Aplicații ale numerelor complexe în geometrie, utilizând Geogebra

"Adevărul matematic, indiferent unde, la Paris sau la Toulouse, este unul și același." (Blaise Pascal)

Diana-Florina Haliță
grupa 331
diana.halita@gmail.com

Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică și Informatică
Specializarea Matematică-Informatică, linia de studiu română

- Scopul acestui opțional este de a extinde aria de cunoaștere a elevilor în legătură cu numerele complexe, și formarea priceperilor și deprinderilor în rezolvarea unor probleme de geometrie cu ajutorul numerelor complexe.
- În prima parte a acestui opțional vor fi reamintite cunoștiințe generale legate de numerele complexe. Apoi vor fi prezentate proprietățile principale ale acestora și vor fi definite cu ajutorul acestora termeni din geometrie.
- La finalul prezentării conținutului noțional matematic, elevii vor avea o secțiune de aplicații, teme individuale și pe grupe în urma cărora vor fi evaluate cunoștiințele acumulate de studenți.

Teorema 2.1

Cazul I

$A(a), B(b), M(z)$, *M este pe segmentul AB a.î.* $\dfrac{AM}{MB} = k > 0.$

Atunci $z = \dfrac{1}{k+1} \cdot a + \dfrac{k}{k+1} \cdot b.$

Cazul II

$A(a), B(b), M(z)$, *B este pe segmentul AM a.î.* $\dfrac{AM}{MB} = k < 0.$

Atunci $z = \dfrac{1}{k+1} \cdot a + \dfrac{k}{k+1} \cdot b.$

Cazul III

$A(a), B(b), M(z)$, *A este pe segmentul MB a.î.* $\dfrac{AM}{MB} = k < 0.$

Atunci $z = \dfrac{1}{k+1} \cdot a + \dfrac{k}{k+1} \cdot b.$

Teorema 3.1

1.Punctele $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ două câte două distincte sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$.
2.Fie $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(z_4)$ două câte două distincte. Dreptele M_1M_2 și M_3M_4 sunt perpendiculare dacă și numai dacă $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i \cdot \mathbb{R}^*$.
3. Introduc notiunea de biraport a patru numere complexe prin:
$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$
Fie $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$ două câte două distincte. Punctele sunt coliniare sau conciclice $\Leftrightarrow (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^*$.

Teorema 4.1

Fie $A_1(a_1), A_2(a_2), A_3(a_3), B_1(b_1), B_2(b_2), B_3(b_3)$.Se dau triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$. Știind că cele două triunghiuri sunt la fel orientate putem spune că următoarele afirmații sunt echivalente:

i) triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$ sunt asemenea în această ordine

ii) $\dfrac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \dfrac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$

iii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$

Teorema 4.2

Fie $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$. *Știind că* $\varepsilon = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{3})$ *următoarele afirmații sunt echivalente:*

$i)$*triunghiul* $M_1M_2M_3$ *este echilateral*

$ii) z_1 \cdot \varepsilon + z_2 \cdot \varepsilon^2 + z_3 = 0;$

$$iii) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

$iv) z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1.$

$$v) \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_3}.$$

$$vi) \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3} = 0, \text{ unde } z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

$vii) (z_1 + \varepsilon \cdot z_2 + \varepsilon^2 \cdot z_3) \cdot (z_1 + \varepsilon^2 \cdot z_2 + \varepsilon \cdot z_3) = 0,$

Teorema 5.1

1. Ecuația generală a unei drepte în plan este:
$\bar{a}\cdot\bar{z}+a\cdot z+b=0, a\in\mathbb{C}^*, b\in\mathbb{R}, z=x+i\cdot y.$
Pentru $a\neq\bar{a}$ *panta dreptei este egală cu* $\dfrac{a+\bar{a}}{a-\bar{a}}\cdot i.$
2. Condiții de paralelism, perpendicularitate și concurență pentru dreptele:
$d_1:\bar{a}_1\cdot\bar{z}_1+a_1\cdot z_1+b_1=0$ *și* $d_2:\bar{a}_2\cdot\bar{z}_2+a_2\cdot z_2+b_2=0$,
$a_1\neq 0, a_2\neq 0.$
$i) d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \dfrac{\bar{a}_1}{a_1}=\dfrac{\bar{a}_2}{a_2}$
$ii) d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \dfrac{\bar{a}_1}{a_1}+\dfrac{\bar{a}_2}{a_2}=0$
$iii) d_1, d_2$ *sunt concurente* $\Leftrightarrow \dfrac{\bar{a}_1}{a_1}\neq\dfrac{\bar{a}_2}{a_2}$

