de generatoare rectilinii ale hiperboloidului*.

Cea de-a doua familie de generatoare rectilinii se obţine în acelaşi mod, identificând în mod diferit factorii de gradul întâi. Ea are ecuaţiile

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{5.4.5}$$

unde α şi β sunt, din nou, parametrii reali care nu se anulează simultan.

5.5 Hiperboloidul cu două pânze

Definiţia 5.3. Se numeşte *hiperboloid cu două pânze* locul geometric al punctelor din spaţiu ale căror coordonate ralativ la un sistem de coordonate ortogonal, verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{5.5.1}$$

unde a, b, c sunt constante reale strict pozitive.

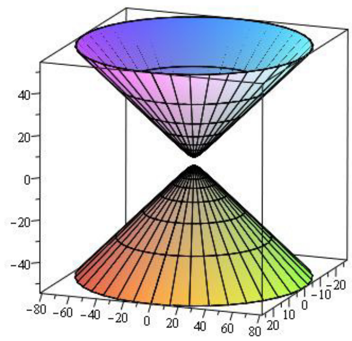


Figura 5.4: Hiperboloidul cu două pânze

Forma hiperboloidului cu două pânze. *Simetriile* sunt aceleaşi ca şi în cazul elipsoidului, aşa că trecen direct la studiul intersecţiilor cu plane paralele cu planele de coordonate.

(1) *Intersecţii cu plane paralele cu planul xOy.* Avem de studiat soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1. \end{cases} \tag{5.5.2}$$

Avem de analizat trei cazuri:

(a) Dacă $\dfrac{h^2}{c^2} - 1 < 0$, adică $-c < h < c$, atunci sistemul (5.5.2) nu admite soluţii, deci planul şi suprafaţa nu se intersectează.

(b) Dacă $\dfrac{h^2}{c^2} - 1 = 0$, adică $h = \pm c$, sistemul are o singură soluţie pentru fiecare valoare a lui h (c sau $-c$). În acest caz, planul este, de fapt, tangent la suprafaţă (în punctul $(0,0,c)$, respectiv în punctul $(0,0,-c)$).

(c) Dacă $\dfrac{h^2}{c^2} - 1 > 0$, adică $|h| > c$, atunci sistemul (5.5.2) este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

care reprezintă ecuaţiile unei elipse de semiaxe $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$ şi $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$, situată în planul $z = h$.

(2) *Intersecţii cu plane paralele cu planul xOz.* De data aceasta avem de studiat soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 - \dfrac{h^2}{b^2}. \end{cases} \tag{5.5.3}$$

Acest sistem este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{h^2}{b^2}, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}+1}\right)^2} - \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}+1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

care reprezintă, indiferent de valoarea lui h, ecuaţiile unei hiperbole de semiaxe $c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}+1}$ şi $a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}+1}$, situată în planul $y = h$, astfel încât axa hiperbolei care intersectează curba este paralelă cu axa Oz, iar cealaltă axă este paralelă cu axa Ox.

(3) *Intersecţii cu plane paralele cu planul yOz.* Situaţia este perfect analoagă cu cea discutată la punctul precedent.

Hiperboloidul cu două pânze de rotaţie. Dacă $a = b$, ecuaţia hiperboloidului cu două pânze se scrie

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Acest tip particular de hiperboloid se numeşte *hiperboloid cu două pânze de rotaţie*, deoarece, după cum vom vedea în capitolul următor, el se poate obţine prin rotirea unei hiperbole în jurul axei Oz. Este de remarcat că, în cazul hiperboloizilor cu două pânze de rotaţie, *orice plan care trece prin axa Oz este plan de simetrie al hiperboloidului.*

Planul tangent într-un punct al hiperboloidului cu două pânze. Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct oarecare al hiperboloidului cu două pânze, se poate arăta, exact ca în cazul elipsoidului, că ecuaţia planului tangent în M_0 la hiperboloid va fi

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = -1,$$

adică ea se poate obţine prin dedublarea ecuaţiei hiperboloidului cu două pânze.

5.6 Paraboloidul eliptic

Definiţia 5.4. Se numeşte *paraboloid eliptic* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un sistem cartezian de coordonate verifică o ecuaţie de forma

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{5.6.1}$$

unde p şi q sunt numere reale strict pozitive, care se numesc *parametrii paraboloidului eliptic*.

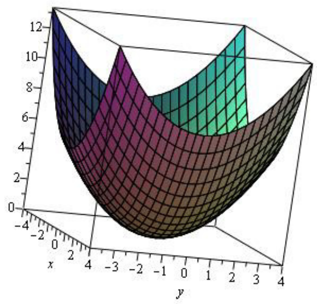


Figura 5.5: Paraboloidul eliptic

Forma paraboloidului eliptic. *Simetriile* paraboloidului eliptic nu sunt atât de numeroase ca în cazul cuadricelor studiate până acum. Astfel, el are:

(1) două plane de simetrie (yOz şi xOz, deoarece coordonatele x şi z apar doar la puterea a doua);

(2) o axă de simetrie, axa Oz, ca intersecţie a celor două plane de simetrie.

Mai departe, ca şi mai înainte, vom studia intersecţia dintre paraboloidul eliptic şi plane paralele cu cele trei plane de coordonate.

(1) *Intersecţii cu plane paralele cu planul xOy.* Avem de studiat soluţiile sistemului

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h. \end{cases} \tag{5.6.2}$$

Avem trei situaţii de examinat:

(a) Dacă $h < 0$, atunci sistemul (5.6.2) nu admite soluţii, adică planul şi suprafaţa nu au puncte comune.

(b) Dacă $h = 0$, atunci sistemul (5.6.2) admite o soluţie unică, $(0,0,0)$, adică originea. În fapt, aceasta înseamnă că planul de coordonate xOy este tangent la paraboloidul hiperbolic în originea coordonatelor.

(c) Dacă $h > 0$, sistemul (5.6.2) se poate scrie

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{2ph}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2qh}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă ecuaţiile unei elipse, situată în planul $z = h$, de semiaxe $\sqrt{2ph}$ şi $\sqrt{2qh}$.

(2) *Intersecţii cu plane paralele cu planul xOz.* De data aceasta, avem de studiat sistemul

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x^2 = 2pz - \dfrac{ph^2}{q}, \end{cases}$$

care sunt ecuaţiile unei parabole de parametru p, situată în planul $y = h$.

(3) *Intersecţii cu plane paralele cu planul yOz.* Avem de studiat soluţiile sistemului

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = 2qz - \dfrac{qh^2}{p}, \end{cases}$$

care sunt ecuaţiile unei parabole de parametru q, situată în planul $x = h$.

Paraboloidul eliptic de rotaţie. Dacă cei doi parametrii ai paraboloidului sunt egali, $p = q$, atunci ecuaţia suprafeţei devine

$$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$$

sau

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Acest paraboloid particular se numeşte *paraboloid eliptic de rotaţie*. Suprafaţa se poate obţine, întradevăr, prin rotirea unei parabole în jurul axei Oz, aşa cum vom vedea mai târziu.

Planul tangent într-un punct al paraboloidului eliptic. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare al paraboloidului eliptic (5.6.1). Studiem mai întâi intersecţia dintre paraboloid şi o dreaptă oarecare ce trece prin punctul M_0. Ecuaţiile parametrice ale unei astfel de drepte se pot scrie:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia paraboloidului, obţinem:

$$\frac{(x_0+lt)^2}{p}+\frac{(y_0+mt)^2}{q}=2(z_0+nt)$$

sau

$$q(x_0+lt)^2+p(y_0+mt)^2-2pq(z_0+nt)=0.$$

După ce facem calculele şi grupăm după puterile lui t, ecuaţia de mai sus se transformă în:

$$t^2(ql^2+pm^2)+2t(qx_0l+py_0m-pqn)+qx_0^2+py_0^2-2pqz_0=0.$$

Termenul liber este egal cu zero, deoarece M_0 se află pe paraboloid, deci ecuaţia de intersecţie devine

$$t^2(ql^2+pm^2)+2t(qx_0l+py_0m-pqn)=0. \tag{5.6.3}$$

Pentru ca dreapta şi paraboloidul să aibă un singur punct (dublu) în comun, ecuaţia de intersecţie (5.6.3) trebuie să aibă soluţie dublă. Dar o soluţie este, întotdeauna, $t=0$, prin urmare şi a doua soluţie trebuie să fie zero, ceea ce este posibil doar dacă termenul de gradul întâi în t dispare, adică dacă avem

$$qx_0l+py_0m-pqn=0. \tag{5.6.4}$$

Dacă punem **n** este vectorul de componente $(qx_0,py_0,-pq)$, iar $\mathbf{v}(l,m,n)$ este vectorul director al dreptei, atunci ecuaţia (5.6.4) este echivalentă cu $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=0$, adică *orice dreaptă care trece prin M_0, iar vectorul său director verifică ecuaţia (5.6.4) este perpendicular pe vectorul* **n**. Dar aceasta nu înseamnă altceva decât că **n** este vectorul normal la planul tangent la paraboloidul eliptic în punctul M_0. Ca atare, ecuaţia planului tangent în M_0 este:

$$qx_0(x-x_0)+py_0(y-y_0)-pq(z-z_0)=0$$

sau

$$qx_0x+py_0y-pqz-qx_0^2-py_0^2+pqz_0=0$$

sau, încă,

$$qx_0x+py_0y-pqz-pqz_0-(qx_0^2-py_0^2+2pqz_0)=0.$$

Termenul din paranteză din ecuaţia de mai sus este egal cu zero, din nou, pentru că M_0 se află pe paraboloid, deci ecuaţia devine:

$$qx_0x+py_0y=pq(z+z_0)$$

sau, dacă împărţim prin pq,

$$\frac{xx_0}{p}+\frac{yy_0}{q}=p(z+z_0). \tag{5.6.5}$$

Este de remarcat că, şi în cazul paraboloidului eliptic, ca şi în cazul celorlalte cuadrice studiate până acum ecuaţia planului tangent se obţine din ecuaţia paraboloidului (5.6.1) prin *dedublare*. Diferenţa este că de data aceasta apar şi termeni de gradul întâi. Regulile de dedublare sunt, deci:

- x^2 şi y^2 se înlocuiesc cu xx_0 (respectiv yy_0);
- x se înlocuieşte cu $(z+z_0)/2$.

5.7 Paraboloidul hiperbolic

Definiţia 5.5. Se numeşte *paraboloid hiperbolic* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un sistem cartezian de coordonate verifică o ecuaţie de forma

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{5.7.1}$$

unde p şi q sunt numere reale strict pozitive, care se numesc *parametrii paraboloidului hiperbolic*.

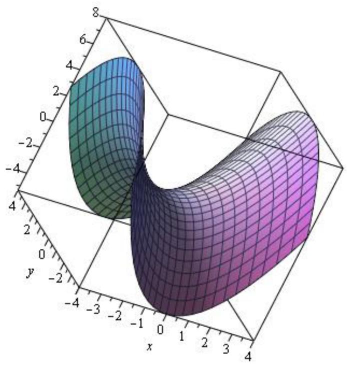


Figura 5.6: Paraboloidul hiperbolic

Forma paraboloidului hiperbolic. *Simetriile* paraboloidului hiperbolic sunt aceleaşi cu cele ale paraboloidului eliptic:

(1) două plane de simetrie (yOz şi xOz, deoarece coordonatele x şi z apar doar la puterea a doua);

(2) o axă de simetrie, axa Oz, ca intersecţie a celor două plane de simetrie.

Mai departe, vom studia intersecţia dintre paraboloidul hiperbolic şi plane paralele cu cele trei plane de coordonate.

(1) *Intersecţii cu plane paralele cu planul xOy.* Avem de studiat soluţiile sistemului

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h. \end{cases} \tag{5.7.2}$$

Avem trei situaţii de examinat:

(a) Dacă $h < 0$, atunci $-h > 0$, iar sistemul (5.7.2) se poate rescrie sub forma

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{-2qh}\right)^2} - \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{-2ph}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă ecuaţiile unei hiperbole de semiaxe $\sqrt{-2qh}$ şi $\sqrt{-2ph}$, situată în planul $z = h$, astfel încât semiaxa care intersectează hiperbola este paralelă cu axa Oy, iar cealaltă semieaxă este paralelă cu axa Ox.

(b) Dacă $h = 0$, atunci sistemul (5.7.2) devine

$$\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0. \end{cases}$$

Acestea sunt ecuaţiile unei perechi de drepte concurente, situate în planul xOy, care trec prin origine:

$$\begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0, \end{cases} \qquad \text{respectiv} \qquad \begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0. \end{cases}$$

(c) Dacă $h > 0$, sistemul (5.7.2) se poate scrie

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{2ph}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2qh}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă ecuaţiile unei hiperbole de semiaxe $\sqrt{2ph}$ şi $\sqrt{2qh}$, situată în planul $z = h$, astfel încât semiaxa care intersectează hiperbola este paralelă cu axa Ox, iar cealaltă semieaxă este paralelă cu axa Oy.

(2) *Intersecţii cu plane paralele cu planul xOz.* De data aceasta, avem de studiat sistemul

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x^2 = 2pz + \dfrac{ph^2}{q}, \end{cases}$$

care sunt ecuaţiile unei parabole de parametru p, situată în planul $y = h$.

(3) *Intersecţii cu plane paralele cu planul yOz.* Avem de studiat soluţiile sistemului

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = -2qz + \dfrac{qh^2}{p}, \end{cases}$$

care sunt ecuaţiile unei parabole de parametru q, situată în planul $x = h$.

Generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic. Paraboloidul hiperbolic are o importantă trăsătură comună cu hiperboloidul cu o pânză: pe ambele există două familii de drepte, câte o pereche de drepte prin fiecare punct al paraboloidului. Pentru a determina ecuaţiile acestor familii de de drepte, numite *generatoare rectilinii ale paraboloidului hiperbolic*, procedăm ca şi în cazul hiperboloidului cu o pânză.

Rescriem, mai întâi, ecuaţia paraboloidului hiperbolic sub forma

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z \cdot 1.$$

Pornind de la această ecuaţie, putem obţine o familie de drepte:

$$\begin{cases} \lambda \left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\mu z, \\ \mu \left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \lambda, \end{cases} \tag{5.7.3}$$

unde λ şi μ sunt doi parametrii reali, care nu se anulează simultan. Dacă înmulţim membru cu membru cele două ecuaţii din sistemul (5.7.3), obţinem fie $0 = 0$, dacă unul dintre parametrii se anulează, fie ecuaţia paraboloidului hiperbolic, ceea ce înseamnă că dreapta se află pe paraboloid, pentru orice valori acceptabile ale celor doi parametrii[1].

Exact în acelaşi mod se demonstrează că dreptele

$$\begin{cases} \alpha \left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\beta z, \\ \beta \left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \alpha, \end{cases} \tag{5.7.4}$$

unde α şi β sunt doi parametrii reali, care nu se anulează simultan, sunt situate pe paraboloidul hiperbolic (5.7.1).

Se poate demonstra că prin fiecare punct al hiperboloidului trece exact o pereche de generatoare rectilinii, câte una din fiecare familie.

Planul tangent într-un punct al paraboloidului hiperbolic. Se poate arăta uşor, ca în cazul paraboloidului eliptic, că ecuaţia planului tangent la paraboloid într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al său se poate obţine prin dedublare, plecând de la ecuaţia suprafeţei, adică ecuaţia planului tangent este

$$\frac{xx_0}{p} - \frac{yy_0}{q} = z + z_0. \tag{5.7.5}$$

[1] "acceptabil" înseamnă că $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

5.8 Cilindrul eliptic

Definiţia 5.6. Se numeşte *clilindru eliptic* locul geometric al punctelor din spaţiu ale căror coordonate faţă de un sistem ortogonal de coordonate verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{5.8.1}$$

unde a,b sunt două numere reale strict pozitive, numite *semiaxele cilindrului eliptic*.

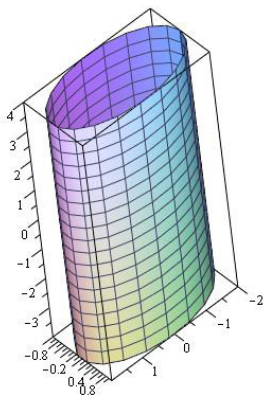


Figura 5.7: Cilindrul eliptic

Forma cilindrului eliptic. Începem prin a examina simetriile cilindrului. Este clar, înainte de toate, că cilindrul admitic admite toate simetriile elipsoidului şi hiperboloizilor:

- trei plane de simetrie (planele de coordonate);
- trei axe de simetrie (axele de coordonate);
- un centru de simetrie (originea).

În plus, deoarece ecuaţia cilindrului nu conţine coordonata z, cilindrul eliptic mai are o familie de plane de simetrie (toate planele paralele cu planul xOy) şi două familii de axe de simetrie:

- orice dreaptă care este paralelă cu axa Ox şi intersectează axa Oz;
- orice dreaptă care este paralelă cu axa Oy şi intersectează axa Oz.

Mai mult, orice punct de pe axa Oz este un centru de simetrie.

Ne ocupăm, acum, de intersecţiile cu plane paralele cu planele de coordonate.

(1) *Plane paralele cu planul xOz.* Avem de analizat sistemul

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă, pentru orice h real, ecuaţiile unei elipse situate în planul $z = h$, de semiaxe egale cu a şi b.

(2) *Plane paralele cu planul xOz.* De data asta, sistemul de studiat este

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x^2 = a^2 \left(1 - \dfrac{h^2}{b^2}\right). \end{cases} \tag{5.8.2}$$

Aici avem trei situaţii de examinat.

(a) Dacă $1 - \dfrac{h^2}{c^2} < 0$, adică $h^2 > b^2$, atunci sistemul (5.8.2) nu admite soluţii, ceea ce înseamnă că planul şi cilindrul nu se intersectează.

(b) Dacă $1 - \dfrac{h^2}{c^2} = 0$, adică $h = \pm b$, atunci sistemul (5.8.2) se reduce la

$$\begin{cases} y = \pm b, \\ x = 0, \end{cases}$$

care sunt ecuaţiile unei drepte paralele cu Oz (e clar, câte o dreaptă pentru fiecare valoare a lui h (c sau $(-c)$).

(c) Dacă $1 - \dfrac{h^2}{c^2} > 0$, adică $h^2 < b^2$, atunci sistemul (5.8.2) se reduce la

$$\begin{cases} y = h, \\ x = \pm a\sqrt{\left(1 - \dfrac{h^2}{b^2}\right)}, \end{cases}$$

adică obţinem câte o pereche de drepte (paralele cu Oz şi de data aceasta) pentru fiecare valoare admisibilă a lui h

(3) *Plane paralele cu planul yOz.* Analiza este perfect analoagă cu cea de la punctul precedent.

Observaţie. Cilindrul eliptic este o aşa numită *suprafaţă cilindrică*, generată de o familie de drepte paralele cu o dreapă dată (axa Oz, în cazul nostru), numite *generatoare* şi care intersectează o curbă dată. În cazul nostru, acea curbă dată poate fi aleasă să fie oricare dintre elipsele (egale) care se obţin prin intersecţii cu planul xOy.

