Aplicații ale numerelor complexe în geometrie, utilizând Geogebra

"Mathematics consists in proving the most obvious thing in the least obvious way." George Polya

Autor: **Diana-Florina Haliță**
diana.halita@gmail.com

Instituția: *Universitatea "Babeș-Bolyai" Cluj-Napoca*
Facultatea de Matematică și Informatică
Specializarea Matematică Didactică

Coordonator științific: *Conf. dr. Vălcan Dumitru*

13 iunie 2014

Cuprinsul prezentării

Introducere

SCOP: *Extinderea ariei de cunoaștere a elevilor în legătură cu numerele complexe, și formarea priceperilor și deprinderilor în rezolvarea unor probleme de geometrie cu ajutorul numerelor complexe.*

PAȘI:

1. *Reamintirea cunoștiințelor legate de numerele complexe.*
2. *Prezentarea proprietăților principale ale numerelor complexe*
3. *Definirea cu ajutorul numerelor complexe a câtorva termeni din geometrie.*
4. *Prezentarea unor aplicații, exerciții și probleme propuse pentru teme individuale și pe grupe*
5. *Evaluarea cunoștiințelor acumulate de studenți.*

Afixul unui punct care împarte un segment într-un raport dat

TEOREMĂ

1. $A(a), B(b), M(z),\ M \in [AB]$ a.î. $\dfrac{AM}{MB} = k > 0.$
   Atunci $z = \dfrac{1}{k+1} \cdot a + \dfrac{k}{k+1} \cdot b.$
2. $A(a), B(b), M(z),\ B \in [AM]$ a.î. $\dfrac{AM}{MB} = k < 0.$
   Atunci $z = \dfrac{1}{k+1} \cdot a + \dfrac{k}{k+1} \cdot b.$
3. $A(a), B(b), M(z),\ A \in [MB]$ a.î. $\dfrac{AM}{MB} = k < 0.$
   Atunci $z = \dfrac{1}{k+1} \cdot a + \dfrac{k}{k+1} \cdot b.$

Condiții de coliniaritate, perpendicularitate și conciclicitate

TEOREMĂ

1. $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ *sunt coliniare* $\Leftrightarrow \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$.
2. $M_1M_2 \perp M_3M_4 \Leftrightarrow \dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i \cdot \mathbb{R}^*$.
3. *Biraportul a patru numere complexe:* $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$
4. $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$ *sunt coliniare sau conciclice* $\Leftrightarrow (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^*$.

Triunghiuri asemenea

TEOREMĂ

Fie $A_1(a_1), A_2(a_2), A_3(a_3), B_1(b_1), B_2(b_2), B_3(b_3)$.*Se dau triunghiurile* $A_1A_2A_3$ *și* $B_1B_2B_3$ *la fel orientate. U.a.s.e:*

1. $A_1A_2A_3 \sim B_1B_2B_3$
2. $$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$$
3. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Triunghiuri asemenea

TEOREMĂ *Fie $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$. U.a.s.e:*

1 *triunghiul $M_1M_2M_3$ este echilateral*

2 $z_1 \cdot \varepsilon + z_2 \cdot \varepsilon^2 + z_3 = 0$;

3 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

4 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1$.

5 $$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_3}.$$

6 $$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3} = 0,\ \textit{unde}\ z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

7 $(z_1 + \varepsilon \cdot z_2 + \varepsilon^2 \cdot z_3) \cdot (z_1 + \varepsilon^2 \cdot z_2 + \varepsilon \cdot z_3) = 0$,

Ecuația dreptei și a cercului

TEOREMĂ

1. *Ecuația generală a unei drepte în plan este:*
$\bar{a} \cdot \bar{z} + a \cdot z + b = 0, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{R}, z = x + i \cdot y.$
Pentru $a \neq \bar{a}$ *panta dreptei este egală cu* $\dfrac{a + \bar{a}}{a - \bar{a}} \cdot i.$

2. *Condiții de* $\parallel, \perp, \times$ *pentru dreptele:*
$d_1 : \bar{a}_1 \cdot \bar{z}_1 + a_1 \cdot z_1 + b_1 = 0$ *și*
$d_2 : \bar{a}_2 \cdot \bar{z}_2 + a_2 \cdot z_2 + b_2 = 0$, $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0.$
   - $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \dfrac{\bar{a}_1}{a_1} = \dfrac{\bar{a}_2}{a_2}$
   - $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \dfrac{\bar{a}_1}{a_1} + \dfrac{\bar{a}_2}{a_2} = 0$
   - d_1, d_2 *sunt concurente* $\Leftrightarrow \dfrac{\bar{a}_1}{a_1} \neq \dfrac{\bar{a}_2}{a_2}$