Teorema 5.2

3. Ecuația unei drepte în plan determinată de două puncte având afixele z_1 și z_2 este:
$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Condiția de coliniaritate a trei puncte având afixele z_1, z_2, z_3 se justifică repede ca fiind echivalentă cu:
$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Ecuația unei drepte care trece prin punctul de afix z_0 paralelă cu dreapta: $d : \bar{a} \cdot \bar{z} + a \cdot z + b = 0$ este $z - z_0 = -\frac{\bar{a}}{a} \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0)$.

6. Ecuația dreptei date prin punctul de afix z_0 care este perpendiculară pe dreapta $d : \bar{a} \cdot \bar{z} + a \cdot z + b = 0$ este $\overline{d} : z - z_0 = \frac{\bar{a}}{a} \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0)$.

Teorema 5.3

7. Afixul piciorului perpendicularei din punctul de afix z_0 pe dreapta $d : \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$ este $z = \dfrac{\alpha \cdot z_0 - \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 - \beta}{2 \cdot \alpha}$.

8. Distanța de la un punct de afix z_0 la o dreaptă $d : \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0, \alpha \neq 0$ *este:* $D = |\dfrac{\alpha \cdot z_0 + \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + \beta}{2 \cdot \sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha}}}|$

9. Aria triunghiului determinat de trei puncte de afixe z_1, z_2, z_3 este:

$$A = |\Delta|, \Delta = \frac{i}{4} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Ecuația unui cerc în plan este: $z \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \beta = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}, z = x + y \cdot i$.

Teorema 6.1

1. Translația

Fie $b \in \mathbb{C}$. z se translatează cu vectorul b în z'=z+b.

2. Rotația

Rotația de centru O și unghi φ are exprimarea: $z' = \alpha \cdot z$, $|\alpha| = 1$ și $\alpha = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$.

3. Simetria

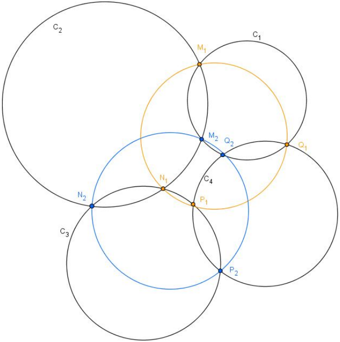
a) Simetria de centru A are ecuația: $z' = 2 \cdot z_A - z$.

b) Simetria axială în care axa de simetrie este axa OX are ecuația: $z' = \bar{z}$.

4. Omotetia

Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ și $a \in \mathbb{R}^*$. Prin omotetia de centru z_0 și raport a, z se transformă în $z' = z_0 + a \cdot (z - z_0)$. Omotetia de centru O și raport a se exprimă prin: $z' = a \cdot z$.

1. *Fie C_1, C_2, C_3, C_4 patru cercuri în plan și M_1, M_2 punctele de intersecție ale lui C_1 cu C_2, N_1, N_2 punctele de intersecție ale lui C_2 cu C_3, P_1, P_2 punctele de intersecție ale lui C_3 cu C_4 și Q_1, Q_2 punctele de intersecție ale lui C_4 cu C_1. Să se demonstreze că M_1, N_1, P_1, Q_1 sunt conciclice $\Leftrightarrow$ M_2, N_2, P_2, Q_2 sunt conciclice.*



Demonstrație:

Pe cercul C_1 se află punctele: M_1, M_2, Q_1, Q_2.

$$\Rightarrow (q_1, m_2, m_1, q_2) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow a_1 = \frac{q_1 - m_1}{m_2 - m_1} : \frac{q_1 - q_2}{m_2 - q_2} \in \mathbb{R}^*$$

Pe cercul C_2 se află punctele: M_1, M_2, N_1, N_2.

$$\Rightarrow (m_1, n_2, n_1, m_2) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow a_2 = \frac{m_1 - n_1}{n_2 - n_1} : \frac{m_1 - m_2}{n_2 - m_2} \in \mathbb{R}^*$$

Pe cercul C_3 se află punctele: N_1, N_2, P_1, P_2.