Cilindrul eliptic de rotaţie (cilindrul circular). Dacă cele două semiaxe ale cilindrului sunt egale, $a = b$, atunci ecuaţia cilindrului se poate scrie

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Această suprafaţă se numeşte *cilindru de rotaţie sau circular* de rază a şi se poate obţine prin rotirea oricăreia dintre generatoarele sale în jurul axei Oz.

Planul tangent într-un punct al cilindrului eliptic. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare al cilindrului eliptic (5.8.1). Vom studia, ca de obicei, condiţia ca o dreaptă care trece prin M_0 să fie tangentă cilindrului, Ne reamintim că ecuaţiile unei drepte oarecare prin M_0 sunt:

$$(\Delta) \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în ecuaţia cilindrului, obţinem:

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} = 1$$

sau

$$b^2 (x_0 + lt)^2 + a^2 (y_0 + mt)^2 - a^2 b^2 = 0.$$

După efectuarea calculelor, obţinem ecuaţia

$$t^2(b^2 l^2 + a^2 m^2) + 2t(b^2 x_0 l + a^2 y_0 m) + b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Cum M_0 aparţine cilindrului, termenul liber este egal cu zero, deci ecuaţia de intersecţie se reduce la

$$t^2(b^2 l^2 + a^2 m^2) + 2t(b^2 x_0 l + a^2 y_0 m) = 0. \tag{5.8.3}$$

Pentru ca dreapta şi cilindrul să aibă un singur punct (dublu) în comun, ecuaţia de intersecţie (5.8.3) trebuie să aibă soluţie dublă. Dar o soluţie este, întotdeauna, $t = 0$, prin urmare şi a doua soluţie trebuie să fie zero, ceea ce este posibil doar dacă termenul de gradul întâi în t dispare, adică dacă avem

$$b^2 x_0 l + a^2 y_0 m = 0. \tag{5.8.4}$$

Dacă $\mathbf{n}$ este vectorul de componente $(b^2 x_0, a^2 y_0, 0)$, iar $\mathbf{v}(l, m, n)$ este vectorul director al dreptei, atunci ecuaţia (5.8.4) este echivalentă cu $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, adică *orice dreaptă care trece prin M_0, iar vectorul său director verifică ecuaţia (5.8.4) este perpendiculară pe vectorul* $\mathbf{n}$. Dar aceasta nu înseamnă altceva decât că $\mathbf{n}$ este vectorul normal la planul tangent la cilindrul eliptic în punctul M_0. Ca atare, ecuaţia planului tangent în M_0 este:

$$b^2 x_0 (x - x_0) + a^2 y_0 (y - y_0) = 0$$

sau, după ce facem calculele şi ţinem cont, încă o dată, de faptul că M_0 aparţine cilindrului,

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1, \tag{5.8.5}$$

adică, şi de data aceasta, ecuaţia planului tangent se poate obţine prin dedublare, plecând de la ecuaţia cilindrului eliptic.

5.9 Cilindrul hiperbolic

Definiţia 5.7. Se numeşte *clilindru hiperbolic* locul geometric al punctelor din spaţiu ale căror coordonate faţă de un sistem ortogonal de coordonate verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.9.1}$$

unde a, b sunt două numere reale strict pozitive, numite *semiaxele cilindrului hiperbolic*.

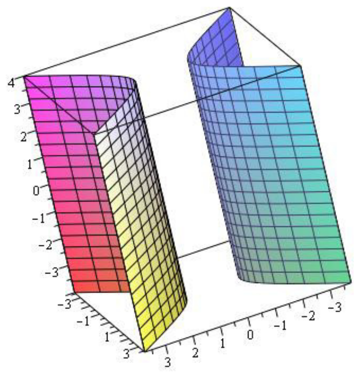


Figura 5.8: Cilindrul hiperbolic

Forma cilindrului . Simetriile cilindrului hiperbolic sunt aceleaşi cu simetriile cilindrului eliptic, aşa că nu le vom mai discuta încă o dată.

Ne ocupăm, acum, de intersecţiile cu plane paralele cu planele de coordonate.

(1) *Plane paralele cu planul xOz.* Avem de analizat sistemul

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă, pentru orice h real, ecuaţiile unei hiperbole situate în planul $z = h$, de semiaxe egale cu a şi b.

(2) *Plane paralele cu planul xOz.* De data asta, sistemul de studiat este

$$\begin{cases} y = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x^2 = a^2 \left(1 + \dfrac{h^2}{b^2}\right). \end{cases} \tag{5.9.2}$$

ceea ce reprezintă, pentru fiecare h real, o pereche de drepte distincte

$$\begin{cases} y = h, \\ x = \pm a\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{b^2}}. \end{cases}$$

(3) *Plane paralele cu planul yOz.* Sistemul care ne dă intersecţia este, acum,

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ y^2 = b^2\left(\dfrac{h^2}{a^2} - 1\right). \end{cases} \tag{5.9.3}$$

Aici avem trei situaţii de examinat.

(a) Dacă $\dfrac{h^2}{a^2} - 1 < 0$, adică $h^2 < a^2$, atunci sistemul (5.9.3) nu admite soluţii, ceea ce înseamnă că planul şi cilindrul nu se intersectează.

(b) Dacă $\dfrac{h^2}{a^2} = 0$, adică $h = \pm a$, atunci sistemul (5.9.3) se reduce la

$$\begin{cases} x = \pm a, \\ y = 0, \end{cases}$$

care sunt ecuaţiile unei drepte paralele cu Oz (e clar, câte o dreaptă pentru fiecare valoare a lui h (a sau $(-a)$).

(c) Dacă $\dfrac{h^2}{a^2} - 1 > 0$, adică $h^2 > a^2$, atunci sistemul (5.9.3) se reduce la

$$\begin{cases} x = h, \\ y = \pm b\sqrt{\left(\dfrac{h^2}{a^2} - 1\right)}, \end{cases}$$

adică obţinem câte o pereche de drepte (paralele cu Oz şi de data aceasta) pentru fiecare valoare admisibilă a lui h

Observaţie. Cilindrul hiperbolic este, ca şi cilindrul eliptic, o *suprafaţă cilindrică*, generată de o familie de drepte paralele cu o dreapă dată (axa Oz, în cazul nostru), numite *generatoare* şi care intersectează o curbă dată. În cazul nostru, acea curbă dată poate fi aleasă să fie oricare dintre hiperbolele (egale) care se obţin prin intersecţii cu planul xOy.

Planul tangent într-un punct al cilindrului hiperbolic. Exact ca şi în cazul cilindrului eliptic, se demonstrază că planul tangent într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al cilindrului hiperboolic se poate obţine plecând de la ecuaţia suprafeţei, prin dedublare, adică ecuaţia planului tangent este

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{5.9.4}$$

5.10 Cilindrul parabolic

Definiţia 5.8. Se numeşte *clilindru parabolic* locul geometric al punctelor din spaţiu ale căror coordonate faţă de un sistem ortogonal de coordonate verifică ecuaţia

$$y^2 = 2px, \tag{5.10.1}$$

unde p este un număr real strict pozitiv, numit *parametrul cilindrului parabolic*.

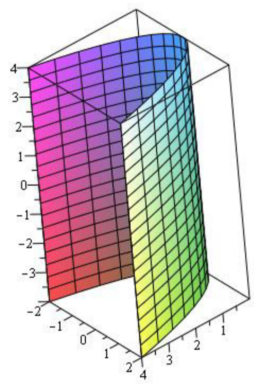


Figura 5.9: Cilindrul parabolic

Forma cilindrului parabolic. Cilindrul parabolic (5.10.1) este simetric relativ la:

- planul yOz;
- planul xOy şi orice plan paralel cu el;
- axa Oy şi orice dreaptă paralelă cu ea care intersectează axa Oz.

Ne ocupăm, acum, de intersecţiile cu plane paralele cu planele de coordonate.

(1) *Plane paralele cu planul xOy.* Avem de analizat sistemul

$$\begin{cases} z = h, \\ y^2 = 2px, \end{cases}$$

ceea ce reprezintă, pentru orice h real, ecuaţiile unei parabole de parametru p, situată în planul $z = h$.

(2) *Plane paralele cu planul xOz.* De data asta, sistemul de studiat este

$$\begin{cases} y = h, \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y = h, \\ x = \dfrac{h^2}{2p}. \end{cases} \tag{5.10.2}$$

Ecuaţia (5.10.2) reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oz, pentru orice valoare a lui h. *Plane paralele cu planul yOz.* Avem de investigat sistemul

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = 2ph. \end{cases} \tag{5.10.3}$$

Aici avem trei situaţii de examinat.

(a) Dacă $h < 0$, atunci sistemul (5.10.3) nu admite soluţii, ceea ce înseamnă că planul şi cilindrul nu se intersectează.

(b) Dacă $h = 0$, atunci sistemul (5.10.3) se reduce la

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

care sunt ecuaţiile axei Oz.

(c) Dacă $h > 0$, atunci sistemul (5.10.3) se reduce la

$$\begin{cases} x = h, \\ y = \pm\sqrt{2ph}, \end{cases}$$

adică obţinem câte o pereche de drepte (paralele cu Oz) pentru fiecare valoare admisibilă a lui h

Observaţie. Cilindrul parabolic este şi el o *suprafaţă cilindrică*, generată de o familie de drepte paralele cu o dreapă dată (axa Oz, în cazul nostru), numite *generatoare* şi care intersectează o curbă dată. În cazul nostru, acea curbă dată poate fi aleasă să fie oricare dintre parabolele (egale) care se obţin prin intersecţii cu planul xOy.

Planul tangent într-un punct al cilindrului parabolic. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare al cilindrului parabolic (5.10.1). Vom studia, ca de obicei, condiţia ca o dreaptă care trece prin M_0 să fie tangentă cilindrului. Ne reamintim că ecuaţiile unei drepte oarecare prin M_0 sunt:

$$(\Delta)\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Dacă înlocuim în ecuaţia cilindrului, obţinem:

$$(y_0 + mt)^2 = 2p(x_0 + lt).$$

După efectuarea calculelor, obţinem ecuaţia

$$m^2t^2 + 2t(-pl + y_0m) + y_0^2 - 2px_0 = 0.$$

Cum M_0 aparţine cilindrului, termenul liber este egal cu zero, deci ecuaţia de intersecţie se reduce la

$$m^2t^2 + 2t(-pl + y_0m) = 0. \tag{5.10.4}$$

Pentru ca dreapta şi cilindrul să aibă un singur punct (dublu) în comun, ecuaţia de intersecţie (5.10.4) trebuie să aibă soluţie dublă. Dar o soluţie este, întotdeauna, $t = 0$, prin urmare şi a doua soluţie trebuie să fie zero, ceea ce este posibil doar dacă termenul de gradul întâi în t dispare, adică dacă avem

$$-pl + y_0m = 0. \tag{5.10.5}$$

Dacă $\mathbf{n}$ este vectorul de componente $(-p, y_0, 0)$, iar $\mathbf{v}(l, m, n)$ este vectorul director al dreptei, atunci ecuaţia (5.10.5) este echivalentă cu $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, adică *orice dreaptă care trece prin M_0, iar vectorul său director verifică ecuaţia (5.10.5) este perpendiculară pe vectorul* $\mathbf{n}$. Dar aceasta nu înseamnă altceva decât că $\mathbf{n}$ este vectorul normal la planul tangent la cilindrul parabolic în punctul M_0. Ca atare, ecuaţia planului tangent în M_0 este:

$$-p(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$$

sau, după ce facem calculele şi ţinem cont, încă o dată, de faptul că M_0 aparţine cilindrului,

$$yy_0 = p(x + x_0), \tag{5.10.6}$$

adică, şi de data aceasta, ecuaţia planului tangent se poate obţine prin dedublare, plecând de la ecuaţia cilindrului parabolic şi aplicând regulile de dedublare.

- y^2 se înlocuieşte cu yy_0;
- x se înlocuieşte cu $(x + x_0)/2$.

5.11 Probleme

Problema 5.1. Să se găsească punctele de intersecţie ale elipsoidului

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{4}=1$$

cu dreapta

$$x=4+2t,\ y=-6+3t,\ z=-2-2t.$$

Problema 5.2. Să se determine curbele de intersecţie ale elipsoidului

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$$

cu planele de coordonate.

Problema 5.3. Să se scrie ecuaţia planului tangent la elipsoidul

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{9}=1$$

în punctele lui de intersecţie cu planul $x=y=z$.

Problema 5.4. Să se scrie ecuaţiile planelor tangente la elipsoidul

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{8}=1,$$

paralele cu planul

$$3x-2y+5z+1=0.$$

Problema 5.5. Determinaţi unghiul pe care îl formează generatoarele conului

$$x^2+y^2-\frac{z^2}{6}=0$$

cu axa Oz.

Problema 5.6. Determinaţi punctele de intersecţie ale elipsoidului

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$$

cu dreapta

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2}.$$

Problema 5.7. Determinaţi punctele de intersecţie ale hiperboloidului cu două pânze

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{9}=-1$$

cu dreapta

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{3}.$$

Problema 5.8. Determinaţi punctele de intersecţie ale hiperboloidului cu o pânză

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{1}=1$$

cu dreapta

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{1}.$$

Problema 5.9. Determinaţi punctele de intersecţie ale paraboloidului hiperbolic

$$x^2-4y^2=4z$$

cu dreapta

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-2}.$$

Problema 5.10. Determinaţi o dreaptă care să treacă prin punctul $M(5,1,2)$ şi care să aibă un singur punct comun cu suprafaţa

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{1}=1.$$

Problema 5.11. Determinaţi generatoarele rectilinii ale suprafeţei

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$$

care trec prin punctul $M(6,2,8)$.

Problema 5.12. Determinaţi generatoarele rectilinii ale suprafeţei

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$$

care sunt paralele cu planul $3x+2y-4z=0$.

Problema 5.13. Stabiliţi ecuaţia planului tangent la suprafaţa

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=-1$$

în punctul $M(-6,2,6)$.

Problema 5.14. Să se scrie ecuaţia planului tangent la hiperboloidul

$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{17}-1=0$$

în punctul $M\left(2,-1,\frac{17}{3}\right)$.

Problema 5.15. Să se scrie ecuaţia planului tangent la hiperboloidul

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{5}+1=0$$

în punctul $M\left(4,-\sqrt{15},10\right)$.

Problema 5.16. Să se scrie ecuaţia planului tangent la hiperboloidul

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}-1=0,$$

paralel cu planul

$$2x+3y-z+11=0.$$

Problema 5.17. Să se scrie ecuaţia planului tangent la hiperboloidul

$$3x^2-12y^2+z^2-3=0,$$

paralel cu planul

$$2x+3y-z+11=0.$$

Problema 5.18. Să se scrie ecuaţiile dreptelor care trec prin punctul $M(6,2,8)$ şi se află pe hiperboloidul

$$16x^2+36y^2-9z^2-144=0.$$

Problema 5.19. Să se găsească punctele de intersecţie ale dreptei

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$$

cu paraboloidul eliptic

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z.$$

Problema 5.20. Să se găsească punctele de intersecţie ale dreptei

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$$

cu paraboloidul hiperbolic

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=2z.$$

Problema 5.21. Să se scrie ecuaţiile planelor tangente la paraboloidul eliptic

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=2z$$

în punctele de intersecţie cu dreapta

$$x=y=z.$$

Problema 5.22. Să se scrie ecuaţiile planelor tangente la paraboloidul hiperbolic

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 2z$$

în punctele de intersecţie cu dreapta

$$x = y = z.$$

Problema 5.23. Să se scrie ecuaţia planului tangent la paraboloidul eliptic

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z,$$

paralel cu planul

$$x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

Problema 5.24. Să se scrie ecuaţia planului tangent la paraboloidul hiperbolic

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 3z,$$

paralel cu planul

$$x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

Problema 5.25. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$$

care sunt paralele cu planul

$$3x + 2y - 4z = 0.$$

Problema 5.26. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$4x^2 - 9y^2 = 36z$$

care trec prin punctul $M(3\sqrt{2}, 2, 1)$.

Problema 5.27. Se dă paraboloidul hiperbolic

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = z$$

şi unul dintre planele sale tangente,

$$10x - 2y - z - 21 = 0.$$

Determinaţi ecuaţiile celor două drepte de intersecţie dintre paraboloid şi plan.

Problema 5.28. Determinaţi planele tangente la paraboloidul

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = z$$

care sunt paralele cu planul

$$x - y - 2z = 0.$$

CAPITOLUL 6

Generări de suprafeţe

6.1 Suprafeţe cilindrice

O *suprafaţă cilindrică* este o suprafaţă generată de o dreaptă care se mişcă paralel cu o direcţie fixă şi îndeplineşte o condiţie suplimentară. De regulă, această condiţie suplimentară se exprimă prin cerinţa ca dreapta mobilă să intersecteze tot timpul o curbă dată, care se numeşte *curbă directoare a suprafeţei cilindrice*. Totuşi, în multe probleme concrete această condiţie este înlocuită, în mod natural, cu alte condiţii ce apar din însăşi problema practică studiată: să rămână tot timpul tangentă unei suprafeţe sau să rămână la o distanţă fixată de o anumită dreaptă fixă.

Să presupunem că este dată o dreaptă fixă

$$(\Delta)\begin{cases} P_1(x,y,z)=0 \\ P_2(x,y,z)=0 \end{cases},$$

unde P_1 şi P_2 sunt funcţii de gradul întâi în variabilele x,y,z. Vom numi această dreaptă *directoare* a suprafeţei cilindrice. Se consideră, de asemenea, o curbă, dată prin ecuaţiile

$$(C)\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases},$$

unde, de data aceasta, singura restricţie asupra funcţiilor F_1 şi F_2 este de netezime. Curba C se numeşte *curbă directoare* a suprafeţei cilindrice. Pentru a stabili ecuaţia suprafeţei, stabilim, înainte de toate, ecuaţiile unei drepte oarecare care este paralelă cu directoarea Δ. Vom numi o astfel de dreaptă *generatoare*. Cum directoarea este dată ca o intersecţie de două plane, o generatoare se va scrie ca intersecţie a două plane care sunt paralele cu planele ce definesc directoarea, adică

$$(G_{\lambda,\mu})\begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda \\ P_2(x,y,z)=\mu, \end{cases} \tag{6.1.1}$$

unde λ şi μ sunt doi parametrii reali, deocamdată arbitrari. Pentru ca generatoarele să intersecteze curba directoare, următorul sistem de ecuaţii trebuie să fie compatibil

$$\begin{cases} P_1(x,y,z) = \lambda \\ P_2(x,y,z) = \mu \\ F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases} . \tag{6.1.2}$$

Sistemul de mai sus este un sistem de patru ecuaţii, cu trei necunoscute, x,y,z. În general, un astfel de sistem nu este compatibil. Dacă funcţiile F_1 şi F_2 ar fi şi ele funcţii de gradul întâi, am avea la îndemână metodele generale ale algebrei pentru a studia compatibilitatea. În general, însă, lucrurile nu stau aşa. În practică, se procedează în modul următor:

i) Se aleg trei dintre cele patru ecuaţii. Evident, alegem ecuaţiile cele mai simple. De regulă, alegem ecuaţiile generatoarelor şi una dintre ecuaţiile curbei directoare. Dacă această curbă este plană, atunci se poate ca una dintre ecuaţiile sale să fie de gradul întâi şi, desigur, această ecuaţie este selectată.

ii) Rezolvăm sistemul de la punctul precedent şi obţinem x,y,z, ca funcţii de parametrii generatoarelor, λ şi μ.

iii) Pentru ca sistemul format din cele patru ecuaţii să fie compatibil, soluţia obţinută la punctul precedent trebuie să verifice şi cea de-a patra ecuatie. Impunând aceasta, obţinem o condiţie de tipul

$$\varphi(\lambda,\mu) = 0, \tag{6.1.3}$$

unde $\varphi(\lambda,\mu)$ este membrul stâng al ultimei ecuaţii, în care s-au înlocuit x,y,z cu expresiile lor în funcţie de λ şi μ.

iv) Se exprimă λ şi μ în funcţie de x,y,z din ecuaţiile generatoarelor şi se înlocuiesc în condiţia de compatibilitate (6.1.3). Ecuaţia care se obţine,

$$\varphi\left(P_1(x,y,z), P_2(x,y,z)\right) = 0, \tag{6.1.4}$$

este ecuaţia suprafeţei cilindrice căutate.