Ecuația dreptei și a cercului

TEOREMĂ

3 *Ecuația unei drepte în plan determinată de două puncte având afixele* z_1 *și* z_2 *este:* $\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0.$

4 *Condiția de coliniaritate a trei puncte având afixele* z_1, z_2, z_3 *se justifică repede ca fiind echivalentă cu:*
$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5 *Ecuația unei drepte care trece prin punctul de afix* z_0 *paralelă cu dreapta:* $d : \bar{a} \cdot \bar{z} + a \cdot z + b = 0$ *este*
$$z - z_0 = -\frac{\bar{a}}{a} \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0).$$

Ecuația dreptei și a cercului

TEOREMĂ

6 *Ecuația dreptei date prin punctul de afix* z_0 *care este perpendiculară pe dreapta* $d : \bar{a} \cdot \bar{z} + a \cdot z + b = 0$ *este* $\overline{d} : z - z_0 = \frac{\bar{a}}{a} \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0)$.

7 *Afixul piciorului perpendicularei din punctul de afix* z_0 *pe dreapta* $d : \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$ *este* $z = \frac{\alpha \cdot z_0 - \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 - \beta}{2 \cdot \alpha}$.

8 *Distanța de la un punct de afix* z_0 *la o dreaptă* $d : \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0, \alpha \neq 0$ *este:* $D = |\frac{\alpha \cdot z_0 + \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + \beta}{2 \cdot \sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha}}}|$

Ecuația dreptei și a cercului

TEOREMĂ

9 *Aria triunghiului determinat de trei puncte de afixe z_1, z_2, z_3 este:*

$$A = |\Delta|, \Delta = \frac{i}{4} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

10 *Ecuația unui cerc în plan este:*
$z \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \beta = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}, z = x + y \cdot i$.

Produsul real a două numere complexe

DEFINIȚIE

- *Se numește produs real al numerelor complexe a,b, numărul:* $a \odot b = \frac{1}{2} \cdot (\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b})$.

TEOREMĂ

1. *Dacă* $A(a), B(b)$ *sunt puncte distincte și diferite de* $O(0)$ *atunci* $a \odot b = 0 \Leftrightarrow OA \perp OB$.
2. *Numărul* $a \odot b$ *este egal cu valoarea absolută a puterii originii* $O(0)$ *față de cercul de diametru* AB, *unde A(a),B(b) și a,b numere complexe distincte nenule.*
3. *Fie A(a),B(b),C(c),D(d) puncte distincte. U.a.s.e.:*
   - $AB \perp CD$
   - $(b-a) \odot (d-c) = 0$
   - $\frac{b-a}{d-c} \in i \cdot \mathbb{R}^*$

Produsul complex a două numere complexe

DEFINIȚIE

- *Se numește produs complex al numerelor complexe,nenule și distincte a,b, numărul:*
  $a \otimes b = \frac{1}{2} \cdot (\bar{a} \cdot b - a \cdot \bar{b}).$

TEOREMĂ

1. *Dacă $A(a), B(b)$ sunt puncte distincte și diferite de $O(0)$ atunci $a \otimes b = 0 \Leftrightarrow O, A, B$ coliniare.*
2. $$a \otimes b = \begin{cases} 2 \cdot i \cdot A_{\Delta OAB} & , OAB \text{ e direct orientat} \\ -2 \cdot i \cdot A_{\Delta OAB} & , OAB \text{ e invers orientat} \end{cases}$$
3. $A_{\Delta ABC} = \pm \frac{1}{2 \cdot i} \cdot (a \otimes b + b \otimes c + c \otimes a)$
4. *Fie $A(a), B(b), C(c)$ puncte distincte. U.a.s.e.:*
   - *A,B,C coliniare*
   - $(b - a) \otimes (c - a) = 0$
   - $a \otimes b + b \otimes c + c \otimes a = 0$

Transformări geometrice

DEFINIȚIE

1. **Translația**

   Fie $b \in \mathbb{C}$. z se translatează cu vectorul b în $z' = z + b$.

2. **Rotația**

   Rotația de centru O și unghi φ are exprimarea: $z' = \alpha \cdot z$, $|\alpha| = 1$ și $\alpha = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$.