$$\Rightarrow (n_1, p_2, p_1, n_2) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow a_3 = \frac{n_1 - p_1}{p_2 - p_1} : \frac{n_1 - n_2}{p_2 - n_2} \in \mathbb{R}^*$$

Pe cercul C_4 se află punctele: P_1, P_2, Q_1, Q_2.

$$\Rightarrow (p_1, q_2, q_1, p_2) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow a_4 = \frac{p_1 - q_1}{q_2 - q_1} : \frac{p_1 - p_2}{q_2 - p_2} \in \mathbb{R}^*$$

$$M_1, N_1, P_1, Q_1 \text{ conciclice} \Leftrightarrow R_1 = (m_1, p_1, n_1, q_1) \in \mathbb{R}^*$$
$$\Leftrightarrow R_1 = \frac{m_1 - n_1}{p_1 - n_1} : \frac{m_1 - q_1}{p_1 - q_1} \in \mathbb{R}^*$$
$$M_2, N_2, P_2, Q_2 \text{ conciclice} \Leftrightarrow R_2 = (m_2, p_2, n_2, q_2) \in \mathbb{R}^*$$
$$\Leftrightarrow R_2 = \frac{m_2 - n_2}{p_2 - n_2} : \frac{m_2 - q_2}{p_2 - q_2} \in \mathbb{R}^*$$
$$R_1 = \frac{m_1 - n_1}{p_1 - n_1} : \frac{m_1 - q_1}{p_1 - q_1} = a_2 \cdot \frac{n_2 - n_1}{p_1 - n_1} \cdot \frac{m_1 - m_2}{n_2 - m_2} : \frac{m_1 - q_1}{p_1 - q_1}$$
$$R_1 = \frac{a_2}{\frac{n_1 - p_1}{p_2 - p_1} : \frac{n_1 - n_2}{p_2 - n_2}} \cdot \frac{n_2 - n_1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{p_2 - n_2}{n_1 - n_2} \cdot \frac{m_1 - m_2}{n_2 - m_2} \cdot \frac{p_1 - q_1}{m_1 - q_1}$$
$$R_1 = -\frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{p_2 - n_2}{p_2 - p_1} \cdot \frac{m_1 - m_2}{n_2 - m_2} \cdot \frac{p_1 - q_1}{q_2 - q_1} : \frac{p_1 - p_2}{q_2 - p_2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{q_2 - p_2} \cdot \frac{q_2 - q_1}{m_1 - q_1}$$
$$R_1 = \frac{a_2 \cdot a_4}{a_3} \cdot \frac{p_2 - n_2}{q_2 - p_2} \cdot \frac{m_1 - m_2}{n_2 - m_2} \cdot \frac{q_2 - q_1}{m_1 - q_1}$$

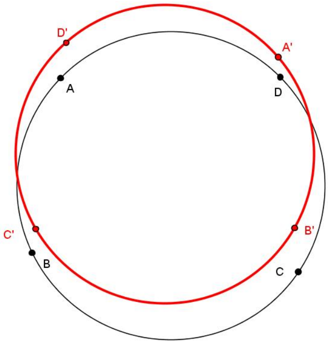
$$R_1 = \frac{a_2 \cdot a_4}{a_3} \cdot \frac{1}{\dfrac{q_1 - m_1}{m_2 - m_1} : \dfrac{q_1 - q_2}{m_2 - q_2}} \cdot \frac{p_2 - n_2}{q_2 - p_2} \cdot \frac{m_1 - m_2}{n_2 - m_2} \cdot \frac{q_2 - q_1}{m_1 - q_1} \cdot \frac{q_1 - m_1}{m_2 - m_1} \cdot \frac{m_1 - q_2}{q_1 - q_2}$$

$$R_1 = -\frac{a_2 \cdot a_4}{a_3 \cdot a_1} \cdot \frac{p_2 - n_2}{q_2 - p_2} \cdot \frac{m_2 - q_2}{n_2 - m_2} = -\frac{a_2 \cdot a_4}{a_3 \cdot a_1} \cdot \frac{n_2 - p_2}{q_2 - p_2} : \frac{n_2 - m_2}{q_2 - m_2}$$

$$= -\frac{a_2 \cdot a_4}{a_3 \cdot a_1} \cdot R_2$$

Deci $R_1 \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow R_2 \in \mathbb{R}^*$.

