17. Matematika és Informatika Alkalmazásokkal Konferencia
2026. november 13–15., Kolozsvár

Diofantoszi szögkonfigurációk

Diophantine angle configurations

Kovács Béla, Szatmárnémeti
E-mail: belako2025@gmail.com

2026. szeptember 30.

Bevezetés

A *diofantoszi* jelző Diophantosz alexandriai görög matematikus nevéből származik. Leggyakrabban olyan egyenletekre és problémákra használjuk, amelyekben az egész vagy a természetes számok halmazában keresünk megoldásokat. Ide kapcsolódnak a diofantoszi algebrai és trigonometriai egyenletek, egyenletrendszerek, valamint az ezekkel vizsgálható geometriai konfigurációk.

A témához kapcsolódik Laczkovich Miklós *Configurations with Rational Angles and Trigonometric Diophantine Equations* című tanulmánya [1], továbbá a *Diophantine Trigonometric Equations in Geometry* című írás [2]. Rokon kérdéskört alkotnak a Langley-féle szögfeladatok és az *adventitious quadrangles* problémái [3, 4]. A racionális fokszámú szögek vizsgálata általánosabb az alább tárgyalt, egész fokszámú esetnél.

Definíció. Ebben a cikkben *diofantoszi szögkonfiguráción* olyan síkbeli geometriai alakzatot értünk, amelynek kijelölt szögei pozitív egész fokszámúak, geometriai létezésük pedig véges sok változóra felírt egyenletekkel és egyenlőtlenségekkel írható le. A trigonometriai egyenletekben az ismeretlenek a szögek egész *fokszámai*; a szinuszértékeknek nem kell egész számoknak lenniük.

Például egy háromszög, négyszög, ötszög vagy általános konvex n-szög belső pontját összeköthetjük minden csúccsal. Négyszög esetén különösen fontos az átlók metszéspontjának választása. A kijelölt szögek egészértékűségét, a geometriai illeszkedést és a konvexitást leíró feltételek együtt alkotják a konfiguráció diofantoszi trigonometriai rendszerét.

Jelölés. A továbbiakban $a, b, c, \ldots, \alpha_i, \beta_i$ a szögek fokszámai, tehát például a tényleges szög a°, szinusza pedig $\sin(a^\circ)$. Az ábrák a jelöléseket szemléltetik; nem konkrét számértékek méretarányos rajzai.

1. Diofantoszi háromszög-konfiguráció

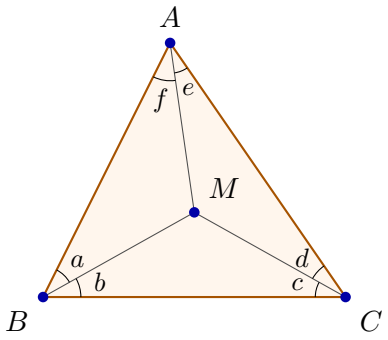
Az ABC háromszög M belső pontját kössük össze a három csúccsal. A szögek jelölése az 1. ábra szerint:

$$\angle ABM = a^\circ, \qquad \angle MBC = b^\circ,$$
$$\angle BCM = c^\circ, \qquad \angle MCA = d^\circ,$$
$$\angle CAM = e^\circ, \qquad \angle MAB = f^\circ.$$

A szükséges, és pozitív szögek esetén elegendő feltételek:

$$a+b+c+d+e+f=180, \tag{1}$$
$$\sin(a^\circ)\sin(c^\circ)\sin(e^\circ)=\sin(b^\circ)\sin(d^\circ)\sin(f^\circ)\,. \tag{2}$$

A diofantoszi esetben $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{Z}_{>0}$. A hat szög közül legfeljebb egy lehet tompaszög, mert összegük 180°.



1. ábra. Háromszög egy belső ponttal.

A szinuszszorzat bizonyítása. A szinusztételt a BMC, CMA és AMB háromszögekre felírva:

$$\frac{CM}{BM}=\frac{\sin(b^\circ)}{\sin(c^\circ)},\qquad \frac{AM}{CM}=\frac{\sin(d^\circ)}{\sin(e^\circ)},\qquad \frac{BM}{AM}=\frac{\sin(f^\circ)}{\sin(a^\circ)}.$$

A három egyenlet szorzata $1=\sin(b^\circ)\sin(d^\circ)\sin(f^\circ)\,/(\sin(a^\circ)\sin(c^\circ)\sin(e^\circ))$, ami (2)-et adja. Ugyanez a trigonometrikus Ceva-tételből is következik. Az elegendőséget az általános tétel bizonyítja az 5. szakaszban. □