Exemplul 6.1. Vom scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice ale cărei generatoare sunt paralele cu dreapta de ecuaţii

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

şi se sprijină pe hiperbola echilateră

$$xy = a^2,\ z = 0.$$

Începem prin a scrie directoarea ca intersecţie de două plane. Un calcul simplu ne conduce la

$$\begin{cases} P_1(x,y,z) \equiv 3x - 2y - 3 = 0 \\ P_2(x,y,z) \equiv y + 3z + 3 = 0 \end{cases} .$$

Prin urmare, ecuaţiile generatoarelor vor fi

$$\begin{cases} 3x-2y-3=\lambda \\ y+3z+3=\mu \end{cases}.$$

Condiţia ca generatoarele să intersecteze curba directoare se traduce, prin urmare, prin sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 3x-2y-3=\lambda \\ y+3z+3=\mu \\ z=0 \\ xy=a^2 \end{cases}.$$

Din primele trei ecuaţii, obţinem imediat că

$$\begin{cases} x=\dfrac{\lambda+2\mu-3}{3} \\ y=\mu-3 \\ z=0 \end{cases}.$$

Din cea de-a patra ecuaţie obţinem, înlocuind,

$$\varphi(\lambda,\mu)\equiv\frac{1}{3}(\lambda+2\mu-3)(\mu-3)-a^2=0. \tag{6.1.5}$$

Pe de altă parte, din ecuaţiile generatoarelor,

$$\begin{cases} \lambda=3x-2y-3 \\ \mu=y+3z+3 \end{cases}.$$

Înlocuind în condiţia de compatibilitate de mai sus, obţinem:

$$(x+2z)(y+3z)-a^2=0,$$

care este ecuaţia suprafeţei cilindrice.

Exemplul 6.2. Pentru a ilustra şi alte modalităţi de a descrie o suprafaţă cilindrică, vom determina ecuaţia suprafeţei cilindrice circumscrise sferei

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25,$$

având generatoarele paralele cu o dreaptă Δ de vector director $(-2,4,5)$.

Vom rezolva problema aceasta prin două metode diferite. Prima soluţie se bazează pe reducerea problemei la o problemă de tipul celei precedente. În acest scop, trebuie să găsim, mai întâi, curba directoare a suprafeţei. Din considerente geometrice, este clar că această curbă este un cerc mare al sferei, situat într-un plan perpendicular pe generatoare. Cum centrul sferei este punctul $C(1,2,3)$, ecuaţia acestui plan este

$$-2(x-1)+4(y-2)+5(z-3)=0,$$

sau

$$-2x+4y+5z-21=0.$$

Putem considera, fără a reduce generalitatea, că directoarea Δ trece prin origine, deci are ecuaţiile

$$\frac{x}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$$

sau

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 5x+2z=0 \end{cases}.$$

Aşadar, ecuaţiile generatoarelor sunt

$$\begin{cases} 2x+y=\lambda \\ 5x+2z=\mu \end{cases}. \tag{6.1.6}$$

Condiţia ca generatoarele să intersecteze curba directoare se scrie sub forma sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} 2x+y=\lambda \\ 5x+2z=\mu \\ -2x+4y+5z-21=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25. \end{cases}.$$

Rezolvând sistemul format din primele trei ecuaţii, obţinem imediat soluţia

$$\begin{cases} x=\dfrac{8\lambda+5\mu-42}{45} \\ y=\dfrac{29\lambda-10\mu+84}{45} \\ z=\dfrac{-4\lambda+2\mu+21}{9} \end{cases}.$$

Înlocuind în ultima ecuaţie, rezultă condiţia de compatibilitate

$$(8\lambda+5\mu-87)^2+(29\lambda-10\mu-6)^2+25(-4\lambda+2\mu-6)^2=50625.$$

În fine, dacă în această ecuaţie punem (din ecuaţiile generatoarelor) $\lambda=2x+y$ şi $\mu=5x+2z$, obţinem ecuaţia suprafeţei cilindrice,

$$(41x+8y+10z-87)^2+(58x+29y-20z-6)^2+25(2x-4y+4z-6)^2=50625.$$

Dacă dezvoltăm această ecuaţie, este uşor de văzut că ea este echivalentă cu

$$936+174x+12y+60z-41x^2-16xy-20xz-29y^2+40yz-20z^2=0. \tag{6.1.7}$$

Pentru cea de-a doua metodă, considerăm, din nou, ecuaţiile (6.1.6) ale generatoarelor, obţinute mai devreme. Condiţia de tangenţă din enunţul problemei înseamnă, în fapt, că sfera şi generatoarelor trebuie să aibă în comun puncte duble. Altfel spus, sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 2x+y=\lambda \\ 5x+2z=\mu \\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25. \end{cases}.$$

trebuie să aibă o soluţie dublă. Ideea este să exprimăm din primele două ecuaţii două necunoscute în funcţie de a treia şi de parametrii, să înlocuim în ecuaţia sferei, pentru a obţine o ecuaţie de gradul al doilea în raport cu cea de-a treia necunoscută. Condiţia de tangenţă va însemna, pur şi simplu, că această ecuaţie are rădăcină dublă, adică discriminantul său se anulează. În fine, vom înlocui, ca mai sus, parametrii din ecuaţiile generatoarelor şi vom obţine, pe această căle, ecuaţia suprafeţei cilindrice.

Din primele două ecuaţii, se obţine imediat că

$$\begin{cases} y = \lambda - 2x \\ z = \frac{\mu - 5x}{2} \end{cases}.$$

Înlocuind în ecuaţia sferei, se obţine

$$45x^2 + (-16\lambda + 84 - 10\mu)x - 44 + 4\lambda^2 - 16\lambda + \mu^2 - 12\mu = 0.$$

Egalând cu zero discriminantul acestei ecuaţii, obţinem condiţia de compatibilitate

$$-3744 - 48\lambda - 120\mu + 116\lambda^2 - 80\lambda\mu + 20\mu^2 = 0.$$

În fine, substituind în această ecuaţie, din ecuaţiile generatoarelor, $\lambda = 2x + y$ şi $\mu = 5x + 2z$, se obţine, după un calcul simplu, din nou, ecuaţia (6.1.7).

6.2 Suprafeţe conice

O *suprafaţă conică* este o suprafaţă generată de o familie de drepte (numite *generatoare*) care au un punct comun (numit *vârf*) şi îndeplineşte o condiţie suplimentară. Această condiţie suplimentară este, de regulă, aceea ca generatoarele să întâlnească o curbă dată, numită *curbă generatoare* a suprafeţei conice. Din nou, ca şi în cazul suprafeţelor cilindrice, această condiţie poate fi înlocuită cu alta (de exemplu ca generatoarele să fie tangente unei suprafeţe).

Metoda de descriere a suprafeţelor conice este, principial, cea folosită şi în cazul suprafeţelor cilindrice:

- se scriu, mai întâi, ecuaţiile unor drepte care pot juca rolul generatoarelor (în cazul nostru, drepte care trec prin vârf). Ecuaţiile acestea vor depinde de doi parametrii, pe moment arbitrari.
- Se pune condiţia ca aceste drepte să verifice condiţia suplimentară, obţinându-se, pe această cale, o relaţie între cei doi parametri.
- În relaţia obţinută la punctul precedent se înlocuiesc parametrii cu expresiile lor în funcţie de x, y, z, obţinute din ecuaţiile generatoarelor. Ecuaţia care se obţine este ecuaţia suprafeţei conice.

De regulă, vârful este dat fie prin coordonatele sale, fie ca intersecţie de trei plane. Vom considera cel de-al doilea caz, întrucât primul se reduce cu uşurinţă la acesta. Să presupunem, prin urmare, că vârful conului este dat prin intersecţia a trei plane, adică prin sistemul de ecuaţii

$$(V) \begin{cases} P_1 \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ P_2 \equiv a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ P_3 \equiv a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases}, \tag{6.2.1}$$

unde, fireşte,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0,$$

altminteri sistemul nu ar avea o soluţie unică. Condiţia ca o dreaptă să treacă prin vârful conului este uşor de descris geometric, plecând de la descrierea vârfului ca intersecţie de trei plane: *O dreaptă trece prin vârful conului dacă şi numai dacă ea face parte, simultan, din fascicolul de plane determinat de planele P_1 şi P_3 şi din cel determinat de planele P_2 şi P_3.* Prin urmare, ecuaţiile generatoarelor se pot scrie sub forma

$$(G_{\lambda,\mu})\begin{cases} P_1 = \lambda P_3 \\ P_2 = \mu P_3 \end{cases}, \tag{6.2.2}$$

unde λ şi μ sunt doi parametri reali, deocamdată arbitrari.

Să presupunem, mai departe, că avem o condiţie suplimentară tradusă prin cerinţa ca generatoarele să intersecteze o curbă directoare, dată ca intersecţie de două suprafeţe, prin ecuaţii de forma

$$(C)\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}. \tag{6.2.3}$$

Condiţia ca generatoarele să intersecteze directoarea se traduce prin condiţia ca sistemul format din ecuaţiile generatoarelor şi cele ale directoarei, adică sistemul

$$\begin{cases} P_1 = \lambda P_3 \\ P_2 = \mu P_3 \\ F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}, \tag{6.2.4}$$

să fie compatibil.

Strategia pe care o vom urma este similară cu cea din cazul suprafeţelor cilindrice, anume vom adăuga, în prima instanţă, ecuaţiilor generatoarelor cea mai simplă dintre ecuaţiile curbei directoare. Rezolvând sistemul rezultat, vom obţine x,y,z ca funcţii de parametrii λ şi μ. Înlocuind în cea de-a patra ecuaţie, vom obţine o relaţie de forma

$$\varphi(\lambda,\mu) = 0, \tag{6.2.5}$$

relaţie pe care o vom numi *condiţia de compatibilitate*. Pe de altă parte, din ecuaţiile generatoarelor obţinem expresiile parametrilor λ şi μ în funcţie de variabilele x,y,z:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{P_1}{P_3} \\ \mu = \dfrac{P_2}{P_3} \end{cases}.$$

Înlocuind aceste expresii în condiţia de compatibilitate, obţinem ecuaţia suprafeţei conice:

$$\varphi\left(\frac{P_1(x,y,z)}{P_3(x,y,z)}, \frac{P_2(x,y,z)}{P_3(x,y,z)}\right) = 0 \tag{6.2.6}$$

sau, şi mai explicit,

$$\varphi\left(\frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}}, \frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}}\right)=0. \tag{6.2.7}$$

Exemplul 6.3. Ca un prim exemplu, vom determina ecuaţia unei suprafeţe conice cu vârful în $V(0,0,0)$ şi ale cărei generatoare intersectează curba

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x^2-y=0 \end{cases}.$$

Ecuaţiile vârfului (ca intersecţie de trei plane) sunt, în mod evident:

$$\begin{cases} P_1(x,y,z) \equiv x=0 \\ P_2(x,y,z) \equiv y=0 \\ P_3(x,y,z) \equiv z=0 \end{cases},$$

prin urmare ecuaţiile generatoarelor sunt

$$\begin{cases} x=\lambda z \\ y=\mu z \end{cases}.$$

Pentru a obţine condiţia de compatibilitate, adăugăm, mai întâi, ecuaţiilor generatoarelor prima ecuaţie a curbei directoare şi obţinem sistemul

$$\begin{cases} x=\lambda z \\ y=\mu z \\ x+y+z-1=0 \end{cases}.$$

Se obţine de aici imediat că

$$x=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+1},\ y=\frac{\mu}{\lambda+\mu+1},\ z=\frac{1}{\lambda+\mu+1}.$$

Înlocuind în a doua ecuaţie a curbei directoare, găsim relaţia de compatibilitate

$$\frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu+1)^2}-\frac{\mu}{\lambda+\mu+1}=0$$

sau

$$\varphi(\lambda,\mu)=\lambda^2-\mu(\lambda+\mu+1)=0.$$

Înlocuind în această relaţie, din ecuaţiile generatoarelor, $\lambda=x/z$, $\mu=y/z$, obţinem

$$\frac{x^2}{z^2}-\frac{y}{z}\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right)=0$$

sau

$$x^2-y(x+y+z)=0.$$

6.3 Suprafeţe conoide (Conoidul drept cu plan director)

Suprafeţele conoide sunt nişte suprafeţe care au anumite caracteristici în comun cu suprafeţele conice (de unde denumirea). Ele alcătuiesc, de fapt, o clasă mai largă de suprafeţe. Noi ne vom ocupa doar de o subclasă specială. Întrucât, totuşi, nu ne vom referi la suprafeţe conoidale mai generale, vom păstra termenul.

Se numeşte *suprafaţă conoidală* (*conoid drept cu plan director)* o suprafaţă generată de o familie de drepte (numite *generatoare*) care se sprijină pe o dreaptă dată, rămân paralele cu un plan dat şi îndeplinesc o condiţie suplimentară (de regulă, ca şi până acum, această condiţie este ca generatoarele să intersecteze o curbă dată, *curba directoare* a suprafeţei).

Metoda de determinare a ecuaţiei suprafeţei conoidale este, principial, aceeaşi de până acum: se scriu mai întâi generatoarele, care vor forma o familie de drepte, dependente de doi parametri, drepte care intersectează dreapta dată şi sunt paralele cu planul dat. Odată scrise ecuaţiile generatoarelor, restul procesului este absolut identic cu cel din cazul suprafeţelor cilindrice şi conice, aşa că nu-l vom mai descrie încă o dată.

Prima problemă pe care trebuie să o înfruntăm este aceea a stabilirii ecuaţiilor generatoarelor. Aşa cum am spus, acestea intersectează dreapta dată şi sunt paralele cu planul dat. Prin urmare, ecuaţiile lor vor fi date ca intersecţie dintre un plan paralel cu planul dat şi un plan care trece prin dreapta dată.

Să presupunem că dreapta fixă (directoarea) este dată de ecuaţiile

$$\begin{cases} P_1(x,y,z) \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ P_2(x,y,z) \equiv a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \end{cases}, \tag{6.3.1}$$

în timp ce planul director este dat de ecuaţia

$$P(x,y,z) \equiv ax + by + cz + d = 0. \tag{6.3.2}$$

Atunci ecuaţiile generatoarelor vor fi de forma

$$\begin{cases} P_1 = \lambda P_2 \\ P = \mu \end{cases}. \tag{6.3.3}$$

Într-adevăr, primul plan trece prin dreapta directoare (întrucât este un plan din fascicolul de plane determinat de această dreaptă), în timp ce al doilea plan este paralel cu planul director.

Prin urmare, dacă ecuaţiile curbei directoare sunt

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases},$$

atunci se formează un sistem de ecuaţii din ecuaţiile generatoarelor şi una dintre ecuaţiile acestei curbe, se rezolvă şi se găsesc neconoscutele în funcţie de parametri λ şi μ. Înlocuind în cea de-a doua ecuaţie a curbei, se obţine condiţia de compatibilitate, din nou, sub forma unei relaţii între parametri:

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0.$$

Înlocuind parametrii acum, din ecuaţiile generatoarelor, se obţine ecuaţia suprafeţei conoide sub forma

$$\varphi\left(\frac{P_1(x,y,z)}{P_2(x,y,z)}, P(x,y,z)\right) = 0 \tag{6.3.4}$$

sau, mai explicit,

$$\varphi\left(\frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}}{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}}, ax+by+cz+d\right) = 0. \tag{6.3.5}$$

Exemplul 6.4. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conoide cu plan director ale cărei generatoare sunt paralele cu planul xOy,

$$z = 0, \tag{P}$$

se sprijină pe axa Oz

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \tag{D}$$

şi pe curba

$$\begin{cases} y^2 - 2z + 1 = 0 \\ x^2 - 2z + 1 = 0. \end{cases} \tag{C}$$

Demonstraţie Ecuaţiile generatoarelor sunt

$$\begin{cases} x = \lambda y \\ z = \mu. \end{cases} \tag{G}$$

Deoarece ele trebuie să se sprijine pe curba directoare (C), sistemul

$$\begin{cases} x = \lambda y \\ z = \mu \\ y^2 - 2z + 1 = 0 \\ x^2 - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. Relaţia de compatibilitate între parametrii se obţine eliminând pe x, y, z între ecuaţiile sistemului. Se obţine

$$2\lambda^2\mu - 2\lambda^2 - 2\mu + 1 = 0.$$

Ca să obţinem ecuaţia suprafeţei, trebuie să eliminăm pe λ şi μ din sistemul format din ecuaţiile generatoarelor şi condiţia de compatibilitate:

$$\begin{cases} x = \lambda y \\ z = \mu \\ 2\lambda^2\mu - 2\lambda^2 - 2\mu + 1 = 0. \end{cases}$$

Înlocuim $\lambda = \frac{x}{y}$ şi $\mu = z$ în ecuaţia a treia şi eliminăm numitorul. În final, obţinem:

$$2x^2z - 2y^2z - 2x^2 + y^2 = 0.$$

□

6.4 Suprafeţe de rotaţie

Definiţia 6.1. Se numesc *suprafeţe de rotatie* suprafeţele generate de o curbă C care se roteşte, fără alunecare, în jurul unei axe fixe D.

