Ringel–Hall-polinomok kiszámítása párhuzamos algoritmusok segítségével

Laping Miklós-József

Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Matematika és Informatika Kar
miklos.laping@stud.ubbcluj.ro

A Ringel–Hall-polinomok központi szerepet töltenek be a reprezentációelmélet, az algebrai geometria és a kombinatorika metszéspontjában, hidat képezve a tegezreprezentációk és a kvantumcsoportok között. Véges tegezek esetén ezek a polinomok adott reprezentációk közötti bővítések számát kódolják, és az a figyelemre méltó tulajdonságuk, hogy a véges test elemszámában polinomként (nem csupán egész értékű függvényként) viselkednek, mély geometriai struktúrára utal. Ezt a polinomtulajdonságot a Ringel–Hall-algebra konstrukciója használja fel, ahol az algebra struktúraállandói éppen ezeknek a polinomoknak a véges testen vett helyettesítési értékei.

A szelíd (euklideszi) tegezek esetében ez a struktúra különösen gazdaggá válik. Itt a Ringel–Hall-polinomok nemcsak a felbonthatatlan reprezentációk kompozíciósorozatait írják le, hanem magukba sűrítik a mögöttes euklideszi gyökrendszer lényeges kombinatorikáját is, számítási kulcsot kínálva a modulusterek kohomológiájához, a kvantum affin algebrák szerkezetéhez, valamint a klaszteralgebrák kategorizálásához.

Alapvető fontosságuk ellenére relatív kevés konkrét Ringel–Hall-polinom ismert (euklideszi tegezek esetén). Egy számítógépes eszközt fejlesztünk (GAP, Rust és C++ programozási nyelvekben, OpenCL technológiát használva), ami optimizált, párhuzamos algoritmusok segítségével számolja ezeket a polinomokat. Az OpenCL-nek köszönhetően a számítások heterogén platformon (hagyományos processzorokon, videókártyákon, stb.) futtathatóak skálázható módon.

Az eszközt reprezentációelméletben kutató matematikusok használhatják elméleti eredmények vagy számítások ellenőrzésére, sejtések megfogalmazására.

Hivatkozások

[1] Cs. Szántó és I. Szöllősi. “Hall polynomials and the Gabriel–Roiter submodules of simple homogeneous modules”. Bulletin of the London Mathematical Society 47.2 (2014. dec.), 206–216. old. DOI: 10.1112/blms/bdu109

[2] Cs. Szántó és I. Szöllősi. “Ringel–Hall polynomials associated to a quiver of type D4”. Periodica Mathematica Hungarica 88.1 (2024. márc.), 218–242. old. DOI: 10.1007/s10998-023-00549-y.