Négy ismert szög esete. Négy szög ismeretében a másik kettő összege meghatározható, de a két szög *nem mindig egyértelmű*. Ha például a,b,c,d adott, akkor

$$S=180-a-b-c-d,\qquad e+f=S,\qquad \frac{\sin(e^\circ)}{\sin(f^\circ)}=K:=\frac{\sin(b^\circ)\sin(d^\circ)}{\sin(a^\circ)\sin(c^\circ)}.$$

Ha az ismert szögek pozitívak és $0<S<180$, akkor a $\sin(e^\circ)\,/\sin(S-e^\circ)$ függvény szigorúan növekvő a $0<e<S$ intervallumon, és értékkészlete $(0,\infty)$. Ezért ebben az esetben egyetlen valós megoldás van. Kiszámításához használható

$$\cot(e^\circ)=\frac{K^{-1}+\cos(S^\circ)}{\sin(S^\circ)},\qquad f=S-e.$$

Ezután külön ellenőrizni kell, hogy mindkét fokszám egész-e.

Ha viszont a két ismeretlen a szinuszszorzat *azonos oldalán* áll, az egyértelműség elmaradhat. Például a

$$(a,b,c,d,e,f)=(20,20,40,40,30,30)\quad\text{és}\quad(40,20,20,40,30,30)$$

szöghatosok mindketten teljesítik (1)–(2)-et, miközben b,d,e,f értéke azonos. Így e négy szög nem dönti el egyértelműen a és c értékét.

2. Diofantoszi négyszög-konfiguráció

Az $ABCD$ konvex négyszög M belső pontjánál a jelölések:

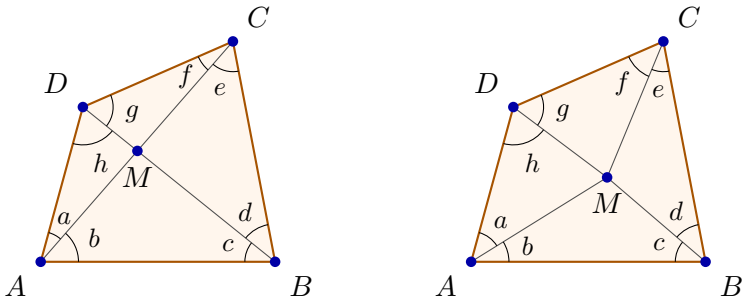
$$\begin{array}{llll} \angle DAM = a^\circ, & \angle MAB = b^\circ, & \angle ABM = c^\circ, & \angle MBC = d^\circ, \\ \angle BCM = e^\circ, & \angle MCD = f^\circ, & \angle CDM = g^\circ, & \angle MDA = h^\circ. \end{array}$$

Ekkor

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 360, \tag{3}$$

$$\sin(a^\circ)\sin(c^\circ)\sin(e^\circ)\sin(g^\circ) = \sin(b^\circ)\sin(d^\circ)\sin(f^\circ)\sin(h^\circ)\,. \tag{4}$$

A szorzategyenlet ismét a szinusztétel négy kis háromszögre való felírásából és az oldalhányadosok összeszorzásából következik. A létezéshez az általános szakaszban megadott pozitivitási és konvexitási feltételek is szükségesek.



2. ábra. Balra az átlók metszéspontja, jobbra egy általános belső pont.

Az átlók metszéspontjának külön feltételei

Ha $M = AC \cap BD$, akkor az átlók által meghatározott négy háromszög szögösszege további lineáris feltételeket ad:

$$\begin{array}{ll} b + c + d + e = 180, & d + e + f + g = 180, \\ f + g + h + a = 180, & h + a + b + c = 180. \end{array} \tag{5}$$

E négy egyenlet közül három független; belőlük a teljes 360°-os szögösszeg is következik. A belső pont körüli szögek sorrendben

$$180 - b - c, \quad 180 - d - e, \quad 180 - f - g, \quad 180 - h - a.$$

Az (5) feltételek biztosítják, hogy a szomszédos középponti szögek összege 180°, vagyis A, M, C, illetve B, M, D valóban egy egyenesre essenek. Általános belső pont esetén (5) nem követelhető meg.

Tompaszögek és egyértelműség. A négyszög nyolc részszöge között nemcsak egy tompaszög lehet. Átlós konfigurációban legfeljebb kettő lehet: a b, c, d, e, illetve f, g, h, a csoportok mindegyikének összege 180, így mindegyik legfeljebb egy tompaszöget tartalmazhat. A korlát elérhető.