În timpul rotaţiei, un punct oarecare de pe curba C descrie un cerc cu centrul pe axa de rotaţie D, situat într-un plan perpendicular pe axa de rotaţie. Prin urmare, suprafaţa însăşi poate fi privită ca fiind generată de aceste cercuri, numite *paralele*. Avem, mai precis, următoarea teoremă:

Teorema 6.1. *Fie*

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{D}$$

ecuaţiile axei D şi fie

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{C}$$

ecuaţiile curbei C. Ecuaţia suprafeţei de rotaţie este

$$F(\sigma,P)=0,$$

unde

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \\ P &= lx+my+nz. \end{aligned}$$

Demonstraţie Presupunem, ca în enunţ, că curba C este dată ca intersecţie a două suprafeţe:

$$(C)\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{6.4.1}$$

Axa de rotaţie, pe de altă parte, are ecuaţiile:

$$(D)\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{6.4.2}$$

Cercul generator Γ se obţine ca intersecţie dintre o sferă cu centrul pe axa de rotaţie şi rază variabilă cu un plan variabil perpendicular pe axă. Prin urmare, ecuaţiile sale vor fi:

$$(\Gamma)\ \begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda^2 \\ lx+my+nz=\mu. \end{cases} \tag{6.4.3}$$

Pentru ca cercul Γ să se sprijine pe curba C, trebuie ca cele două curbe să cel puţin un punct comun, adică sistemul de ecuaţii format din ecuaţiile lor:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda^2 \\ lx+my+nz=\mu \end{cases} \tag{6.4.4}$$

să fie compatibil. Condiţia de compatibilitate se obţine eliminând x, y, z între cele patru ecuaţii de mai sus. Să presupunem că se obţine relaţia:

$$F(\lambda, \mu) = 0. \tag{6.4.5}$$

Acum, ca şi în cazul celorlalte suprafeţe generate, ecuaţia suprafeţei se obţine elminând parametrii λ şi μ între ecuaţiile cercului generator şi condiţia de compatibilitate:

$$\begin{cases} x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda^2 \\ lx + my + nz = \mu \\ F(\lambda, \mu = 0). \end{cases} \tag{6.4.6}$$

λ şi μ se obţin, evident, din primele ecuaţii şi obţinem:

$$F\left(\sqrt{x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, lx + my + nz\right) = 0. \tag{6.4.7}$$

□

Exemplul 6.5. Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie generată de curba

$$(C) \begin{cases} x^2 - 2y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \end{cases}$$

în rotirea ei în jurul axei

$$x = y = z.$$

Demonstraţie Ecuaţiile cercului generator sunt

$$(\Gamma) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu. \end{cases}$$

Prin urmare, condiţia de compatibilitate se obţine eliminând x, y, z din sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu. \end{cases}$$

Se obţine cu uşurinţă:

$$\lambda^2 - 3(\mu - 3)^2 - 5 = 0.$$

În fine, ecuaţia suprafeţei se obţine eliminând parametrii λ şi μ din sitemul format din ecuaţiile cercului generator şi relaţia de legătură, adică:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu \\ \lambda^2 - 3(\mu - 3)^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Se obţine, imediat,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3(x + y + z - 3)^2 - 5 = 0.$$

□

6.5 Probleme

Problema 6.1. Stabiliţi ecuaţia unei suprafeţe cilindrice care are ca şi curbă directoare curba

$$(C): \begin{cases} x^2+y^2=25, \\ z=0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}.$$

Problema 6.2. Stabiliţi ecuaţia unei suprafeţe cilindrice care are ca şi curbă directoare curba

$$(C): \begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25, \\ x+y-z+2=0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu axa Ox.

Problema 6.3. Stabiliţi ecuaţia unei suprafeţe cilindrice care are ca şi curbă directoare curba

$$(C): \begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25, \\ x+y-z+2=0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\begin{cases} x-y=0, \\ z-c=0, \end{cases}$$

unde c este o constantă.

Problema 6.4. Curba directoare a unei suprafeţe cilindrice este

$$(C): \begin{cases} x=y^2+z^2, \\ x=2z, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt perpendiculare pe planul curbei directoare. Stabiliţi ecuaţia suprafeţei cilindrice.

Problema 6.5. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice care are drept curbă directoare elipsa

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0, \\ z=0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}.$$

Problema 6.6. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice care are drept curbă directoare hiperbola

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - 1 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

Problema 6.7. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice care are drept curbă directoare parabola

$$\begin{cases} z^2 - x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

Problema 6.8. Să se determine ecuaţia suprafeţei cilindrice ale cărei generatoare sunt paralele cu dreapta

$$x = -2y = z,$$

iar curba directoare este dată de ecuaţiile

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 4y^2 - 2z^2 + x - 8y - 8z - 2 = 0. \end{cases}$$

Problema 6.9. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în originea axelor şi a cărei curbă directoare este curba

$$\begin{cases} y^2 - x = 0, \\ 4x + 3y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Problema 6.10. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(0, -1, 4)$ şi a cărei curbă directoare este cercul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Problema 6.11. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în punctul de intersecţie a planelor

$$\begin{cases} x + 3z - 10 = 0, \\ y - 2 = 0, \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

şi cu curba directoare

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3z^2 + 6xz - 4 = 0, \\ 5x + y - 3z = 0. \end{cases}$$

Problema 6.12. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(0,-a,0)$ şi a cărei curbă directoare este cercul

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ y+z=2. \end{cases}$$

Problema 6.13. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(0,b,0)$ şi a cărei curbă directoare este hiperbola

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1, \\ y=0. \end{cases}$$

Problema 6.14. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(4,0,-3)$ şi a cărei curbă directoare este elipsa

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{9}=1, \\ x=0. \end{cases}$$

Problema 6.15. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(-3,0,0)$ şi a cărei curbă directoare este curba

$$\begin{cases} 3x^2+6y^2-z=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

Problema 6.16. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(2,2,2)$ şi a cărei curbă directoare este curba

$$\begin{cases} y^2-4x+1=0, \\ z+1=0. \end{cases}$$

Problema 6.17. Să se determine ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă care se sprijină pe axa Oz, este paralelă cu planul xOy şi întâlneşte cercul

$$\begin{cases} y^2+z^2=a^2, \\ x=b. \end{cases}$$

Problema 6.18. Să se determine ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă care se sprijină pe dreapta

$$\begin{cases} x=2, \\ y=0, \end{cases}$$

este paralelă cu planul xOy şi întâlneşte hiperbola

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Problema 6.19. Să se determine ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă care se sprijină pe axa Ox, este paralelă cu planul yOz şi întâlneşte curba

$$\begin{cases} z^2-2x=0, \\ 9y^2-16xz=0. \end{cases}$$

Problema 6.20. Să se determine ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă care se sprijină pe dreptele

$$(D_1):\begin{cases}2x+z-4=0,\\3y-2z-2=0,\end{cases}$$

$$(D_2):\begin{cases}x-2z=0,\\2y-3z+4=0,\end{cases}$$

rămânând paralelă cu planul

$$(P): x+3y-z+11=0.$$

Problema 6.21. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă care întâlneşte dreapta

$$x=y=z,$$

curba

$$\begin{cases}x^4+y^4-a^4=0,\\z=0\end{cases}$$

şi este paralelă cu planul $x+y+z-1=0$.

Problema 6.22. Să se scrie ecuaţia unei suprafeţe conoide generată de o dreaptă care se mişcă paralel cu planul xOy, se sprijină pe axa Oz şi intersectează parabola

$$\begin{cases}z=ax^2+bx+c,\\y=p.\end{cases}$$

Problema 6.23. Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie generate de hiperbola

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0,\\x=0,\end{cases}$$

care se roteşte în jurul axei Oy.

Problema 6.24. Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie generate de curba

$$\begin{cases}x^3-x^2-y^2=0,\\z=0,\end{cases}$$

care se roteşte în jurul axei Ox.

Problema 6.25. Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie generate de cercul

$$\begin{cases}(y-a)^2+z^2-r^2=0,\\x=0,\end{cases}$$

care se roteşte în jurul axei Oz.

Problema 6.26. Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie generate de curba

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 0, \\ x - 2y = 0, \end{cases}$$

care se roteşte în jurul dreptei $x = y = z$.

Problema 6.27. Să se determine ecuaţia suprafeţei ce se obţine prin rotirea dreptei

$$\begin{cases} x + z = 2, \\ y = 0 \end{cases}$$

în jurul dreptei

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$$

Problema 6.28. Să se determine ecuaţia suprafeţei ce se obţine prin rotirea dreptei

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

în jurul dreptei

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}.$$

Partea II

Transformări geometrice

CAPITOLUL 7

Transformări de coordonate

7.1 Introducere

Am văzut, în primul capitol, că a defini un sistem de coordonate este totuna cu a defini un reper afin, care constă dintr-un punct al spaţiului afin (de dimensiune 1, 2, sau 3, după cum studiem geometria pe dreaptă, în plan sau în spaţiu) şi o bază a spaţiului vectorial asociat spaţiului afin. Această bază e formată dintr-un vector nenul, în cazul dreptei, din doi vectori necoliniari în cazul planului şi din trei vectori necoplanari, în cazul spaţiului.

Prin urmare, a realiza o schimbare de coordonate înseamnă a realiza cel puţina una dintre următoarele operaţii:

- o schimbare a originii (adică înlocuirea originii cu un alt punct);
- schimbarea direcţiei axelor de coordonate (şi a sensului, eventual), ceea ce înseamnă înlocuirea bazei spaţiului vectorial asociat cu o altă bază.

Fiecare punct al spaţiului cu care lucrăm, într-un caz concret, are un set de coordonate relativ la reperul afin ales. Atunci când aplicăm o transformare de coordonate, trebuie să găsim legătura dintre coordonatele punctului relativ la reperul iniţial şi coordonatele sale relativ la reperul transformat. Analog stau lucrurile şi în cazul vectorilor, unde trebuie să găsim legătura dintre componentele vectorilor relativ la baza iniţială şi componentele lor relativ la baza transformată.

Există, în cazul graficii, cel puţin, mai multe motivaţii pentru care este important să fim în stare să trecem de la un sistem de coordonate la altul. Dăm, mai jos, câteva dintre ele.

7.2 Transformări de coordonate scrise în coordonate afine

7.2.1 Schimbarea originii

Considerăm un sistem de coordonate

$$S = \big(O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}\big)$$

şi un sistem transformat, obţinut din acesta prin mutarea originii, fără a schimba direcţiile şi sensurile axelor de coordonate,

$$S' = \big(O'; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}\big).$$

Presupunem că O' are, faţă de sistemul de coordonate vechi, coordonatele $(w_1, \dots, w_n)$.

Fie, acum, P un punct oarecare, ce are, relativ la sistemul de coordonate vechi, coordonatele $(x_1, \dots, x_n)$ şi, faţă de sistemul de coordonate nou, coordonatele $(x'_1, \dots, x'_n)$. Atunci, avem:

Teorema 7.1.

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + w_1, \\ \dots \\ x_n = x'_n + w_n \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = X' + W,$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Observaţie. Facem convenţia că vectorii (sau punctele) se reprezintă prin matricile *coloană* ale coordonatelor sau componentelor lor. Este una dintre cele două convenţii posibile care se utilizează în grafică. Cealaltă convenţie este că vectorii (sau punctele) se descriu prin matrici linie.

Demonstraţia teoremei. Fie

$$O' = O + \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{e}_i.$$

În sistemul de coordonate noi, putem scrie

$$P = O' + \sum_{i=1}^{n} x'_i \mathbf{e}_i = O + \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{n} x'_i \mathbf{e}_i = O + \sum_{i=1}^{n} (x'_i + w_i)\mathbf{e}_i. \tag{7.2.1}$$

Cum, pe de altă parte,

$$P = O + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \tag{7.2.2}$$

iar vectorii $\mathbf{e}_i$ sunt liniar independenţi, din (7.2.1) şi (7.2.2) rezultă relaţia cerută. □

7.3 Schimbarea axelor

De data asta, reperul vechi este acelaşi, adică

$$S = \big(O; \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}\big),$$

dar reperul nou este de forma

$$S = \big(O; \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}\big),$$

adică originea rămâne aceeaşi, dar se schimbă baza de coordonate. Presupunem că

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\mathbf{e}_j, \quad 1 \le i \le n.$$

Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matricea A se numeşte *matrice de schimbare a bazei*. Numele e justificat de teorema de mai jos.

Teorema 7.2. *Fie P un punct oarecare. Atunci coordonatele sale relativ la cele două repere sunt legate prin relaţia*

$$X = A \cdot X'. \tag{7.3.1}$$

Observaţie. De remarcat că, dacă am fi utilizat cealaltă convenţie, relaţia (7.3.1) s-ar fi scris

$$X = X' \cdot A^t,$$

unde, de data aceasta, X şi X' sunt matrici linie, nu coloană.

Demonstraţia teoremei. Avem

$$P = O + \sum_{j=1}^{n} x_i\mathbf{e}_j = O + \sum_{i=1}^{n} x'_i\mathbf{e}'_i,$$

prin urmare,

$$\sum_{j=1}^{n} x_i\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} x'_i\mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x'_i\mathbf{e}_j\right).$$

De aici rezultă că

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x'_i, \quad 1 \le j \le n,$$

sau, matricial,

$$X = A \cdot X'.$$

$\square$

Ma rămâne de discutat cazul în care se schimbă atât originea reperului, cât şi baza de coordonate. Este uşor de constatat că atunci are loc

Teorema 7.3. *Dacă se trece de la reperul*

$$S = \big(O; \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}\big)$$

la reperul

$$S' = \big(O'; \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}\big),$$

adică se schimbă atât originea, cât şi baza, atunci legătura între coordonatele unui punct în vechea bază şi coordonatele sale în noua bază sunt date de

$$X = A \cdot X' + W, \tag{7.3.2}$$

unde W este vectorul coordonatele originii noi faţă de vechiul sistem de coordonate, iar A este matricea schimbării de bază.

Faptul că relaţia (7.3.2) nu se reduce la o simplă înmulţire de matrici complică destul de mult lucrurile dacă, aşa cum se întâmplă adesea, trebuie să facem mai multe schimbări de coordonate. Astfel, de exemplu, dacă, în (7.3.2)

$$X' = B \cdot X'' + W',$$

atunci relaţia citată se scrie

$$X = A \cdot \big(B \cdot X'' + W'\big) + W = (A \cdot B) \cdot X'' + A \cdot W' + W.$$

Este uşor de imaginat cât de tare se poate complica transformarea dacă trebuie să compunem mai multe transformări. Ideal ar fi dacă am avea $W = 0$, tot timpul. Desigur, aşa ceva nu este posibil, dar putem obţine ceva aproape la fel de bun utilizând aşa-numitele coordonate omogene, pe care le vom introduce în secţiunea următoare.

7.4 Spaţiul proiectiv n-dimensional

Există o serie de probleme cărora geometria euclidiană nu le face faţă cu succes, dar care se pot descrie cu uşurinţă într-o geometrie mai generală, numită geometrie proiectivă. Un spaţiu proiectiv se obţine, până la urmă, din spaţiul afin de aceeaşi dimensiune, adăugând o serie de puncte numite *puncte de la infinit* sau *puncte ideale*. Adăugarea acestor puncte elimină, de multe ori, cazurile speciale care trebuie luate în considerare atunci când se face o discuţie. Astfel, de exemplu, în planul afin, două drepte distincte pot să se intersecteze sau să fie paralele. În planul proiectiv, oricare două drepte se intersectează, dar unele dintre ele, care corespund dreptelor afine paralele, se intersectează într-un punct de la infinit.

Din punctul nostru de vedere, principalul avantaj al punctului de vedere proiectiv este că ne furnizează un sistem de coordonate foarte utile, *coordonatele omogene*, care permit descrierea foarte comodă atransformărilor geometrice.

Începem cu o definiţie.

Definiţia 7.1. Fie $u,v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Spunem că punctele u şi v sunt echivalente şi scriem $x \sim y$ dacă există un număr real nenul t astfel încât $u = t \cdot v$. Este uşor de verificat că această relaţie este o relaţie de echivalenţă. Clasa de echivalenţă a lui u,

$$[u] = \{t \cdot u \,|\, t \in \mathbb{R}^*\}$$

este dreapta care trece prin origine şi punctul u, mai puţin originea, desigur. Mulţimea tuturor claselor de echivalenţă, adică *spaţiul factor* $\mathbb{RP}^n \equiv \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$, se numeşte *spaţiu proiectiv n-dimensional*. Dacă în $\mathbb{R}^{n+1}$ alegem un sistem de coordonate $OX_1 \ldots X_{n+1}$, atunci, pentru $[u] = [X_1, \ldots, X_{n+1}]$, spunem că numerele $X_1, \ldots, X_{n+1}$ sunt *coordonatele omogene* ale punctului $[u]$. De remarcat că aceste coordonate nu sunt unice. Într-adevăr, dacă $(X_1, \ldots, X_{n+1})$ sunt coordonate omogene ale lui $[u]$, atunci, pentru orice $t \neq 0$, $(tX_1, \ldots, tX_{n+1})$ sunt, de asemenea, coordonate omogene ale aceluiaşi punct.

Pentru noi sunt importante cazurile $n = 2$ şi $n = 3$.

Începem cu $n = 2$. Spaţiul proiectiv $\mathbb{RP}^2$ se mai numeşte *plan proiectiv real*. Să presupunem că am ales, în $\mathbb{R}^3$, un sistem de coordonate $OXYZ$. Atunci un punct din planul proiectiv se scrie

$$[X,Y,Z] = \{t(X,Y,Z) \,|\, t \in \mathbb{R}^*\}.$$

Să considerăm, mai întâi, cazul în care $Z \neq 0$. Un punct de acest tip are un reprezentant de forma $(x,y,1)$, dacă alegem $t = 1/Z$ şi notăm $x = X/Z, y = Y/Z$.

De remarcat că reprezentantul $(x,y,1)$ este intersecţia dintre dreapta care trece prin origine şi prin punctul (X,Y,Z) şi planul $Z = 1$. Dacă identificăm acest plan cu $\mathbb{R}^2$, concluzia este că există o bijecţie între punctele $[X,Y,Z]$, cu $Z \neq 0$, ale planului proiectiv şi punctele planului euclidian. Dacă (X,Y,Z) sunt coordonate omogene ale unui punct din planul proiectiv, cu $Z \neq 0$, vom spune că ele sunt coordonatele omogene ale punctului $(x = X/Z, y = Y/Z)$ din planul euclidian. Invers, dacă (x,y) este un punct din planul euclidian, coordonatele sale omogene sunt $(x,y,1)$ şi orice triplet de numere reale obţinut din acestea prin înmulţirea cu un scalar nenul.