2. *Fie $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ patru puncte pe un cerc. Arătați că picioarele perpendicularelor din A, B pe dreapta CD și picioarele perpendicularelor din C,D pe dreapta AB sunt conciclice.*



Demonstrație:

Fie cercul unitate, și A, B, C, D patru puncte pe acest cerc. În acest caz avem:

$AB : z + a \cdot b \cdot \bar{z} - a - b = 0$ și $CD : z + c \cdot d \cdot \bar{z} - c - d = 0$

Picioarele perpendicularelor din A și B pe CD sunt A', respectiv B', de afixe:

$\Rightarrow a' = \frac{1}{2} \cdot (a + c + d - \bar{a} \cdot c \cdot d)$ și $b' = \frac{1}{2} \cdot (b + c + d - \bar{b} \cdot c \cdot d)$

Picioarele perpendicularelor din C și D pe AB sunt C', respectiv D', de afixe:

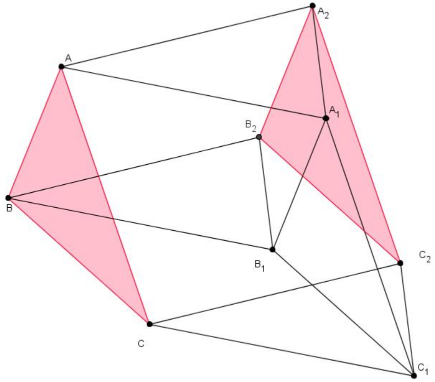
$\Rightarrow c' = \frac{1}{2} \cdot (c + a + b - \bar{c} \cdot a \cdot b)$ și $d' = \frac{1}{2} \cdot (d + a + b - \bar{d} \cdot a \cdot b)$

A', B', C', D' sunt conciclice $\Leftrightarrow (a', b', c', d') \in \mathbb{R}^*$

$$\Leftrightarrow R = \frac{a' - c'}{a' - d'} : \frac{b' - c'}{b' - d'} \in \mathbb{R}^*$$

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{d-b-\bar{a}\cdot c\cdot d+\bar{c}\cdot a\cdot b}{c-b-\bar{a}\cdot c\cdot d+\bar{d}\cdot a\cdot b} : \frac{d-a-\bar{b}\cdot c\cdot d+\bar{c}\cdot a\cdot b}{c-a-\bar{b}\cdot c\cdot d+\bar{d}\cdot a\cdot b} \\
&= \frac{d\cdot(a-c)\cdot\bar{a}-b\cdot(c-a)\cdot\bar{c}}{c\cdot(a-d)\cdot\bar{a}-b\cdot(d-a)\cdot\bar{d}} : \frac{d\cdot(b-c)\cdot\bar{b}-a\cdot(c-b)\cdot\bar{c}}{c\cdot(b-d)\cdot\bar{b}-a\cdot(d-b)\cdot\bar{d}} \\
&= \frac{(a-c)\cdot(d\cdot\bar{a}+b\cdot\bar{c})}{(a-d)\cdot(c\cdot\bar{a}+b\cdot\bar{d})} : \frac{(b-c)\cdot(d\cdot\bar{b}+a\cdot\bar{c})}{(b-d)\cdot(c\cdot\bar{b}+a\cdot\bar{d})} \\
&= \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} \cdot \frac{d\cdot\bar{a}+b\cdot\bar{c}}{c\cdot\bar{a}+b\cdot\bar{d}} : \frac{d\cdot\bar{b}+a\cdot\bar{c}}{c\cdot\bar{b}+a\cdot\bar{d}} \\
&= (a,b,c,d)\cdot\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c\cdot d+a\cdot b\cdot\bar{c}\cdot\bar{d}+2}{\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c\cdot d+a\cdot b\cdot\bar{c}\cdot\bar{d}+2} = (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^*
\end{aligned}
$$

3. *Presupunând că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt asemenea și că triunghiurile AA_1A_2,BB_1B_2 și CC_1C_2 sunt și ele asemenea arătați că triunghiurile $A_2B_2C_2$ și ABC sunt asemenea.*



Demonstrație:

$$\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a} = \frac{b_1-a_1}{c_1-a_1}$$

$$\Delta AA_1A_2 \sim \Delta BB_1B_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1-a}{a_2-a} = \frac{b_1-b}{b_2-b}$$

$$\Leftrightarrow a_2 - a = \frac{a_1-a}{b_1-b} \cdot (b_2-b) \Leftrightarrow \mathbf{a_2 = a + \frac{a_1-a}{b_1-b} \cdot (b_2-b)}$$

$$\Delta BB_1B_2 \sim \Delta CC_1C_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{b_1-b}{b_2-b} = \frac{c_1-c}{c_2-c}$$