3. **Simetria**

   a) Simetria de centru A are ecuația: $z' = 2 \cdot z_A - z$.

   b) Simetria axială în care axa de simetrie este axa OX are ecuația: $z' = \bar{z}$.

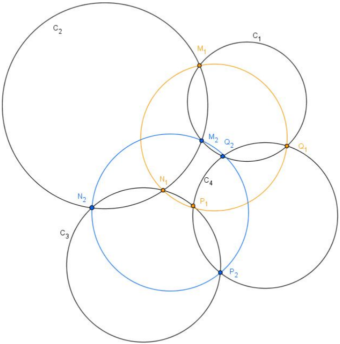
4. **Omotetia**

   Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ și $a \in \mathbb{R}^*$. Prin omotetia de centru z_0 și raport a, z se transformă în $z' = z_0 + a \cdot (z - z_0)$. Omotetia de centru O și raport a se exprimă prin: $z' = a \cdot z$.

Exercițiul 1

APLICAȚIE

Fie C_1, C_2, C_3, C_4 patru cercuri în plan și M_1, M_2 punctele de intersecție ale lui C_1 cu C_2, N_1, N_2 punctele de intersecție ale lui C_2 cu C_3, P_1, P_2 punctele de intersecție ale lui C_3 cu C_4 și Q_1, Q_2 punctele de intersecție ale lui C_4 cu C_1. Să se demonstreze că M_1, N_1, P_1, Q_1 sunt conciclice $\Leftrightarrow$ M_2, N_2, P_2, Q_2 sunt conciclice.



Exercițiul 1

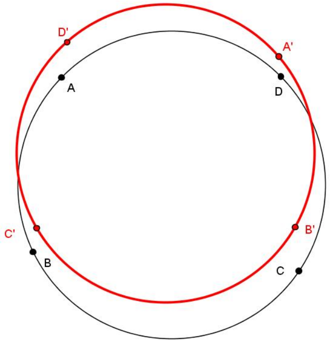
PAȘI:

- $M_1, M_2, Q_1, Q_2 \in C_1 \Rightarrow (q_1, m_2, m_1, q_2) \in \mathbb{R}^*$
- $M_1, M_2, N_1, N_2 \in C_2 \Rightarrow (m_1, n_2, n_1, m_2) \in \mathbb{R}^*$
- $N_1, N_2, P_1, P_2 \in C_3 \Rightarrow (n_1, p_2, p_1, n_2) \in \mathbb{R}^*$
- $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in C_4 \Rightarrow (p_1, q_2, q_1, p_2) \in \mathbb{R}^*$
- M_1, N_1, P_1, Q_1 *conciclice* $\Leftrightarrow R_1 = (m_1, p_1, n_1, q_1) \in \mathbb{R}^*$
- M_2, N_2, P_2, Q_2 *conciclice* $\Leftrightarrow R_2 = (m_2, p_2, n_2, q_2) \in \mathbb{R}^*$
- *Din calcule,* $R_1 \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow R_2 \in \mathbb{R}^*$.

Exercițiul 2

APLICAȚIE

Fie $A(z_A), B(z_B), C(z_C), D(z_D)$ patru puncte pe un cerc. Arătați că picioarele perpendicularelor din A, B pe dreapta CD și picioarele perpendicularelor din C,D pe dreapta AB sunt conciclice.



Exercițiul 2

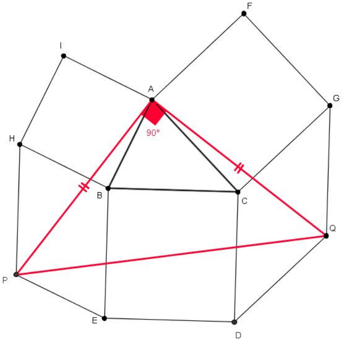
PAȘI:

- *considerăm cercul unitate*
- $AB : z + a \cdot b \cdot \bar{z} - a - b = 0$ *și*
  $CD : z + c \cdot d \cdot \bar{z} - c - d = 0$
- *afixele picioarelor perpendicularelor din A și B pe CD sunt A', respectiv B':*
  $\Rightarrow a' = \frac{1}{2} \cdot (a + c + d - \bar{a} \cdot c \cdot d)$ *și*
  $b' = \frac{1}{2} \cdot (b + c + d - \bar{b} \cdot c \cdot d)$
- *afixele picioarelor perpendicularelor din C și D pe AB sunt C', respectiv D':*
  $\Rightarrow c' = \frac{1}{2} \cdot (c + a + b - \bar{c} \cdot a \cdot b)$ *și*
  $d' = \frac{1}{2} \cdot (d + a + b - \bar{d} \cdot a \cdot b)$
- A', B', C', D' *sunt conciclice* $\Leftrightarrow (a', b', c', d') \in \mathbb{R}^*$

Exercițiul 3

APLICAȚIE

Se construiesc în exteriorul triunghiului ABC pătratele BCDE,CAFG, ABHI. Fie GCDQ și EBHP paralelograme. Să se demonstreze că triunghiul APQ este isoscel.