Să vedem, acum, ce se întâmplă cu punctele din planul proiectiv pentru care ultima coordonată este zero. Fie (x_0,y_0) un punct din plan, diferit de origine. Coordonatele punctului pot fi privite ca fiind componentele unui vector care, fiind nenul, poate fi vectorul director al unei drepte. Fie (a,b) un punct oarecare din plan şi dreapta

$$(x(t),y(t)) = (a + tx_0, b + ty_0)$$

de direcţie (x_0,y_0), care trece prin punctul (a,b). Pentru fiecare t real, punctului $(x(t),y(t))$ îi putem asocia coordonatele omogene $(x(t),y(t),1) = (a + tx_0, b + ty_0, 1)$. Acelaşi punct, dacă $t \neq 0$, are şi coordonatele omogene $(a/t, x_0, b/t + y_0, 1/t)$. Dacă $t \to \infty$, atunci coordonatele omogene ale punctului considerat tind la $(x_0,y_0,0)$. Interpretarea geometrică este că punctul de coordonate omogene $(x_0,y_0,0)$ este punctul situat la infinit pe dreapta $(x(t),y(t))$. De remarcat că există *un singur* punct la infinit pe o dreaptă dată.

7.5 Transformări de coordonate în coordonate omogene

Considerăm transformarea de coordonate

$$X = A \cdot X + W.$$

Definim *matricea extinsă* sau *matricea omogenă* asociată acestei transformări prin

$$M_{A,W} = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & w_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.5.1}$$

Dacă vectorul W se presupune subînţeles, vom nota $M_{A,W} \equiv \overline{A}$. Fie, acum, $\overline{X}$ şi $\overline{X}'$ vectorii coordonatelor omogene asociate lui X şi X', adică

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \overline{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci transformarea de coordonate se poate scrie

$$\overline{X} = \overline{A} \cdot \overline{X}' \tag{7.5.2}$$

sau, explicit,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & w_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7.5.3}$$

Afirmaţia este uşor de demonstrat în cazul general, dar preferăm să o verificăm în cele două cazuri particulare care ne interesează pe noi, anume $n = 2$ şi $n = 3$.

În cazul $n = 2$, transformarea omogenă se scrie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7.5.4}$$

Dacă facem înmulţirea de matrici, obţinem

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + w_1 \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + w_2 \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = A \cdot X' + W,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

În cazul $n = 3$, transformarea omogenă se scrie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & w_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{7.5.5}$$

de unde

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13x'_3} + w_1 \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 + w_2 \\ x_3 = a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + w_3 \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = A \cdot X' + W,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

7.5.1 Operaţii cu matrici extinse

Dacă privim matricile extinse ca fiind nişte matrici formate din blocuri, atunci ele se pot înmulţi, după cum se poate verifica uşor, considerând că blocurile sunt, de fapt, componentele matricii. Astfel, dacă înmulţim matricile $M_{A,W}$ şi $M_{B,V}$ obţinem

$$\begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot B & A \cdot V + W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Această relaţie demonstrează, în fapt, că $M_{A,W} \cdot M_{B,V}$ este matricea transformării compuse:

$$M_{A,W} \cdot M_{B,V} = M_{A \cdot B, A \cdot V + W},$$

după cum era de aşteptat.

Matricea extinsă asociată transformării identice este matricea identică:

$$M_{I_n,0} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Inversa matricei $M_{A,W}$ este

$$M_{A,W}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr,

$$\begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot A^{-1} & A \cdot \left(-A^{-1} \cdot W\right) + W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1},$$

iar

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} \cdot A & A^{-1} \cdot W - A^{-1} \cdot W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Să presupunem, acum, că avem o transformare de coordonate de forma

$$X = A \cdot X' + W.$$

Vrem să exprimăm pe X' în funcţie de X. Un calcul simplu ne conduce la

$$X' = A^{-1} \cdot X - A^{-1} \cdot W$$

sau, în limbaj de matrici extinse,

$$\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}.$$

CAPITOLUL 8

Transformări geometrice în plan

8.1 Generalităţi despre transformări afine

Fie $\mathbb{E}^n$ spaţiul afin n-dimensional. $\mathbb{E}^n$ este, ca mulţime, $\mathbb{R}^n$, privită ca mulţime de puncte. Pentru a fi un spaţiu afin, ea este însoţită de o aplicaţie care asociază fiecărei perechi de puncte vectorul care le uneşte, cu alte cuvinte,

$$\varphi : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(P,Q) = \overrightarrow{PQ}. \tag{8.1.1}$$

Aplicaţia φ se bucură de următoarele două proprietăţi:

1. $\varphi(P,Q) + \varphi(Q,R) = \varphi(P,R)$ (regula triunghiului);
2. pentru orice punct $P \in \mathbb{E}^n$ şi orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, există un singur punct $Q \in \mathbb{E}^n$ astfel încât $\varphi(A,B) = \mathbf{v}$.

O aplicaţie bijectivă $T : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ se numeşte *transformare afină* dacă există $O \in \mathbb{E}^n$, aplicaţia $\overrightarrow{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definită, pentru orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, prin

$$\overrightarrow{T}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{T(O)T(P)},$$

unde $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$, este liniară.

Se poate demonstra că, dacă în $\mathbb{E}^n$ s-a fixat un reper $(O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\})$, o transformare afină se poate scrie

$$T(P) = A \cdot P + B,$$

unde A este matricea aplicaţiei liniare $\overrightarrow{T}$, iar $B = T(O)$. Pentru a simplifica notaţia, în cele ce urmează vom renunţa la săgeata care indică partea vectorială a transformării afine şi ne vom da seama după argument dacă este vorba despre partea punctuală sau cea vectorială a aplicaţiei afine. Astfel, dacă scriem

$$T(P + \mathbf{v}) = T(P) + T(\mathbf{v}),$$

al doilea termen din membrul drept este, de fapt, partea vectorială (liniară) a transformării afine. Dacă folosim coordonate omogene, matricea corespunzătoare unei transformări afine se va scrie

$$T = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dacă **v** este un vector, atunci

$$T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot v \\ 0 \end{pmatrix},$$

deci aplicaţia A e liniară pe vectori. Pe de altă parte

$$T(P) = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot P + W \\ 1 \end{pmatrix}.$$

În cele ce urmează, ne vom concentra, exclusiv, pe cazurile $n = 2$ şi $n = 3$ şi vom determina, pentru fiecare caz contra, matricea omogenă a transformării. Strategia va fi să determinăm, de fiecare dată, o formă vectorială a transformării, care să nu depindă de coordonate, şi abia apoi să determinăm matricea (omogenă) a transformării.

8.2 Transformări plane

8.2.1 Translaţia

Forma vectorială

Translaţia este o transformare care mută toate punctele planului cu un acelaşi vector, constant. Prin urmare, dacă privim planul ca fiind un spaţiu afin bidimensional, pe care îl vom nota cu $\mathbb{E}^2$, atunci translaţia este o aplicaţie $T : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$,

$$T(P) = P + \mathbf{w}, \tag{8.2.1}$$

unde **w** este un vector constant din plan. Transformarea se mai scrie şi

$$P' = P + \mathbf{w}.$$

O tehnică generală, atunci când studiem transformările afine, ale planului sau ale spaţiului, fără a utiliza coordonate, este aceea de a determina, separat, modul în care transformarea acţionează pe puncte şi pe vectori. Să aplicăm această metodă în cazul translaţiei. Dacă Q este un al doilea punct, atunci

$$T(Q) = Q + \mathbf{w}. \tag{8.2.2}$$

Fie $\mathbf{v} = Q - P \left(\equiv \overrightarrow{PQ}\right)$. Atunci

$$T(\mathbf{v}) = T(Q-P) = T(Q) - T(P) = (P+\mathbf{v}) - P = (P-P) + \mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v},$$

deci, când translaţia este aplicată unui vector, ea se reduce la aplicaţia identică.

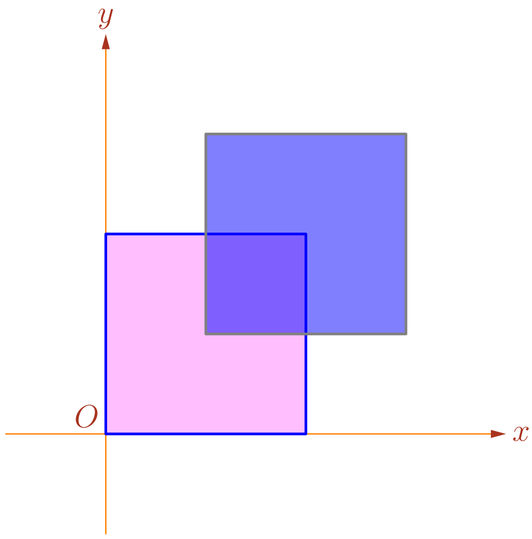


Figura 8.1: Translaţia aplicată unui păătrat

Forma matricială

Cele două reguli de transformare, pentru vectori şi puncte, se scriu, sub forma matricială, ca

$$[v'] = [v] = I_2 \cdot [v], \tag{8.2.3}$$

$$[P'] = [P] + [w] = I_2 \cdot [P] + [w], \tag{8.2.4}$$

ceea ce înseamnă că, dacă utilizăm blocuri matriciale, matricea translaţiei se va scrie

$$[T_{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} I_2 & w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.2.5}$$

sau, în formă extinsă,

$$[T_{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.2.6}$$

Dacă aplicăm transformarea unui punct P, de coordonate (x_1, y_1), obţinem

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + w_1 \\ x_2 + w_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.2.7}$$

ceea ce corespunde, după cum ne aşteptam, scrierii scalare

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + w_1, \\ x'_2 = x_2 + w_2 \end{cases}. \tag{8.2.8}$$

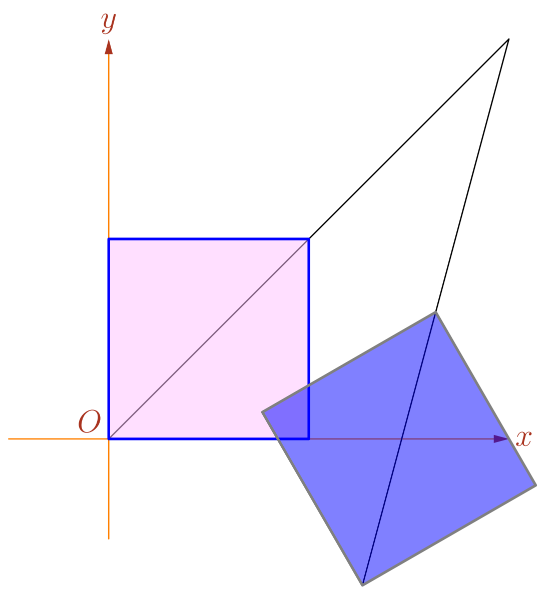


Figura 8.2: Rotaţia aplicată unui păătrat

8.2.2 Rotaţia în jurul unui punct

Forma vectorială

Aplicăm aceeaşi metodă şi în cazul rotaţiei în plan relativ la un punct. Începem prin a determina rotaţia unui vector $\mathbf{v}$ cu un unghi θ. Aceasta înseamnă să fixăm originea vectorului şi să rotim extremitatea vectorului cu unghiul θ faţă de originea vectorului. E uşor de verificat că operaţia nu depinde de alegerea originii.

Introducem operatorul care roteşte un vector, în sens direct, cu $90°$. Pentru un vector $\mathbf{v}$, vom nota imaginea sa prin acest operator cu $\mathbf{v}^{\perp}$ (se citeşte “perp de $\mathbf{v}$”). Dacă am fixat un reper ortonormat direct în care $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, atunci $\mathbf{v}^{\perp} = (-v_2, v_1)$. Un raţionament simplu ne arată că putem scrie rotaţia de unghi θ aplicată vectorului sub forma:

$$\mathrm{Rot}(\theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{v}^{\perp}\sin\theta. \tag{8.2.9}$$

Fie acum Q punctul fix în jurul căruia se face rotaţia şi P un punct oarecare din plan, pe care vrem să-l rotim cu unghiul θ în jurul lui Q. Pentru a stabili formula pentru rotaţia punctului P, remarcăm că putem scrie

$$P = Q + P - Q = Q + \overrightarrow{QP}.$$

Prin urmare, rotaţia fiind o transformare afină, avem:

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta)(P) = \mathrm{Rot}(Q,\theta)(Q) + \mathrm{Rot}(Q,\theta)(\overrightarrow{QP}).$$

Cum Q este punctul în jurul căruia se face rotaţia, el este fix: $\mathrm{Rot}(Q,\theta)(Q) = Q$. Pe de altă parte, transformarea vectorului $P - Q$ este dată de formula (8.2.9), adică

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta)(P-Q) = \overrightarrow{QP}\cos\theta + \overrightarrow{QP}^{\perp}\sin\theta,$$

deci, în final, pentru transformarea punctelor avem formula:

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta)(P) = Q + \overrightarrow{QP}\cos\theta + \overrightarrow{QP}^{\perp}\sin\theta. \tag{8.2.10}$$

Forma matricială

Dacă utilizăm componentele vectorilor, relaţia (8.2.9) se poate scrie

$$\begin{cases} v_1' = v_1\cos\theta - v_2\sin\theta, \\ v_2' = v_1\sin\theta + v_1\cos\theta. \end{cases} \tag{8.2.11}$$

Introducem matricea

$$\mathrm{Rot}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{8.2.12}$$

Atunci, relaţiile (8.2.11) capătă forma matricială

$$[v'] = \mathrm{Rot}(\theta)\cdot[v]. \tag{8.2.13}$$

Prin urmare, folosind relaţia (8.2.10), obţinem

$$[P'] = [Q] + \mathrm{Rot}(\theta)\cdot(P-Q) = \mathrm{Rot}(\theta)\cdot[P] + (I_2 - \mathrm{Rot}(\theta))\cdot[Q]$$

Dacă trecem la coordonate omogene, găsim matricea rotaţiei de unghi θ în jurul lui Q sub forma

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta) = \begin{bmatrix} \mathrm{Rot}(\theta) & (I_2 - \mathrm{Rot}(\theta))\cdot[Q] \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.2.14}$$

Dacă explicităm, matricea de mai sus se scrie

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & q_1(1-\cos\theta)+q_2\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -q_1\sin\theta + q_2(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.2.15}$$

Exemplul 8.1. Rotaţia faţă de origine. De data asta, Q este originea, deci coordonatele sale sunt $(0,0)$. Aşadar, matricea rotaţiei de unghi θ relativ la origine este

$$\mathrm{Rot}(Origine,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.2.16}$$

Problema 8.1. Determinaţi imaginea triunghiului ABC, de vârfuri $A(1,2), B(3,1), C(4,4)$ printr-o rotaţie de unghi 30° în jurul originii. Desenaţi, pe acelaşi sistem de axe, triunghiul iniţial şi imaginea sa.

Soluţie Conform formulei (8.2.16), matricea omogenă a transformării este

$$R = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, avem:

$$\begin{bmatrix}A' & B' & C'\end{bmatrix} = R\cdot\begin{bmatrix}A & B & C\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}-2}{2} & \frac{3\sqrt{3}-1}{2} & 2\sqrt{3}-2\\ \frac{2\sqrt{3}+1}{2} & \frac{3+\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3}+2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Aşadar, punctele A', B', C' vor fi date de

$$A' = A'\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}+1}{2}\right),\ B' = B'\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right),\ C' = C'\left(2\sqrt{3}-2, 2\sqrt{3}+2\right)$$

□

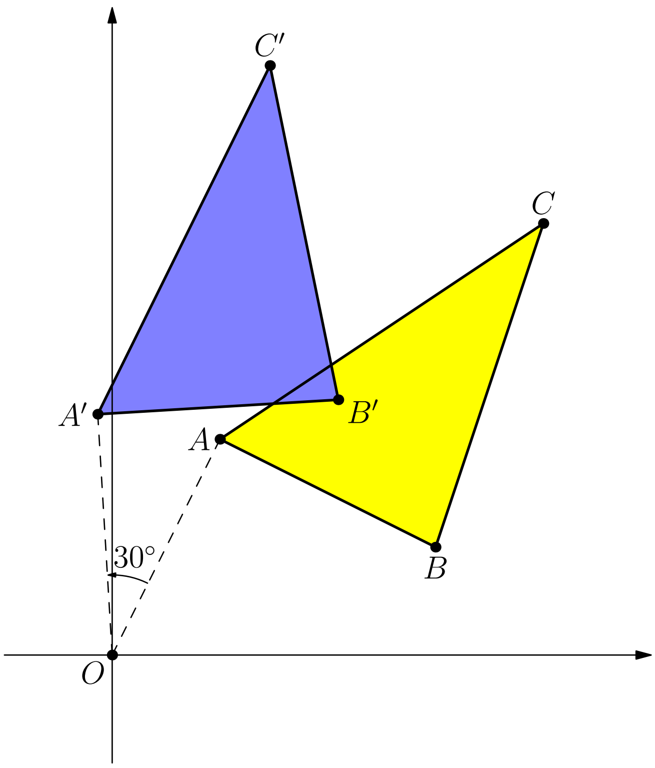


Figura 8.3:

Problema 8.2. Determinaţi imaginea triunghiului ABC, de vârfuri $A(1,2), B(3,1), C(4,4)$ printr-o rotaţie de unghi 30° în jurul punctului $Q(1,3)$. Desenaţi, pe acelaşi sistem de axe, triunghiul iniţial şi imaginea sa.

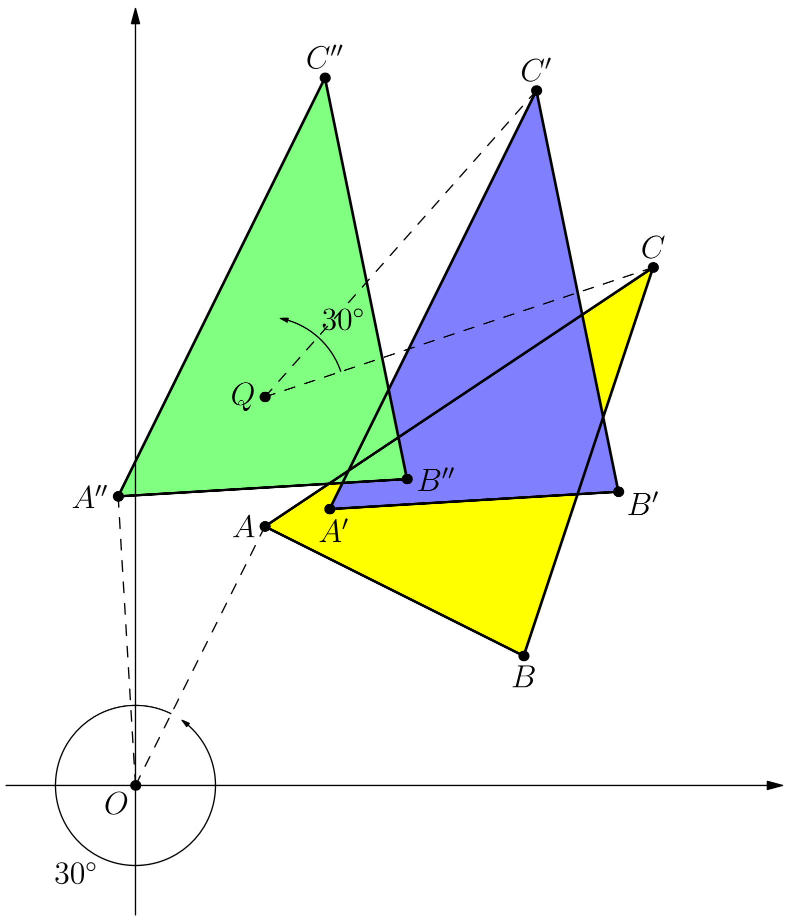


Figura 8.4:

8.2.3 Scalarea simplă uniformă

Scalarea simplă este o transformare afină în care se scalează vectorii bazei, adică aceştia se înmulţesc cu un număr real diferit de zero. Dacă numărul este acelaşi, avem de-a face cu o scalare *uniformă* sau *izotropă*. Dacă factorii de scală nu sunt aceeaşi pentru toţi vectorii bazei, atunci spunem că scalarea este *neuniformă* sau *anizotropă*. Începem cu studiul scalării simple uniforme. Ea se mai numeşte şi *omotetie*.

