Hardy–Randers-féle Dirichlet-problémák numerikus vizsgálata

Olteán-Péter Boróka, Farkas Csaba

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhelyi Kar

boroka.oltean@ms.sapientia.ro, farkascs@ms.sapientia.ro

Kivonat

A bemutatónkban két regularizált, Hardy-tagot tartalmazó Randers-típusú Dirichlet-feladatot vizsgálunk: egy kétdimenziós, logaritmikus Hardy-taggal és egy háromdimenziós, inverz négyzetes Hardy-taggal rendelkező problémát. Mindkét esetben az energiafunkcionál $\mathcal{I}_\lambda = \Phi_\mu - \lambda\Psi$ alakú, és a hozzá tartozó peremérték-feladat

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(x)\mathcal{A}(x,\nabla u)) - \mu\sigma(x)V(x)u = \lambda\sigma(x)\dfrac{u^3}{1+u^4}, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

ahol $\mathcal{A}(x,\xi) = F^*(x,\xi)\nabla_\xi F^*(x,\xi)$, σ a Busemann–Hausdorff-sűrűség, V pedig a megfelelő regularizált Hardy-súly.

A rögzített regularizációk és $\mu = 0.05$ mellett az euklideszi Hardy-egyenlőtlenségek és a Randers–euklideszi összehasonlító becslések alapján

$$\Phi_\mu(u) \geq \gamma_n \|\nabla u\|_2^2,$$

ahol $\gamma_2 = 0.040933104$ és $\gamma_3 = 0.027726643$; továbbá

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\sup\{\Psi(u) : \Phi_\mu(u) < \rho\}}{\rho} = 0.$$

Itt Φ_μ a Randers-típusú Dirichlet-energiát és a Hardy-tagot tartalmazza, míg $\Psi(u) = \frac{1}{4}\int_\Omega \log(1+u^4)\sigma(x)\,dx$ a nemlineáris potenciál. Ezekre támaszkodva alkalmazzuk a Bonanno-féle háromkritikuspont-tételt a Farkas–Kristály–Mester által használt lokalizációs formában, amely egy nemüres, nyílt paraméterintervallumon három kritikus pont létezését biztosítja, majd Bonanno explicit, három kritikus pont létezését biztosító kritériumát $r_0 = 10^{-3}$ mellett.

A numerikus megoldáshoz tenzorszorzatként előállított köbös B-spline-okon alapuló diszkrét teret használunk, amelyben az $1 - |x|^2$ szorzótényező a homogén Dirichlet-peremfeltételt egzakt módon biztosítja. A gömbtartomány peremét metsző cellákon változó integrálási határokkal alkalmazott Gauss-kvadratúrát, a háló finomításához pedig reziduumindikátorokon alapuló Dörfler-jelölést és csomóbeszúrást használunk. Az eljárás meghatározza a nullmegoldást, egy teljes téren végzett leszálló módszerrel kapott minimumjelöltet, valamint egy nyeregpontjelöltet. A megoldásokat az energia, a szabadságfokok száma, a stacionaritási reziduum és a Hesse-mátrix sajátmódusai alapján vizsgáljuk.

Hivatkozások

[1] Farkas, C., Kristály, A., Mester, Á. (2021). Compact Sobolev embeddings on non-compact manifolds via orbit expansions of isometry groups. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 60(4), 128.

[2] Olteán-Péter, B. (2026). A Geometric B-Spline Approach to Mountain-Pass Type Solutions of Nonlinear Dirichlet Problems. Acta Universitatis Sapientiae, Informatica, 18(1), 16.