Egyúttal a négy ismert szögből való egyértelmű meghatározásra is ellenpélda a következő két megoldás:

$$(a, b, c, d, e, f, g, h) = (30, 15, 30, 105, 30, 15, 30, 105),$$
$$(a, b, c, d, e, f, g, h) = (30, 105, 30, 15, 30, 105, 30, 15).$$

Mindkettőben $a = c = e = g = 30$, és mindkettőben két $105°$-os részszög van. A szögösszeg $4 \cdot 30 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 105 = 360$, az (5) egyenletek is teljesülnek, továbbá

$$(\sin(30°))^4 = \frac{1}{16}, \qquad (\sin(15°)\sin(105°))^2 = \left(\frac{1}{2}\sin(30°)\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

A konvexitási és pozitivitási feltételek szintén teljesülnek, így az általános tétel szerint mindkét konfiguráció létezik. Négy tetszőleges részszög ismerete tehát még az átlós esetben sem garantál *egyetlen* megoldást; általános belső pont esetén pedig folytonos szabadság is maradhat.

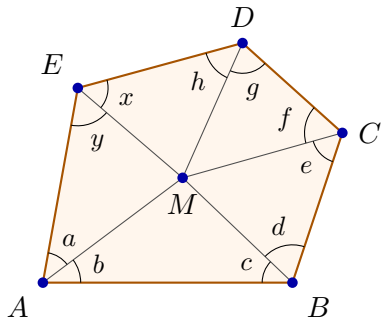
3. Diofantoszi ötszög-konfiguráció

Az $ABCDE$ konvex ötszög belső pontját kössük össze minden csúccsal. Az egymás utáni csúcsoknál a szögpárok (a, b), (c, d), (e, f), (g, h), (x, y); mindegyik pár első tagja az előző oldal és a belső ponthoz húzott szakasz közötti szög fokszáma. Ekkor

$$a + b + c + d + e + f + g + h + x + y = 540, \tag{6}$$

$$\sin(a°)\sin(c°)\sin(e°)\sin(g°)\sin(x°) = \sin(b°)\sin(d°)\sin(f°)\sin(h°)\sin(y°)\,. \tag{7}$$

Az $540°$-os szögösszeg a $(5-2)\cdot 180°$ képletből adódik; a szorzategyenlet öt szinusztételből következik. Az egészértékűség mellett itt is ellenőrizni kell az 5. szakasz geometriai egyenlőtlenségeit.



3. ábra. Ötszög egy belső ponttal.

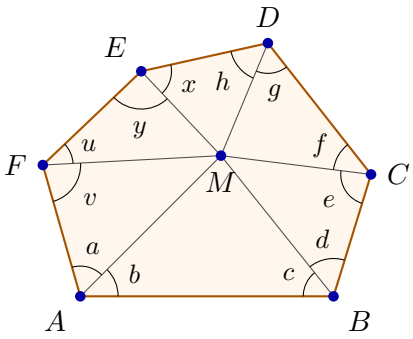
4. Diofantoszi hatszög-konfiguráció

Az $ABCDEF$ konvex hatszögnél a szögpárok rendre (a, b), (c, d), (e, f), (g, h), (x, y), (u, v). A két alapösszefüggés:

$$a + b + c + d + e + f + g + h + x + y + u + v = 720. \tag{8}$$

$$\sin(a°)\sin(c°)\sin(e°)\sin(g°)\sin(x°)\sin(u°) = \sin(b°)\sin(d°)\sin(f°)\sin(h°)\sin(y°)\sin(v°)\,. \tag{9}$$

A $720°$-os szögösszeg $(6-2)\cdot 180°$; a szorzategyenlet hat szinusztétel szorzata. A geometriai megvalósíthatóság feltételei ugyanazok, mint az általános esetben.



4. ábra. Hatszög egy belső ponttal.

5. Általánosítás: diofantoszi n-szög-konfiguráció

Legyen $n \geq 3$, és legyenek $V_1, \ldots, V_n$ egy szigorúan konvex sokszög csúcsai körüljárási sorrendben. Válasszunk M belső pontot, és kössük össze a csúcsokkal. Ciklikus indexeléssel ($V_0 = V_n$, $V_{n+1} = V_1$) legyen

$$\angle V_{i-1}V_iM = \alpha_i^\circ, \qquad \angle MV_iV_{i+1} = \beta_i^\circ.$$

A sokszög belső szögei $(\alpha_1 + \beta_1)^\circ, \ldots, (\alpha_n + \beta_n)^\circ$.

1. Tétel. *Az α_i, β_i fokszámok pontosan akkor valósíthatók meg egy szigorúan konvex n-szög és egy belső pont ilyen konfigurációjában, ha az alábbi feltételek mind teljesülnek:*

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i > 0, \quad \alpha_i + \beta_i < 180 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

$$\beta_i + \alpha_{i+1} < 180 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \alpha_{n+1} = \alpha_1), \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) = (n-2) \cdot 180, \tag{12}$$

$$\prod_{i=1}^{n} \sin(\alpha_i^\circ) = \prod_{i=1}^{n} \sin(\beta_i^\circ)\,. \tag{13}$$

A diofantoszi konfigurációhoz ezenfelül $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ szükséges.