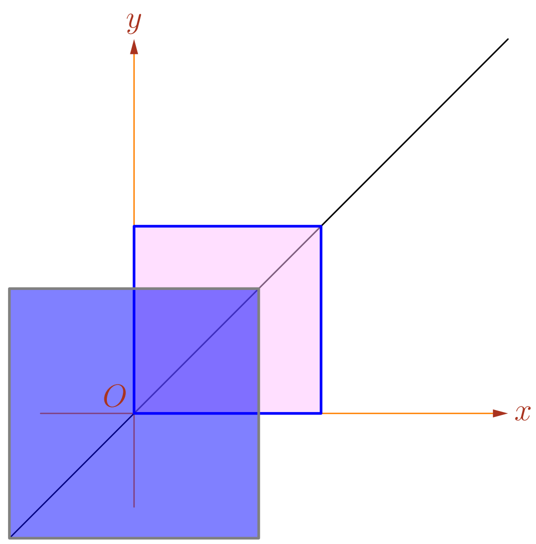


Figura 8.5: Rotaţia aplicată unui păătrat

Forma vectorială

Scalarea simplă omogenă de factor s, relativ la un punct Q din plan este transformarea geometrică ce asociază unui punct P din plan un punct P' astfel încât

$$\overrightarrow{QP'} = s\overrightarrow{QP}. \tag{8.2.17}$$

Este uşor de dedus forma transformării atunci când este aplicată vectorilor:

$$\text{Scale}(Q,s)(\mathbf{v}) = s \cdot \mathbf{v}. \tag{8.2.18}$$

Această "parte" a scalării nu depinde de punctul Q, ci doar de factorul de scală, s.

Pentru a determina modul în care scalarea se aplică punctelor, procedăm ca şi în cazul rotaţiei, adică aplicăm scalarea vectorială vectorului $\overrightarrow{QP} \equiv P - Q$. Din (8.2.18) rezultă

$$\text{Scale}(Q,s)(P-Q) = \text{Scale}(Q,s)(P) - \text{Scale}(Q,s)(Q) = s \cdot (P-Q)$$

Cum Q este punct fix al transformării, relaţia de mai sus se poate scrie

$$\text{Scale}(Q,s)(P) = Q + s \cdot \overrightarrow{QP}. \tag{8.2.19}$$

Forma matricială

Relaţia (8.2.19) se poate scrie, matriceal

$$\text{Scale}(Q,s)(P) = [Q] + s\,(P-Q) = s[P] + (1-s)[Q] = (sI_2) \cdot][P] + (1-s)[Q].$$

Prin urmare, matricea scalării uniforme relativ la Q este

$$\text{Scale}(Q,s) = \begin{pmatrix} s \cdot I_2 & (1-s)Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.2.20}$$

sau, explicit,

$$\operatorname{Scale}(Q,s)=\begin{pmatrix} s & 0 & (1-s)q_1\\ 0 & s & (1-s)q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{8.2.21}$$

8.2.4 Scalarea simplă neuniformă

Produsul tensorial

Avem nevoie de un mic artificiu, bazat pe o operaţie cu vectori care se numeşte *produs tensorial*. Fie $\mathbf{a}(a_1,a_2)$ şi $\mathbf{b}(b_1,b_2)$ doi vectori. *Produsul tensorial* al celor doi vectori este aplicaţia biliniară care are, în baza considerată, matricea

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1\\ a_1b_2 & a_2b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 & a_2\end{pmatrix}=[\mathbf{b}]\cdot[\mathbf{a}]^t. \tag{8.2.22}$$

În general, produsul tensorial nu este comutativ. În fapt, avem

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})^t.$$

Pe noi, produsul tensorial ne interesează pentru reformularea anumitor egalităţi. De multe ori, de exemplu, apar expresii de forma

$$\mathbf{t}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}. \tag{8.2.23}$$

Remarcabil este, la relaţia de mai sus, că, atunci când $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt vectori constanţi, $\mathbf{t}$ este o aplicaţie liniară de $\mathbf{u}$. Într-adevăr, un calcul simplu, pe care îl lăsăm în seama cititorului, demonstrează că

$$\mathbf{t}=(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot\mathbf{u}. \tag{8.2.24}$$

Prin urmare, atunci când se trece de la reprezentarea vectorială la reprezentarea matricială, formula (8.2.43) se transformă în formula (8.2.44).

Fie Q un punct din plan. O scalare simplă neuniformă a planului, relativ la punctul Q, este o transformare afină care asociază unui punct P, de vector de poziţie $\overrightarrow{QP}$, relativ la punctul Q, un punct P' astfel încât

$$\begin{cases}\overrightarrow{QP'}\cdot\mathbf{i}=s_x\cdot(\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{i}),\\ \overrightarrow{QP'}\cdot\mathbf{j}=s_y\cdot(\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{i}).\end{cases} \tag{8.2.25}$$

Forma vectorială

Fie $\mathbf{v}$ un vector din plan. Atunci el se poate scrie

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_x+\mathbf{v}_y,$$

unde $\mathbf{v}_x=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{i})\cdot\mathbf{i}$, $\quad\mathbf{v}_y=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{j})\cdot\mathbf{j}$. Atunci,

$$\operatorname{Scale}(s_x,s_y)(\mathbf{v})=\operatorname{Scale}(s_x,s_y)(\mathbf{v}_x)+\operatorname{Scale}(s_x,s_y)(\mathbf{v}_y),$$

adică
$$\text{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}) = s_x \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}. \tag{8.2.26}$$
Dacă P e un punct,
$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = \text{Scale}(Q, s_x, s_y)(Q + \overrightarrow{QP}),$$
adică
$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = Q + s_x \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}. \tag{8.2.27}$$

Forma matricială

Din (8.2.27), obţinem
$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = Q + s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i})(P - Q) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})(P - Q)$$
sau
$$\begin{aligned}\text{Scale}(Q, s_x, s_y) = {} & (s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})) \cdot P + \\ & + (I_2 - s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) - s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) \cdot Q\end{aligned} \tag{8.2.28}$$
Matricea transformării este, deci
$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) & (I_2 - s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) - s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.2.29}$$
Dar
$$\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
deci matricea extinsă este
$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & (1 - s_x)q_1 \\ 0 & s_y & (1 - s_y)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.2.30}$$

8.2.5 Scalarea neuniformă generală (Goldman)

Scalarea neuniformă generală nu este tocmai o generalizare a scalării neuniforme obişnuite. Ea este, în acelaşi timp, mai generală şi mai particulară decât scalarea neuniformă simplă. Este mai particulară, deoarece avem un singur factor de scală, dar este mai generală pentru că vectorul **i** este înlocuit cu un versor oarecare. În rest, "filozofia" transformării este aceeaşi.

Mai precis, considerăm un număr real nenul s, versor $\mathbf{w}$ din plan şi un punct din plan. *Scalarea neuniformă generală* de-a lungul lui $\mathbf{w}$, relativ la Q, de factor de scală s, este singura transformare afină a planului care transformă vectorul $\mathbf{w}$ în vectorul $s\mathbf{w}$, vectorul $\mathbf{w}^\perp$ – în el însuşi şi lasă pe loc punctul Q.

Aşadar,
$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \begin{pmatrix} s \cdot \mathbf{w} & \mathbf{w}^\perp & Q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w} & \mathbf{w}^\perp & Q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \tag{8.2.31}$$

sau, extins,

$$\mathrm{Scale}(Q,\mathbf{w},s)=\begin{pmatrix} s\cdot w_1 & -w_2 & q_1\\ s\cdot w_2 & w_1 & q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 & -w_2 & q_1\\ w_2 & w_1 & q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}. \tag{8.2.32}$$

Cum

$$\begin{pmatrix} w_1 & -w_2 & q_1\\ w_2 & w_1 & q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & -w_1q_1-q_2w_2\\ -w_2 & w_1 & w_2q_1-w_1q_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

rezultă că

$$\mathrm{Scale}(Q,\mathbf{w},s)=\begin{pmatrix} 1+(s-1)w_1^2 & (s-1)w_1w_2 & -(s-1)(q_1w_1^2+q_2w_1w_2)\\ (s-1)w_1w_2 & 1+(s-1)w_2^2 & -(s-1)(q_1w_1w_2+q_2w^2)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{8.2.33}$$

O altă metodă

De data aceasta, vom deduce, mai întâi, formula pentru vectori. Fie **v** un vector oarecare din plan. Vom descompune acest vector după două direcţii, una paralelă cu versorul **w** şi una perpendiculară pe el:

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_{\parallel}+\mathbf{v}_{\perp}. \tag{8.2.34}$$

Este uşor de constatat că

$$\mathbf{v}_{\parallel}=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{w}, \tag{8.2.35}$$

de unde, desigur,

$$\mathbf{v}_{\perp}=\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{w}. \tag{8.2.36}$$

Prin urmare,

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w},s)(\mathbf{v})=\mathrm{Scale}(\mathbf{w},s)(\mathbf{v}_{\parallel})+\mathrm{Scale}(\mathbf{w},s)(\mathbf{v}_{\perp}). \tag{8.2.37}$$

Cum scalarea se produce paralel cu vectorul **w**, avem, evident

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w},s)(\mathbf{v}_{\parallel})=s\mathbf{v}_{\parallel}. \tag{8.2.38}$$

Pe de altă parte, nici o scalare nu are loc în direcţia perpendiculară la **w**, deci

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w},s)(\mathbf{v}_{\perp})=\mathbf{v}_{\perp}. \tag{8.2.39}$$

Prin urmare,

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w},s)(\mathbf{v})=s\mathbf{v}_{\parallel}+\mathbf{v}_{\perp}$$

sau, dacă ţinem cont de definiţiile lui $\mathbf{v}_{\parallel}$ şi $\mathbf{v}_{\perp}$,

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w},s)(\mathbf{v})=\mathbf{v}+(s-1)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{w}. \tag{8.2.40}$$

Pentru a determina modul în care transformarea acţionează asupra unui punct P, remarcăm, mai întâi, că:

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w},s)(P-Q)=\mathrm{Scale}(Q,\mathbf{w},s)(P)-\mathrm{Scale}(Q,\mathbf{w},s)(Q)=\mathrm{Scale}(Q,\mathbf{w},s)(P)-Q,$$

de unde

$$\mathrm{Scale}(Q,\mathbf{w},s)(P)=Q+\mathrm{Scale}(\mathbf{w},s)(\overrightarrow{QP})$$

sau, folosind (8.2.40),

$$\mathrm{Scale}(Q,\mathbf{w},s)(P)=Q+\overrightarrow{QP}+(s-1)(\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{w})\mathbf{w}. \tag{8.2.41}$$

Forma matricială

Pentru a descrie matricial transformarea, avem nevoie de un mic artificiu, bazat pe o operaţie cu vectori care se numeşte *produs tensorial*. Fie $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ şi $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ doi vectori. *Produsul tensorial* al celor doi vectori este aplicaţia biliniară care are, în baza considerată, matricea

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = [\mathbf{b}] \cdot [\mathbf{a}]^t. \tag{8.2.42}$$

În general, produsul tensorial nu este comutativ. În fapt, avem

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^t.$$

Pe noi, produsul tensorial ne interesează pentru reformularea anumitor egalităţi. De multe ori, de exemplu, apar expresii de forma

$$\mathbf{t} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}. \tag{8.2.43}$$

Remarcabil este, la relaţia de mai sus, că, atunci când $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt vectori constanţi, $\mathbf{t}$ este o aplicaţie liniară de $\mathbf{u}$. Într-adevăr, un calcul simplu, pe care îl lăsăm în seama cititorului, demonstrează că

$$\mathbf{t} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}. \tag{8.2.44}$$

Prin urmare, atunci când se trece de la reprezentarea vectorială la reprezentarea matricială, formula (8.2.43) se transformă în formula (8.2.44).

Deducem că din formula (8.2.40) rezultă expresia matricială pentru scalarea neuniformă a vectorilor:

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s)([\mathbf{v}]) = (I_2 + (s-1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot [\mathbf{v}]. \tag{8.2.45}$$

Pentru a determina matricea omogenă a transformării pentru puncte, plecăm de la (8.2.41) şi obţinem

$$\mathrm{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + P - Q + (s-1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \cdot (P - Q)$$

sau

$$\mathrm{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = (I_2 + (s-1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot P + (1-s)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \cdot Q. \tag{8.2.46}$$

Prin urmare, matricea omogenă a scalării generale neuniforme este

$$\mathrm{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \begin{pmatrix} I_2 + (s-1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} & (1-s)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.2.47}$$

Dacă facem calculele, ajungem, din nou, la formula (8.2.33).

8.2.6 Reflexia faţă de o dreaptă

Reflexia relativ la o dreaptă este transformarea care asociază unui punct simetricul punctului faţă de dreaptă.

Forma vectorială

Considerăm o dreaptă care trece printr-un punct Q şi are versorul director $\mathbf{w}$. Începem, ca de obicei, prin a determina imaginea unui vector prin reflexie. Evident, imaginea vectorului nu depinde de punctul Q. Fie $\mathbf{v}$ un vector oarecare din plan. După cum am văzut, $\mathbf{v}$ se poate descompune ca o sumă dintr-un vector paralel cu vectorul $\mathbf{w}$ şi unul perpendicular pe acest vector,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp}.$$

De data aceasta, însă, vom pune

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{\|} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp})\mathbf{w}^{\perp}, \\ \mathbf{v}_{\perp} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp})\mathbf{w}^{\perp}. \end{cases}$$

Este clar că

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}_{\|}) = \mathbf{v}_{\|}, \tag{8.2.48}$$

în timp ce

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}_{\perp}) = -\mathbf{v}_{\perp}.$$

Aşadar,

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\|} - \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp})\mathbf{w}^{\perp}. \tag{8.2.49}$$

Ca să determinăm imaginea unui punct oarecare, P, din plan, ţinem cont de faptul că $P = Q + (P - Q)$ şi, Q fiind un punct fix al transformării, obţinem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = Q + \text{Mirror}(\mathbf{w})(\overrightarrow{QP}),$$

deci

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = Q + \overrightarrow{QP} - 2\left(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{w}^{\perp}\right)\mathbf{w}^{\perp}. \tag{8.2.50}$$

Forma matricială

Transcriem, mai întâi, matricial, formula de transformare pentru vectori (8.2.49), ţinând cont de faptul că

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp})\mathbf{w}^{\perp} = \left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right)\mathbf{v}.$$

Obţinem, prin urmare,

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right)\mathbf{v}$$

sau

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \left(I_2 - 2\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right)\right) \cdot \mathbf{v}. \tag{8.2.51}$$

Aşadar, matricea părţii liniare a reflexiei este

$$\text{Mirror}(\mathbf{w}) = I_2 - 2\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right). \tag{8.2.52}$$

Pentru determinarea matricei omogene, plecăm de la (8.2.50) şi obţinem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = Q + P - Q - 2\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right)(P - Q),$$

adică

$$\text{Mirror}(Q,\mathbf{w})(P) = \left(I_2 - 2\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp\right)\right)\cdot P + 2\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp\right)\cdot Q, \tag{8.2.53}$$

ceea ce înseamnă că matricea omogenă a transformării este

$$\text{Mirror}(Q,\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} I_2 - 2\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp\right) & 2\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp\right)\cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.2.54}$$

Dacă ţinem cont că

$$\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp = \begin{pmatrix} w_2^2 & -w_1w_2 \\ -w_1w_2 & w_1^2 \end{pmatrix},$$

matricea de mai sus se scrie, în mod explicit, ca

$$\text{Mirror}(Q,\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1-2w_2^2 & 2w_1w_2 & 2(q_1w_2^2 - q_2w_1w_2) \\ 2w_1w_2 & 1-2w_1^2 & 2(-q_1w_1w_2 + q_2w_1^2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.2.55}$$

Observaţii. (i) Dacă examinăm formulele (8.2.47) şi (8.2.55), ajungem imediat la concluzia că, de fapt, reflexia faţă de o dreaptă este o scalare generală neomogenă, de factor de scală -1, în direcţia perpendiculară pe dreaptă, deoarece avem

$$\text{Mirror}(Q,\mathbf{w}) = \text{Scale}(Q,\mathbf{w}^\perp,-1).$$

(ii) Dacă Q este originea, iar reflexia se face faţă de Ox, atunci avem $\mathbf{w} = (1,0)$, deci

$$\text{Mirror}(Origine,\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analog, reflexia faţă de Oy este dată de matricea

$$\text{Mirror}(Origine,\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Formula (8.2.55) a fost obţinută în ipoteza că dreapta este dată sub forma vectorială:

$$P(t) = Q + t\mathbf{w}.$$

Dacă dreapta este dată sub forma generală,

$$\Delta:\ ax+by+c=0,$$

atunci ca versor al vectorului director se poate lua vectorul

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b,-a).$$

Dacă $a \neq 0$, putem lua $Q = (-c/a, 0)$. Dacă înlocuim în formula (8.2.55), obţinem

$$\text{Mirror}(\Delta) = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & a^2-b^2 & -2bc \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}. \tag{8.2.56}$$

Aceeaşi formulă se obţine pentru orice alt punct al dreptei.

8.2.7 Forfecarea

Forfecarea este transformarea afină care transformă un pătrat unitate cu un vârf în punctul Q şi de laturi $\mathbf{w}$ şi $\mathbf{w}^{\perp}$ într-un paralelogram înclinând latura $\mathbf{w}^{\perp}$ şi transformând-o în $\mathbf{w}^{\perp}_{\text{new}}$, care face un unghi θ cu $\mathbf{w}^{\perp}$, fără să modifice punctul Q sau vectorul $\mathbf{w}$.