Exercițiul 3

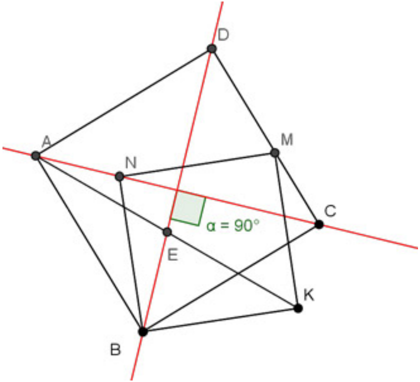
PAȘI:

- $E = R_{B,270^\circ}(C) \Leftrightarrow e = b(1+i) - c \cdot i$
- $H = R_{B,90^\circ}(A) \Leftrightarrow h = b(1-i) + a \cdot i$
- $D = R_{C,90^\circ}(B \Leftrightarrow d = c(1-i) + b \cdot i$
- $G = R_{C,270^\circ}(A) \Leftrightarrow g = c(1+i) - a \cdot i$
- $HBEP\ paralelogram \Leftrightarrow p = b - c \cdot i + a \cdot i$
- $CGQD\ paralelogram \Leftrightarrow q = c + b \cdot i - a \cdot i$
- $AP = |p - a| = |b - c \cdot i + a \cdot i - a|$
- $AQ = |q - a| = |c + b \cdot i - a \cdot i - a| = |i| \cdot AP = AP$
  $\Rightarrow \Delta ABC\ isoscel$

Exercițiul 4

APLICAȚIE

Pătratele BCDA și BKMN au vârful comun B și sunt la fel orientate. Să se demonstreze că mediana BE a triunghiului ABK este perpendiculară pe CN.



Exercițiul 4

PAȘI:

- $B(0)$, $C(c)$ și $K(k)$.
- $A = R_{B,\frac{\pi}{2}}(C) \Leftrightarrow A(ci)$.
- $BCDA$ pătrat $D(a + c - b) = D(c + ci)$.
- $N = R_{B,\frac{\pi}{2}}(K) \Leftrightarrow N(ki)$.
- $BKMN$ pătrat $M(n + k - b) = D(k + ki)$.
- E este mijlocul laturii $AK \Leftrightarrow E(\frac{ci + k}{2})$.
- $BE \perp CN \Leftrightarrow (e - b) \odot (n - c) = 0$

Evaluare

DEFINIȚIE

Evaluarea este o componentă integrată a procesului de învățământ, alături de predare și învățare, care vizează măsurarea, verificarea nivelului de însușire a cunoștințelor de către elev și notarea acestuia.

METODE DE EVALUARE:

1. **evaluare orală** *:*
   - *întrebări teoretice*
   - *rezolvarea de probleme la tablă*
   - *verificarea muncii individuale, a temelor și a proiectelor*
2. **evaluare scrisă***:*
   - *test de verificare*
   - *lucrare de control*

Test de verificare

Timp de lucru 50 de minute

1. (1.5p) *Pe laturile patrulaterului ABCD se construiesc în exterior triunghiurile dreptunghice isoscele AMB, BNC, CPD, DQA. Să se arate că* $MP \perp NQ$.
2. (1.5p)*Dacă* $ABC \sim A'B'C'$ *și O in plan, iar* A_1 *vârful* $\Delta AA'A_1$, B_1 *este vârful* $\Delta BB'B_1$ *și* C_1 *vârful* $\Delta CC'C_1$ *cu centrul de greutate O, atunci* $A_1B_1C_1 \sim ABC$.
3. (3p) *Fie* ΔABC *și* $\Delta A_1B_1C_1$ *a.î.* $A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB$ *și le împart pe acestea în raportul k. Să se arate că* ΔABC *și* $\Delta A_1B_1C_1$ *au același centru de greutate.*
4. (3p) *Enunțați și demonstrați proprietatea referitoare la conciclicitatea a patru puncte distincte două câte două.*

Se acordă 1 punct din oficiu. Succes!