Bizonyítás. Szükségesség. A pozitivitás a belső pont helyzetéből, az $\alpha_i + \beta_i < 180$ feltétel a szigorú konvexitásból következik. A MV_iV_{i+1} háromszög M-nél lévő szögének fokszáma

$$\gamma_i = 180 - \beta_i - \alpha_{i+1} > 0,$$

tehát (11) is szükséges. A sokszög szögösszege (12). Ha $r_i = MV_i$, a szinusztétel szerint

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = \frac{\sin(\beta_i^\circ)}{\sin\left(\alpha_{i+1}^\circ\right)}. \tag{14}$$

A hányadosokat összeszorozva, $r_{n+1} = r_1$ miatt, megkapjuk (13)-et.

Elegendőség. Tegyük fel, hogy a feltételek teljesülnek. Az (11) egyenlőtlenségből $0 < \gamma_i < 180$, és (12) alapján

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 180n - \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + \alpha_{i+1}) = 360.$$

Vegyünk fel M-ből induló, körüljárási sorrendben álló félegyeneseket, amelyek szomszédos szögei γ_i°-ok. Válasszunk $r_1 > 0$-t, és definiáljuk a többi sugarat (14) szerint. A (13) szorzatfeltétel biztosítja, hogy az utolsó lépésben visszakapjuk $r_{n+1} = r_1$-et. Így a háromszögek körben hézagmentesen záródnak.

Mindegyik szomszédos sugárpárhoz létezik olyan háromszög, amelynek szögei β_i°, α_{i+1}°, γ_i°. A szinusztétel szerinti sugárarány éppen (14); a két sugár hossza és közbezárt szöge ezért egyértelműen meghatározza ezt a háromszöget. A kapott szögek tehát valóban az előírtak.

A V_iV_{i+1} oldalak a megfelelő, 180°-nál kisebb szögű szektorokban futnak, így a sokszög egyszerű, és a háromszögek uniója M egy környezetét is tartalmazza. Az M pont belső pont, a sokszög belső szögei pedig $(\alpha_i + \beta_i)^\circ$-ok. Ezek (10) szerint mind kisebbek 180°-nál, tehát az egyszerű sokszög szigorúan konvex. □

A szögösszeg és a szinuszszorzat önmagában tehát általában nem helyettesíti a geometriai egyenlőtlenségeket. Az egészértékűség keresése viszont véges: a pozitív egész részszögek a konvexitási feltételek miatt legfeljebb 178 fokosak lehetnek.

Szabályos sokszög középponttal

Ha a sokszög szabályos, *és M a középpontja*, akkor

$$\alpha_i = \beta_i = \frac{(n-2)180}{2n} = 90 - \frac{180}{n}, \qquad \gamma_i = \frac{360}{n}.$$

A szögösszeg és a szorzategyenlet automatikusan teljesül. A konfiguráció azonban csak akkor egész fokszámú, ha n osztója 180-nak. Az $n \geq 3$ lehetőségek:

$$n \in \{3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180\}.$$

Például a szabályos nyolcszög középponti konfigurációjának részszögei 67,5°-osak, tehát ez nem egész fokszámú konfiguráció. A szabályosság önmagában, tetszőleges belső pont mellett nem jelenti, hogy minden részszög egyenlő.

A további vizsgálatokban konkrét példák és alkalmazások kereshetők a fenti teljes feltételrendszer segítségével, különösen nem szabályos, nem szimmetrikus konfigurációkban.

Hivatkozások

[1] M. Laczkovich: *Configurations with Rational Angles and Trigonometric Diophantine Equations*. In: B. Aronov, S. Basu, J. Pach, M. Sharir (szerk.), *Discrete and Computational Geometry: The Goodman–Pollack Festschrift*, Algorithms and Combinatorics 25, Springer, 2003, 571–595. DOI: 10.1007/978-3-642-55566-4_26.

[2] Béla Kovacs: *Diophantine Trigonometric Equations in Geometry*. Romanian Mathematical Magazine, 2026, online közlemény.

[3] C. E. Tripp: *Adventitious angles*. The Mathematical Gazette **59** (408), 1975, 98–106. DOI: 10.2307/3616644.

[4] J. F. Rigby: *Adventitious quadrangles: a geometrical approach*. The Mathematical Gazette **62** (421), 1978, 183–191. DOI: 10.2307/3616687.