Forma vectorială

Începem, ca de obicei, prin a determina forfecarea aplicată unui vector. Fie, prin urmare, $\mathbf{v}$ un vector oarecare din plan. Tot ca de obicei, îl descompunem în două componente, una paralelă cu vectorul $\mathbf{w}$ şi una perpendiculară pe el sau, mai degrabă, una paralelă cu vectorul $\mathbf{w}^{\perp}$. Atunci, vom avea

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp},$$

unde

$$\mathbf{v}_{\perp} = \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^{\perp}\right)\cdot\mathbf{w}^{\perp} \text{ şi } \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp}.$$

Este clar că $\text{Shear}(\mathbf{w},\theta)(\mathbf{v}_{\parallel}) = \mathbf{v}_{\parallel}$, în timp ce

$$\begin{aligned}\text{Shear}(\mathbf{v},\theta)(\mathbf{v}_{\perp}) &= \text{Shear}(\mathbf{v},\theta)\left(\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^{\perp}\right)\cdot\mathbf{w}^{\perp}\right) = \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^{\perp}\right)\text{Shear}(\mathbf{v},\theta)(\mathbf{w}^{\perp}) = \\ &= \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^{\perp}\right)\left(\operatorname{tg}\theta\cdot\mathbf{w}+\mathbf{w}^{\perp}\right).\end{aligned}$$

Aşadar,

$$\text{Shear}(\mathbf{w},\theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp} + \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^{\perp}\right)\left(\operatorname{tg}\theta\cdot\mathbf{w}+\mathbf{w}^{\perp}\right) = \mathbf{v} + \operatorname{tg}\theta\cdot\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^{\perp}\right)\cdot\mathbf{w}$$

adică

$$\text{Shear}(\mathbf{w},\theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \operatorname{tg}\theta\cdot\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^{\perp}\right)\cdot\mathbf{w}. \tag{8.2.57}$$

Pentru a determina imaginea prin forfecare a unui punct P, folosim, din nou, relaţia $P = Q + P - Q \equiv Q + \overrightarrow{QP}$ şi obţinem, folosind (8.2.57) şi faptul că punctul Q este fix,

$$\text{Shear}(Q,\mathbf{w},\theta) = Q + \overrightarrow{QP} + \operatorname{tg}\theta\left(\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{w}^{\perp}\right)\cdot\mathbf{w}. \tag{8.2.58}$$

Forma matricială

Pentru a determina matricea transformării, mai întâi determinăm forma matricială a transformării vectorilor. Plecăm de la formula (8.2.57) şi obţinem

$$\text{Shear}(\mathbf{w},\theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}\right)\cdot\mathbf{v}$$

sau

$$\text{Shear}(\mathbf{w},\theta)(\mathbf{v}) = \left(I_2 + \operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}\right)\right)\cdot\mathbf{v}, \tag{8.2.59}$$

ceea ce înseamnă că matricea părţii vectoriale a forfecării este

$$\text{Shear}(\mathbf{w},\theta) = I_2 + \operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}\right). \tag{8.2.60}$$

Pentru a obţine matricea omogenă a transformării pentru puncte, combinăm (8.2.58) şi (8.2.60) şi obţinem

$$\operatorname{Shear}(Q,\mathbf{w},\theta)=\begin{pmatrix} I_2+\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}\right) & -\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}\right)\cdot Q\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{8.2.61}$$

Pentru a obţine forma explicită a acestei matrici, remarcăm, înainte de toate, că

$$\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}=\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-w_2 & w_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-w_1w_2 & w_1^2\\ -w_2^2 & w_1w_2\end{pmatrix},$$

prin urmare,

$$I_2+\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}\right)=\begin{pmatrix}1-w_1w_2\operatorname{tg}\theta & w_1^2\operatorname{tg}\theta\\ -w_2^2\operatorname{tg}\theta & 1+w_1w_2\operatorname{tg}\theta\end{pmatrix},$$

iar

$$-\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}\right)\cdot Q=\begin{pmatrix}\left(q_1w_1w_2-q_2w_1^2\right)\operatorname{tg}\theta\\ \left(q_1w_2^2-q_2w_1w_2\right)\operatorname{tg}\theta\end{pmatrix}.$$

Aşadar, în final,

$$\operatorname{Shear}(Q,\mathbf{w},\theta)=\begin{pmatrix}1-w_1w_2\operatorname{tg}\theta & w_1^2\operatorname{tg}\theta & \left(q_1w_1w_2-q_2w_1^2\right)\operatorname{tg}\theta\\ -w_2^2\operatorname{tg}\theta & 1+w_1w_2\operatorname{tg}\theta & \left(q_1w_2^2-q_2w_1w_2\right)\operatorname{tg}\theta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{8.2.62}$$

Exemple

- Dacă punem $\mathbf{w}=\mathbf{i}=(1,0)$, matricea forfecării devine:

$$\operatorname{Shear}(Q,\mathbf{i},\theta)=\begin{pmatrix}1 & \operatorname{tg}\theta & -q_2\operatorname{tg}\theta\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

  În particular, forfecarea în direcţia axei Ox relativ la origine este

$$\operatorname{Shear}(Origine,\mathbf{i},\theta)=\begin{pmatrix}1 & \operatorname{tg}\theta & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

- Forfecarea în direcţia axei Oy este, în schimb,

$$\operatorname{Shear}(Q,\mathbf{j},\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\operatorname{tg}\theta & 1 & q_1\operatorname{tg}\theta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Exemplul 8.2. Vrem să rotim pătratul $ABCD$, de vârfuri $A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$ cu 60° în jurul lui C. Plecând de la formula vectorială, avem

$$\operatorname{Rot}(C,60^\circ)(P)=C+\overrightarrow{CP}\cdot\frac{1}{2}+\overrightarrow{CP}^{\perp}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

sau
$$\{x',y'\} = (x_C,y_C) + \frac{1}{2}\{x-x_C, y-y_C\} + \frac{\sqrt{3}}{2}\{-y+y_C, x-x_C\}$$
sau, încă,
$$\{x',y'\} = \left\{\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}x_C + \frac{\sqrt{3}}{2}y_C, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y_C - \frac{\sqrt{3}}{2}x_C\right\}.$$
Dacă scriem transformarea pe componente, obţinem
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}x_C + \frac{\sqrt{3}}{2}y_C, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y_C - \frac{\sqrt{3}}{2}x_C. \end{cases}$$
Asta e formula pentru o rotaţie de 60° în jurul unui punct oarecare. În cazul nostru concret, obţinem:
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1-\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$
Se constată imediat că originea se duce în $A'\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, B se duce în $B'\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $C' = C$, iar D se duce în $D'\left(\frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$

Probleme

În lista de probleme de mai jos, triunghiul ABC are vârfurile $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(2,3)$. Reprezentaţi, de fiecare dată, pe aceeaşi figură, triunghiul iniţial şi imaginea sa.

Problema 8.1. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de unghi 30° în jurul punctului $Q(2,2)$, urmată de o translaţie de vector $(1,2)$. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Problema 8.2. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare uniformă de factor de scală 2 relativ la punctul $Q(2,2)$.

Problema 8.3. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, de factori de scală $(2,1,2)$, relativ la punctul $Q(2,2)$.

Problema 8.4. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare neuniformă generală, de factor de scală 2, relativ la punctul $Q(2,2)$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1,2)$.

Problema 8.5. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o forfecare de unghi 45°, relativ la punctul $Q(2,2)$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(2,1)$.

Problema 8.6. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta $2x+3y-5=0$.

Problema 8.7. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta AB.

Problema 8.8. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta BC, urmată de o forfecare, de unghi 60°, relativ la punctul A, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1,1)$.

Problema 8.9. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin rotaţia cu 90° în jurul punctului C, urmată de reflexia relativ la dreapta AB.

Problema 8.10. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin scalarea simplă neuniformă de factori $(1,2,1)$ relativ la punctul B, urmată de o rotaţie de 30° în jurul punctului $Q(1,1)$.

CAPITOLUL 9

Transformări geometrice (afine) în spaţiu

În acest capitol ne vom ocupa de variantele tridimensionale ale transformărilor afine descrise în capitolul precedent. Filozofia va fi, în esenţă, aceeaşi: vom stabilim mai întâi, în limba vectorial, regula de transformare a vectorilor, apoi, în acelaşi limbaj, regula de transformare a punctelor, apoi vom deduce matricea transformării. Matricele (omogene) ale transformărilor spaţiului sunt matrici de tip 4×4.

9.1 Translaţia

Din punct de vedere vectorial, dacă nu folosim coordonate, nu există nici o diferenţă între translaţia în spaţiu şi translaţia în plan. De aceea, nu vom mai repeta raţionamentul din cazul plan, atunci când vorbim despre forma vectorială a transformării.

9.1.1 Forma vectorială

Fie $\mathbf{w}$ un vector constant. Atunci translaţia de vector $\mathbf{w}$ acţionează pe vectori astfel:

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}, \tag{9.1.1}$$

adică se reduce la transformarea identică. În cazul punctelor, avem

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{w})(P) = P + \mathbf{w}. \tag{9.1.2}$$

9.1.2 Forma matricială

Ecuaţia (9.1.2) se transcrie matricial ca

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{w})(P) = I_3 \cdot P + \mathbf{w},$$

de unde rezultă matricea omogenă a transformării:

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} I_3 & \mathbf{w} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.1.3}$$

sau, în forma extinsă,

$$\mathrm{Trans}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.1.4}$$

9.2 Rotaţia în jurul unei axe

Fie Q un punct din spaţiu şi $\mathbf{u}$ un versor. Vrem să determinăm expresia pentru rotaţia de unghi θ unui punct oarecare în jurul axei Δ determinate de punctul Q şi versorul $\mathbf{u}$.

9.2.1 Forma vectorială

Ca de obicei, vom stabili mai întâi formula de transformare pentru vectori. Fie $\mathbf{v}$ un vector oarecare. Folosind o tehnică ce am mai utilizat-o, descompunem vectorul ca

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp}, \tag{9.2.1}$$

unde $\mathbf{v}_{\|}$ este componenta lui $\mathbf{v}$ paralelă cu $\mathbf{u}$, în timp ce $\mathbf{v}_{\perp}$ este componenta perpendiculară pe $\mathbf{u}$.

Dacă aplicăm rotaţia vectorului $\mathbf{v}$, componenta $\mathbf{v}_{\|}$ rămâne nemodificată, deci putem să ne concentrăm asupra componente $\mathbf{v}_{\perp}$. Această componentă poate fi fixată într-un plan perpendicular pe $\mathbf{u}$, iar prin rotaţie, ea rămâne în acest plan. Prin urmare, rotaţia 3D a vectorului $\mathbf{v}$ în jurul axei Δ se reduce la o rotaţie plană a vectorului $\mathbf{v}_{\perp}$.

Ne aducem aminte de formula pentru rotaţia de unghi θ a unui vector $\mathbf{w}$ situat într-un plan:

$$\mathbf{w}' = \cos\theta \mathbf{w} + \sin\theta \mathbf{w}^{\perp}.$$

Vectorul $\mathbf{w}^{\perp}$ este rotitul cu 90° al vectorului $\mathbf{w}$. E suficient, prin urmare, să identificăm rotitul cu 90° al vectorului $\mathbf{v}_{\perp}$, în planul perpendicular pe $\mathbf{u}$ pe care l-am considerat. E uşor de constatat că acest vector este $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\perp}$. Într-adevăr, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\perp}$ este perpendicular atât pe $\mathbf{u}$, cât şi pe $\mathbf{v}_{\perp}$, deci e situat în planul corespunzător. Cum $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}_{\perp}$ sunt perpendiculari, unghiul dintre ei este 90°, iar, $\mathbf{u}$ fiind un versor, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\perp}\| = \|\mathbf{v}_{\perp}\|$, ceea ce înseamnă că $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\perp}$ este, într-adevăr, rotitul cu 90° al lui $\mathbf{v}_{\perp}$.

Prin urmare,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_{\perp}) = \cos\theta \cdot \mathbf{v}_{\perp} + \sin\theta \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\perp}),$$

iar

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\|} + \cos\theta \cdot \mathbf{v}_{\perp} + \sin\theta \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\perp}),$$

Pe de altă parte,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{\|} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \\ \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}. \end{cases}$$

Aşadar,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} + \cos\theta\cdot(\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}) + \sin\theta\cdot[\mathbf{u}\times(\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u})]$$

sau

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = \cos\theta\cdot\mathbf{v} + (1-\cos\theta)\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} + \sin\theta\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}), \tag{9.2.2}$$

unde am folosit faptul că $\mathbf{u}\times\mathbf{u} = 0$.

Fie, acum, P un punct oarecare din spaţiu. Ca de obicei, scriem $P = Q + (P-Q) = Q + \overrightarrow{QP}$. Atunci

$$\mathrm{Rot}(Q,\mathbf{u},\theta)(P) = Q + \mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\overrightarrow{QP}), \tag{9.2.3}$$

de unde, folosind (9.2.2), obţinem

$$\mathrm{Rot}(Q,\mathbf{u},\theta)(P) = Q + \cos\theta\cdot\overrightarrow{QP} + (1-\cos\theta)\cdot(\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} + \sin\theta\cdot(\mathbf{u}\times\overrightarrow{QP}). \tag{9.2.4}$$

Formula (9.2.4) se numeşte *formula lui Rodrigues*, după numele matematicianului francez care a descoperit-o.

9.2.2 Forma matricială

Plecăm de la formula (9.2.2), pe care vrem să o scriem matricial. Singura parte care ne poate crea probleme este produsul vectorial $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Pentru un vector $\mathbf{u}$ fixat, definim operatorul liniar de matrice

$$\mathbf{u}\times - = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.2.5}$$

Un calcul simplu ne arată acum că

$$(\mathbf{u}\times -)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}. \tag{9.2.6}$$

Cu acest artificiu, obţinem

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = [\cos\theta\cdot I_3 + (1-\cos\theta)(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \sin\theta\cdot(\mathbf{u}\times -)]\cdot\mathbf{v},$$

de unde rezultă că matricea rotaţiei vectorilor este

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta) = \cos\theta\cdot I_3 + (1-\cos\theta)(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \sin\theta\cdot(\mathbf{u}\times -). \tag{9.2.7}$$

Din formula (9.2.3) rezultă acum că

$$\mathrm{Rot}(Q,\mathbf{u},\theta)(P) = \mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)\cdot\mathbf{P} + (I_3 - \mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta))\cdot\mathbf{Q}. \tag{9.2.8}$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotaţiei este

$$\mathrm{Rot}(Q,\mathbf{u},\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta) & (I_3 - \mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta))\cdot\mathbf{Q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.2.9}$$

Exemple. 1) O rotaţie relativ la origine va avea matricea

$$\mathrm{Rot}(\mathit{Origine},\mathbf{u},\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Rotaţia relativ la origine în jurul axei Ox este similară cu ceea ce se întîmplă în plan. Mai precis, în acest caz avem, înainte de toate,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{i},\theta) = \cos\theta\cdot I_3 + (1-\cos\theta)(\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}) + \sin\theta\cdot(\mathbf{i}\times -). \tag{9.2.10}$$

Dar

$$\mathbf{i}\otimes\mathbf{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{i}\times - = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

deci formula (9.2.10) se transformă în

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{i},\theta) = \cos\theta\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} + (1-\cos\theta)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \sin\theta\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\theta & -\sin\theta\\0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotaţiei de unghi θ relativ la origine, în jurul axei Ox este:

$$\mathrm{Rot}(Origine,\mathbf{i},\theta) = \begin{pmatrix}\mathrm{Rot}(\mathbf{i},\theta) & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{9.2.11}$$

3) **Rotaţia relativ la origine în jurul axei *Oy*.** Avem, mai întâi,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{j},\theta) = \cos\theta\cdot I_3 + (1-\cos\theta)(\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}) + \sin\theta\cdot(\mathbf{j}\times -). \tag{9.2.12}$$

Dar

$$\mathbf{j}\otimes\mathbf{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{j}\times - = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

deci formula (9.2.12) se transformă în

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{j},\theta) = \cos\theta\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} + (1-\cos\theta)\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \sin\theta\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\0 & 1 & 0\\-\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotaţiei de unghi θ relativ la origine, în jurul axei Oy este:

$$\mathrm{Rot}(Origine,\mathbf{j},\theta) = \begin{pmatrix}\mathrm{Rot}(\mathbf{j},\theta) & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\-\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{9.2.13}$$

4) **Rotaţia relativ la origine în jurul axei Oz.** Avem, mai întâi,

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{k},\theta)=\cos\theta\cdot I_3+(1-\cos\theta)(\mathbf{k}\otimes\mathbf{k})+\sin\theta\cdot(\mathbf{k}\times -). \tag{9.2.14}$$

Dar

$$\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{k}\times -=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

deci formula (9.2.14) se transformă în

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{j},\theta)=\cos\theta\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(1-\cos\theta)\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\sin\theta\cdot\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotaţiei de unghi θ relativ la origine, în jurul axei Oz este:

$$\mathrm{Rot}(Origine,\mathbf{k},\theta)=\begin{pmatrix}\mathrm{Rot}(\mathbf{k},\theta)&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0&0\\\sin\theta&\cos\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \tag{9.2.15}$$

9.3 Scalarea simplă uniformă

Ne interesează scalarea de factor s, relativ la punctul Q.

9.3.1 Forma vectorială

Scalarea vectorilor se face foarte simplu:

$$\mathrm{Scale}(s)(\mathbf{v})=s\cdot\mathbf{v}. \tag{9.3.1}$$

Cum, dacă P este un punct arbitrar din spaţiu, $P=Q+(Q-P)=Q+\overrightarrow{QP}$, avem

$$\mathrm{Scale}(Q,s)(P)=Q+\mathrm{Scale}(s)(\overrightarrow{QP}),$$

adică

$$\mathrm{Scale}(Q,s)=Q+s\cdot\overrightarrow{QP}. \tag{9.3.2}$$

9.3.2 Forma matricială

Determinăm, mai întâi, ca de obicei, forma matricială a scalării vectrilor şi obţinem, din (9.3.1),

$$\mathrm{Scale}(s)(v) = s \cdot I_3 \cdot \mathbf{v}.$$

Prin urmare, matricea scalării uniforme a vectorilor, de factor s, este

$$\mathrm{Scale}(s) = s \cdot I_3. \tag{9.3.3}$$

Prin urmare,

$$\mathrm{Scale}(Q,s)(P) = Q + \mathrm{Scale}(s) \cdot (P - Q)$$

sau

$$\mathrm{Scale}(Q,s)(P) = \mathrm{Scale}(s) \cdot P + (I_3 - \mathrm{Scale}(s)) \cdot Q = s \cdot I_3 \cdot P + (1-s) \cdot I_3 \cdot Q. \tag{9.3.4}$$

Aşadar, matricea omogenă a scalării simple uniforme relativ la punctul Q, de factor s, este

$$\mathrm{Scale}(Q,s) = \begin{pmatrix} s \cdot I_3 & (1-s) \cdot I_3 \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.3.5}$$

sau, explicit,

$$\mathrm{Scale}(Q,s) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & (1-s) \cdot q_x \\ 0 & s & 0 & (1-s) \cdot q_y \\ 0 & 0 & s & (1-s) \cdot q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.3.6}$$

9.4 Scalarea simplă neuniformă

Considerăm o scalare de factori s_x, s_y, s_z de-a lungul axelor de coordonate, relativ la un punct Q.

