

Log-Sobolev-egyenlőtlenségek: élesség, rigiditás és stabilitás

Kristály Sándor

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár & Óbudai Egyetem, Budapest
alexandru.kristaly@ubbcluj.ro; kristaly.alexandru@uni-obuda.hu

Az optimális tömegszállítás (OMT, Optimal Mass Transport) alkalmazásával új, direkt bizonyítást adunk az $\mathbb{R}^n$ -ben érvényes éles L^p -logaritmikus Sobolev-egyenlőtlenségre (LSI). Ennek a megközelítésnek két fontos előnye van. Egyrészt lehetővé teszi az extrémális függvények jellemzését a súlyozott LSI esetében is az euklideszi tér nyílt konvex kúpjain, minden $p, n > 1$ esetén (lásd [1]). Másrészt lehetőséget teremt az LSI stabilitásának vizsgálatára (lásd [2]).

Ez az ötlet felhasználható az éles LSI bizonyítására nemnegatív Ricci-görbületű Riemann-sokaságokon is, megválaszolva ezzel Cordero-Erausquin, Nazaret és Villani [4] nyitott kérdését (lásd [5]). Ebben az esetben az optimális konstans a sokaság ún. aszimptotikus térfogatnövekedésétől (asymptotic volume ratio) függ.

Végül az OMT "kodimenziós" módosításával éles Michael–Simon-típusú LSI-t kapunk euklideszi részsokaságokon, ahol az átlaggörbület (mean curvature) meghatározó szerepet játszik (lásd [3]).

Hivatkozások

- [1] Z.M. Balogh, S. Don, A. Kristály, Sharp weighted log-Sobolev inequalities: characterization of equality cases and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.* 377 (2024), no. 7, 5129–5163.
- [2] Z.M. Balogh, A. Kristály, Sharp stability in hypercontractivity estimates and logarithmic Sobolev inequalities. *Adv. Math.* 505 (2026), Paper No. 111319.
- [3] Z.M. Balogh, A. Kristály, Logarithmic-Sobolev inequalities on non-compact Euclidean submanifolds: sharpness and rigidity, *J. Eur. Math. Soc.*, accepted 2026, DOI:10.4171/JEMS/1773.
- [4] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret, C. Villani, A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo–Nirenberg inequalities. *Adv. Math.* 182 (2004), no. 2, 307–332.
- [5] A. Kristály, Sharp Sobolev inequalities on noncompact Riemannian manifolds with $\text{Ric} \geq 0$ via optimal transport theory. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 63 (2024), no. 8, Paper No. 200, 25 pp.