Test de evaluare

Toate subiectele sunt obligatorii.
Se acordă 1p din oficiu.
Timp de lucru : 1h

1 (1p) Alegeți varianta corectă și motivați răspunsul: Centrul de greutate al unui triunghi cu vârfurile $A(a), B(b), C(c)$ are afixul: a) $a+b+c$
b) $\dfrac{a+b+c}{2}$ c) $\dfrac{a+b+c}{3}$

2 (2p) Enunțați și demonstrați cu ajutorul numerelor complexe teorema lui Pappus.

3 (1p) Scrieți o condiție necesară și suficientă pentru ca un triunghi ABC să fie echilateral

4 (0.5p) Dreapta lui Simson este dreapta formată din ....

Test de evaluare

5 (2p) Fie O și H centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul triunghiului ABC, iar Q simetricul lui H față de O. Fie T_1, T_2, T_3 centrele de greutate ale triunghiurilor BCQ, CAQ, ABQ. Să se demonstreze că: $AT_1 = BT_2 = CT_3 = \frac{4}{3} \cdot OA$

6 (2p) Fie punctele A(a),B(b),C(c) a.î. $a + b + c \neq 0$ și punctele M($a^2 + a \cdot b + a \cdot c$), N($b^2 + b \cdot c + b \cdot a$), P($c^2 + c \cdot a + c \cdot b$).Să se găsească o relație între triunghiurile MNP și ABC.

7 (0.5p) Stabiliți dacă este adevărat sau fals și justificați răspunsul:
Punctele A(a),B(b),C(c)) două câte două distincte sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$

Metoda R.A.I.

- metoda se poate folosi la începutul lecției pentru a verifica cunoștiințele elevilor

APLICAȚIE

- *Primul elev întreabă care este afixul mijlocului unui segment [AB] , iar următorul răspunde:* $\frac{a+b}{2}$
- *Al doilea elev continuă și intreabă care este afixul centrului de greutate al unui triunghi ABC. Cel întrebat răspunde cu:* $\frac{a+b+c}{3}$.
- *Al treilea elev poate întreba care este biraportul a patru numere, iar cel întrebat va raspunde:* $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$.

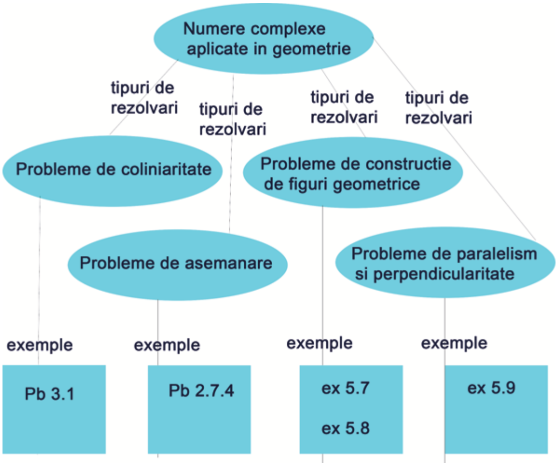
Metoda 3-2-1

- evaluare a procesului de predare-învățare dupa câteva ore de curs
- elevii scriu: 3 concepte din ce au învățat, 2 idei despre care ar dori să învețe mai multe în continuare și o capacitate pe care au dobândit-o în urma activității de predare-învățare.

APLICAȚIE

- *3: coliniaritatea a trei puncte , perpendicularitatea a două drepte, conciclicitatea a 4 puncte*
- *2: transformări geometrice, produsul real al numerelor complexe*
- *1: rezolvarea problemelor de geometrice prin metode ale Analizei Complexe*

Harta conceptuală



Bibliografie

- T. Andreescu, D. Andrica, *Complex numbers from A to ... Z*. Birkhauser, Boston(2005)
- D. Andrica, N. Bişboacă, *Numere Complexe. Probleme rezolvate din manualele alternative*. Editura Millenium(2000)
- L.S. Hahn, *Complex Numbers&Geometry*.The Mathematichal Association of America(1984)
- N.N. Mihăileanu, *Utilizarea numerelor complexe în geometrie*. Editura Tehnică, Bucureşti (1968)
- P.S. Modenov, *Problems in Geometry*. Mir Publishers - Moscow(1981)
- G. Sălăgean, *Geometria planului complex*, Editura ProMedia Plus, Cluj-Napoca(1997)