9.4.1 Forma vectorială

Fie $\mathbf{v}$ un vector din spaţiu. Atunci el se poate scrie

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z,$$

unde $\mathbf{v}_x = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{v}_y = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_z = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}$. Atunci,

$$\mathrm{Scale}(s_x,s_y,s_z)(\mathbf{v}) = \mathrm{Scale}(s_x,s_y,s_z)(\mathbf{v}_x) + \mathrm{Scale}(s_x,s_y,s_z)(\mathbf{v}_y) + \mathrm{Scale}(s_x,s_y,s_z)(\mathbf{v}_z),$$

adică

$$\mathrm{Scale}(s_x,s_y,s_z)(\mathbf{v}) = s_x \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} + s_z \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}. \tag{9.4.1}$$

Dacă P e un punct,

$$\mathrm{Scale}(Q,s_x,s_y,s_z)(P) = \mathrm{Scale}(Q,s_x,s_y,s_z)(Q + \overrightarrow{QP}),$$

adică

$$\mathrm{Scale}(Q,s_x,s_y,s_z)(P) = Q + s_x \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} + s_z \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}. \tag{9.4.2}$$

Forma matricială

Din (9.4.1) obţinem forma matricială a transformării vectorilor

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}) = s_x\,(\mathbf{i}\otimes\mathbf{i})\cdot\mathbf{v} + s_y\,(\mathbf{j}\otimes\mathbf{j})\cdot\mathbf{v} + s_z\,(\mathbf{k}\otimes\mathbf{k})\cdot\mathbf{v},$$

de unde rezultă matricea transformării:

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z) = s_x\,(\mathbf{i}\otimes\mathbf{i}) + s_y\,(\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}) + s_z\,(\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}). \tag{9.4.3}$$

După cum am văzut mai devreme,

$$\mathbf{i}\otimes\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}\otimes\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}\otimes\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci formula (9.4.3) se poate rescrie ca

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}. \tag{9.4.4}$$

Ca să găsim matricea transformării punctelor, scriem $P = Q + (P - Q)$, deci

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(P) = Q + \text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(P - Q)$$

sau

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z)(P) = \text{Scale}(s_x, s_y, s_z)\cdot P + (I_3 - \text{Scale}(s_x, s_y, s_z))\cdot Q, \tag{9.4.5}$$

prin urmare, matricea transformării va fi

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} \text{Scale}(s_x, s_y, s_z) & (I_3 - \text{Scale}(s_x, s_y, s_z))\cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.4.6}$$

sau, în forma completă,

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & (1 - s_x)\cdot q_x \\ 0 & s_y & 0 & (1 - s_y)\cdot q_y \\ 0 & 0 & s_z & (1 - s_z)\cdot q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.4.7}$$

9.5 Scalarea neuniformă generală (Goldman)

Suntem interesaţi de scalarea generală de factor s, în direcţia versorului $\mathbf{w}$, relativ la punctul Q.

9.5.1 Forma vectorială

Fie $\mathbf{v}$ un vector oarecare din spaţiu. Vom descompune acest vector după două direcţii, una paralelă cu versorul $\mathbf{w}$ şi una perpendiculară pe el:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}. \tag{9.5.1}$$

Este uşor de constatat că

$$\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}, \tag{9.5.2}$$

de unde, desigur,

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \tag{9.5.3}$$

Prin urmare,

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\parallel}) + \mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\perp}). \tag{9.5.4}$$

Cum scalarea se produce paralel cu vectorul $\mathbf{w}$, avem, evident

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\parallel}) = s\mathbf{v}_{\parallel}. \tag{9.5.5}$$

Pe de altă parte, nici o scalare nu are loc în direcţia perpendiculară la $\mathbf{w}$, deci

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\perp}. \tag{9.5.6}$$

Prin urmare,

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = s\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$$

sau, dacă ţinem cont de definiţiile lui $\mathbf{v}_{\parallel}$ şi $\mathbf{v}_{\perp}$,

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (s-1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \tag{9.5.7}$$

Pentru a determina imaginea unui punct P, ţinem cont de faptul că $P = Q + \overrightarrow{QP}$, deci

$$\mathrm{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s)(\overrightarrow{QP})$$

sau

$$\mathrm{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \overrightarrow{QP} + (s-1)(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \tag{9.5.8}$$

9.5.2 Forma matricială

Începem prin a determina forma matricială a transformării pentru vectori. Avem

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (s-1)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v},$$

deci matricea pentru transformarea vectorilor este

$$\mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s) = I_3 + (s-1)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}). \tag{9.5.9}$$

Pe de altă parte, cum $P = Q + (P - Q)$,

$$\mathrm{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s) \cdot (P - Q) = \mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s) \cdot P + (I_3 - \mathrm{Scale}(\mathbf{w}, s)) \cdot Q$$

sau

$$\mathrm{Scale}(Q,\mathbf{w},s)(P) = \mathrm{Scale}(\mathbf{w},s)\cdot P + (1-s)(\mathbf{w}\otimes\mathbf{w})\cdot Q. \tag{9.5.10}$$

Prin urmare, matricea omogenă a transformării este

$$\mathrm{Scale}(Q,\mathbf{w},s) = \begin{pmatrix} I_3 + (s-1)(\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}) & (1-s)(\mathbf{w}\otimes\mathbf{w})\cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.5.11}$$

sau, în formă extinsă,

$$\mathrm{Scale}(Q,\mathbf{w},s) = \\ = \begin{pmatrix} 1+(s-1)w_1^2 & (s-1)w_1w_2 & (s-1)w_1w_3 & (1-s)(q_1w_1^2+q_2w_1w_2+q_3w_1w_3) \\ (s-1)w_1w_2 & 1+(s-1)w_2^2 & (s-1)w_2w_3 & (1-s)(q_1w_1w_2+q_2w_2^2+q_3w_2w_3) \\ (s-1)w_1w_3 & (s-1)w_2w_3 & 1+(s-1)w_3^2 & (1-s)(q_1w_1w_3+q_2w_2w_3+q_3w_3^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.5.12}$$

Exemplul 9.1. Dacă Q este originea, iar $\mathbf{w}=\mathbf{i}$, adică scalarea generală se face de-a lungul axei Ox, atunci matricea de transformare se transformă în

$$\mathrm{Scale}(Origine,\mathbf{i},s) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Scale}(Origine,s,1,1),$$

adică scalarea se reduce la o scalare simplă neomogenă, de-a lungul axei Ox.

9.6 Reflexia faţă de un plan

Reflexia faţă de un plan, în spaţiu, este perfect analogă cu reflexia faţă de o dreaptă în plan şi modalitateatea de a obţine expresia ei este similară. De data asta datele sunt: un punct Q şi un plan Π care trece prin el, descris prin intermediul versorului planului normal, $\mathbf{n}$.

9.6.1 Forma vectorială

Fie $\mathbf{v}$ un vector oarecare din spaţiu. Descompunem vectorul

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}, \tag{9.6.1}$$

unde $\mathbf{v}_{\parallel}$ este un vector paralel vectorul $\mathbf{n}$ (adică perpendicular pe planul Π), în timp ce vectorul $\mathbf{v}_{\perp}$ este perpendicular pe vectorul $\mathbf{n}$ (adică este paralel cu planul Π).

Reflexia faţă de planul Π a vectorului $\mathbf{v}_{\perp}$ coincide, evident, cu vectorul însuşi:

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\perp}.$$

Prin urmare, trebuie să de preocupăm doar de cealaltă componentă, perpendiculară pe plan. Dar, iarăşi în mode evident,

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}_{\parallel}) = -\mathbf{v}_{\parallel}.$$

Ca urmare,

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_\perp - \mathbf{v}_\parallel.$$

Dar

$$\mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{n},\ \mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel,$$

deci, în final,

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}. \tag{9.6.2}$$

Fie, acum, P un punct din spaţiu. Atunci $P = Q + \overrightarrow{QP}$, deci

$$\mathrm{Mirror}(Q,\mathbf{n})(P) = Q + \mathrm{Mirror}(\mathbf{n})\left(\overrightarrow{QP}\right)$$

sau

$$\mathrm{Mirror}(Q,\mathbf{n})(P) = Q + \overrightarrow{QP} - 2\left(\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{n}\right)\cdot\mathbf{n}. \tag{9.6.3}$$

9.6.2 Forma matricială

Scriem, mai întâi, matricial transformarea pentru vectori. Relaţia (9.6.2) se transformă, după cum se poate constata uşor, în

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot\mathbf{v},$$

prin urmare, matricea transformării vectorilor este

$$\mathrm{Mirror}(\mathbf{n}) = I_3 - 2(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}). \tag{9.6.4}$$

Pentru a găsi matricea omogenă a transformării pentru puncte, scriem $P = Q + (P - Q)$ şi obţinem

$$\mathrm{Mirror}(Q,\mathbf{n})(P) = Q + (P-Q) - 2(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot(P-Q)$$

sau

$$\mathrm{Mirror}(Q,\mathbf{n})(P) = (I_3 - 2(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}))\cdot P + 2(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot Q.$$

Aşadar, matricea omogenă a reflexiei faţă de planul Π este:

$$\mathrm{Mirror}(Q,\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} I_3 - 2(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) & 2(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.6.5}$$

sau, în forma extinsă,

$$\mathrm{Mirror}(Q,\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 1-2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 & 2(n_1n_3q_3 + n_1n_2q_2 + n_1^2q_1) \\ -2n_1n_2 & 1-2n_2^2 & -2n_2n_3 & 2(n_2n_3q_3 + n_2^2q_2 + n_1n_2q_1) \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1-2n_3^2 & 2(n_3^2q_3 + n_2n_3q_2 + n_1n_3q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.6.6}$$

Exemple. 1. **Simetria faţă de planul xOy.** În acest caz, $Q = O(0,0,0), \mathbf{n} = \mathbf{k}$ şi obţinem:

$$R_{xy} = \mathrm{Mirror}(O,\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.6.7}$$

2. **Simetria faţă de planul** xOz**.** De data aceasta, $Q = O(0,0,0), \mathbf{n} = \mathbf{j}$ şi obţinem:

$$R_{xz} = \text{Mirror}(O, \mathbf{j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.6.8}$$

3. **Simetria faţă de planul** yOz**.** Acum, $Q = O(0,0,0), \mathbf{n} = \mathbf{i}$ şi obţinem:

$$R_{yz} = \text{Mirror}(O, \mathbf{i}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.6.9}$$

9.6.3 Cazul în care planul este dat sub forma generală

Să presupunem că ecuaţia planului este

$$\Pi: \; ax + by + cz + d = 0.$$

Să presupunem, pentru fixarea ideilor, că $a \neq 0$. Atunci planul Π este planul care are ca vector normal

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c),$$

şi putem lua

$$Q = (-d/a, 0, 0).$$

Dacă înlocuim în formula (9.6.6), obţinem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n}) = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \begin{pmatrix} -a^2+b^2+c^2 & -2ab & -2ac & -2ad \\ -2ab & a^2-b^2+c^2 & -2bc & -2bd \\ -2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2 & -2cd \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix}. \tag{9.6.10}$$

9.7 Forfecarea în spaţiu

Fie Π un plan în spaţiu, $Q \in \Pi$ un punct dat, $\mathbf{u}$ – un versor paralel cu planul Π şi θ un unghi. Dacă P este un punct oarecare din spaţiu, îl proiectăm ortogonal pe planul Π într-un punct $P' \in S$. Acum mutăm punctul P paralel cu vectorul $\mathbf{u}$ într-un punct P^{new}, astfel încât $\angle P^{\text{new}} P' P = \theta$. Vom spune că punctul P^{new} a fost obţinut din punctul P printr-o *forfecare paralelă cu planul* Π*, relativ la punctul* Q*, în direcţia versorului* $\mathbf{u}$*, de unghi* θ. Vom scrie

$$P^{\text{new}} = \text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P),$$

unde $\mathbf{n}$ este versorul normal la planul Π (prin urmare, Q şi $\mathbf{n}$ determină în mod unic planul Π).

9.7.1 Forma vectorială

Fie $\mathbf{v}$ un vector oarecare din $\mathbb{R}^3$. Îl descompunem ca

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp},$$

unde $\mathbf{v}_{\parallel}$ este un vector paralel cu $\mathbf{u}$, în timp ce $\mathbf{v}_{\perp}$ este un vector perpendicular pe $\mathbf{u}$, adică un vector paralel cu vectorul normal $\mathbf{n}$. Atunci

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}_{\parallel}) + \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}_{\perp}).$$

Un raţionament simplu ne arată că

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)\left((\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\right) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)\,(\mathbf{n}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,(\mathbf{n}+\mathrm{tg}\,\theta\cdot\mathbf{u}).$$

Pe de altă parte,

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}.$$

Prin urmare,

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathrm{tg}\,\theta\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{u}. \tag{9.7.1}$$

Dacă vrem să determinăm forma transformării pentru un punct P, scriem

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(P) = Q + \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\overrightarrow{QP})$$

sau

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(P) = Q + \overrightarrow{QP} + \mathrm{tg}\,\theta\cdot(\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{u}. \tag{9.7.2}$$

9.7.2 Forma matricială

Pentru forma matricială a transformării pe vectori deducem imediat, cum am mai făcut-o înainte, că

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathrm{tg}\,\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$$

sau

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(\mathbf{v}) = (I_3 + \mathrm{tg}\,\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}))\cdot\mathbf{v}, \tag{9.7.3}$$

ceea ce înseamnă că matricea părţii vectoriale a forfecării este

$$\mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta) = I_3 + \mathrm{tg}\,\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}). \tag{9.7.4}$$

Pentru a determina matricea omogenă de transformare a punctelor, plecăm de la relaţia

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(P) = Q + \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)\cdot(P-Q) = \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)\cdot P + (I_3 - \mathrm{Shear}(\mathbf{n},\mathbf{u},\theta))\cdot Q$$

sau, dacă explicităm,

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)(P) = (I_3 + \mathrm{tg}\,\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}))\cdot P - \mathrm{tg}\,\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\cdot Q. \tag{9.7.5}$$

De aici desucem că matricea omogenă a forfecării este

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)=\begin{pmatrix} I_3+\mathrm{tg}\,\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}) & -\mathrm{tg}\,\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\cdot Q\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{9.7.6}$$

Matricea extinsă este

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta)=$$
$$=\begin{pmatrix} 1+n_1u_1\,\mathrm{tg}\,\theta & n_2u_1\,\mathrm{tg}\,\theta & n_3u_1\,\mathrm{tg}\,\theta & -\mathrm{tg}\,\theta(n_3u_1q_3+n_2u_1q_2+n_1u_1q_1)\\ n_1u_2\,\mathrm{tg}\,\theta & 1+n_2u_2\,\mathrm{tg}\,\theta & n_3u_2\,\mathrm{tg}\,\theta & -\mathrm{tg}\,\theta(n_3u_2q_3+n_2u_2q_2+n_1u_2q_1)\\ n_1u_3\,\mathrm{tg}\,\theta & n_2u_3\,\mathrm{tg}\,\theta & 1+n_3u_3\,\mathrm{tg}\,\theta & -\mathrm{tg}\,\theta(n_3u_3q_3+n_2u_3q_2+n_1u_3q_1)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{9.7.7}$$

În particular, forfecarea de-a lungul axei Ox, paralel cu planul xOy este dată de matricea

$$\mathrm{Shear}(O,\mathbf{k},\mathbf{i},\theta)=\begin{pmatrix}1&0&\mathrm{tg}\,\theta&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Forfecarea de-a lungul axei Oy, paralel cu planul xOy este dată de matricea

$$\mathrm{Shear}(O,\mathbf{k},\mathbf{j},\theta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&\mathrm{tg}\,\theta&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Probleme

În această secţiune, ABC este triunghiul de vârfuri $A(1,2,2)$, $B(2,4,3)$, $C(4,3,2)$.

Problema 9.1. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de 45° în jurul dreptei care trece prin punctele $P(2,2,1)$ şi $Q(1,1,1)$.

Problema 9.2. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de 30° în jurul dreptei

$$(\Delta):\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{2}.$$

Problema 9.3. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de 60° în jurul dreptei

$$(\Delta):\ \begin{cases}x-y+z-1=0,\\ 2x+y=0.\end{cases}$$

Problema 9.4. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, relativ la punctul $Q(2,5,3)$, de factori de scală $(2,1,3)$.

Problema 9.5. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare neuniformă generală, relativ la punctul $Q(2,5,3)$, de factor de scală $s = 1$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1,3,2)$.

Problema 9.6. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia faţă de planul $x - y + 2z - 1 = 0$.

Problema 9.7. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia faţă de planul care trece prin punctele $O(0,0,0), P(1,1,1), Q(1,3,2)$.

Problema 9.8. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin forfecarea de unghi $30°$, relativ la planul $x - y - z - 1 = 0$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1,1,0)$.

Problema 9.9. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin forfecarea de unghi $30°$, relativ la planul care trece prin punctele $O(0,0,0), P(1,1,1), Q(1,3,2)$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1,-1,0)$.

Bibliografie

[1] Anand, V.B., *Computer Graphics and Geometric Modeling for Engineers*, John Wiley & Sons, 1993

[2] Andrica, D., Ţopan, L., *Analytical Geometry*, Cluj University Press, 2005

[3] Blaga, P.A., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Risoprint, 2005

[4] Boehm, W., Prautzsch, H., *Geometric Foundations of Geometric Design*, AK Peters, 1992

[5] Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, 4th edition, Academic Press, 1997

[6] Fenn, R., *Geometry*, Springer, 2001

[7] Foley, J.D., van Dam, A., Feiner, S.K., Hughes, J.F., *Computer Graphics – Principles and Practice*, 2nd edition, Addison-Wesley, 1990

[8] Gallier, J., *Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering*, Springer, 2000

[9] Hoggar, S.G., *Mathematics for Computer Graphics*, Cambridge University Press, 1992

[10] Mortenson, M., *Geometric Modeling*, Wiley, 1985

[11] Mortenson, M., *Computer Graphics – An Introduction to the Mathematics and Geometry*, Industrial Press Inc., 1989

[12] Plastock, R.A., Kalley, G., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Computer Graphics*, McGraw-Hill Publishing Company, 1986

[13] Rogers, D.F., Adams, J.A., *Mathematical Elements for Computer Graphics*, 2nd edition, McGraw Hill, 1990

[14] Salomon, D., *Curves and Surfaces for Computer Graphics*, Springer, 2006

[15] Salomon, D., *Transformations and Projections in Computer Graphics*, Springer, 2006

[16] Schneider, P.J., Eberly, D.H., *Geometric Tools for Computer Graphics*, Elsevier, Morgan Kaufmann Publishers, 2003

[17] Sharma, A.K., *Encyclopedia of Analytical Geometry*, vol. 1–3, Dominant Publishers and Distributors, New Delhi, 2001

[18] Snyder, V., Sisam, C.H., *Analytic Geometry of Space*, Henry Holt and Company, 1914

[19] Taylor, W.T., *The Geometry of Computer Graphics*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1992