$\Leftrightarrow b_2 - b = \dfrac{b_1 - b}{c_1 - c} \cdot (c_2 - c) \Leftrightarrow \mathbf{b_2 = b + \dfrac{b_1 - b}{c_1 - c} \cdot (c_2 - c)}$

Rezultă că: $\mathbf{a_2 = a + \dfrac{a_1 - a}{c_1 - c} \cdot (c_2 - c)}$. Atunci:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \dfrac{1}{c_1 - c} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ K1 & K2 & K3 \\ a & b & c \end{vmatrix}$, unde:

$K1 = a \cdot (c_1 - c) + (a_1 - a) \cdot (c_2 - c) = a \cdot (c_1 - c_2) + a_1 \cdot (c_2 - c)$,

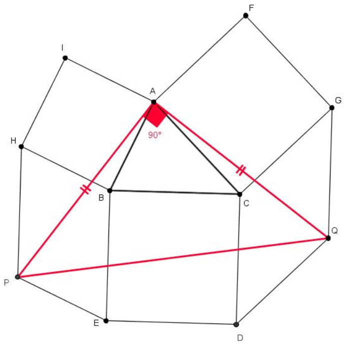
$K2 = b \cdot (c_1 - c) + (b_1 - b) \cdot (c_2 - c) = b \cdot (c_1 - c_2) + b_1 \cdot (c_2 - c)$

și $K3 = c_2 \cdot (c_1 - c)$

$\Delta = \dfrac{1}{c_1 - c} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1(c_2 - c) & b_1(c_2 - c) & c_1(c_2 - c) \\ a & b & c \end{vmatrix}$

$= \dfrac{c_2 - c}{c_1 - c} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$

4. *Se construiesc în exteriorul triunghiului ABC pătratele BCDE,CAFG, ABHI. Fie GCDQ și EBHP paralelograme. Să se demonstreze că triunghiul APQ este isoscel.*



Demonstrație:

E se obține din C prin rotație în jurul lui B cu 270°
$\Leftrightarrow e = b + (c - b) \cdot [\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ] = b + (c - b) \cdot (-i) = b(1 + i) - c \cdot i$
H se obține din A prin rotație în jurul lui B cu 90°
$\Leftrightarrow h = b+(a-b)\cdot[\cos 90^\circ+i\cdot\sin 90^\circ] = b+(a-b)\cdot i = b(1-i)+a\cdot i$
D se obține din B prin rotație în jurul lui C cu 90°
$\Leftrightarrow d = c+(b-c)\cdot[\cos 90^\circ+i\cdot\sin 90^\circ] = c+(b-c)\cdot i = c(1-i)+b\cdot i$
G se obține din A prin rotație în jurul lui C cu 270°
$\Leftrightarrow g = c + (a - c) \cdot [\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ] = c + (a - c) \cdot (-i) = c(1 + i) - a \cdot i$
$HBEP$ paralelogram $\Leftrightarrow p + b = h + e \Leftrightarrow p = b - c \cdot i + a \cdot i$
$CGQD$ paralelogram $\Leftrightarrow q + c = d + g$
$\Leftrightarrow q = 2 \cdot c + b \cdot i - a \cdot i - c = c + b \cdot i - a \cdot i$

$AP = |p - a| = |b - c \cdot i + a \cdot i - a|$
$AQ = |q - a| = |c + b \cdot i - a \cdot i - a| = |i| \cdot |-c \cdot i + b - a + a \cdot i| =$
$1 \cdot AP = AP$
$\Rightarrow \Delta ABC$ isoscel

- T. Andreescu, D. Andrica, *Complex numbers from A to ... Z*. Birkhauser, Boston(2005)
- D. Andrica, N. Bișboacă, *Numere Complexe. Probleme rezolvate din manualele alternative*. Editura Millenium(2000)
- L.S. Hahn, *Complex Numbers&Geometry*.The Mathematichal Association of America(1984)
- N.N. Mihăileanu, *Utilizarea numerelor complexe în geometrie*. Editura Tehnică, București (1968)
- P.S. Modenov, *Problems in Geometry*. Mir Publishers - Moscow(1981)
- G. Sălăgean, *Geometria planului complex*, Editura ProMedia Plus, Cluj-Napoca(1997)