

A Wallis-formula elemi bizonyítása

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A matematikai szakirodalomban közismert a π szám kifejezése végtelen szorzattal:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k}{2k-1} \right)^2 \quad (*)$$

Ezt a formulát John Wallis 1656-ban bizonyította. Azóta még sok más bizonyítás is született. A legtöbb bizonyítás a következő dupla egyenlőtlenségen alapul:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} < \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ebből a fogó tétel alapján azonnal következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (**) ami éppen a (*)

A dolgozat fő eredménye:

Tétel: Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén léteznek olyan $(a_n)_{n \geq 1}$ és $(b_n)_{n \geq 1}$ pozitív számsorozat, amelyre

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$, és fennáll az $\frac{1}{\sqrt{\pi n + a_n}} < \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{\pi n + b_n}}$ egyenlőtlenség-lánc!

Konstruktív módon indukcióval bizonyítottam, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n + \frac{\pi}{4} \frac{n+1}{n}}} < \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{\pi n + \frac{\pi}{4} \frac{n}{n+1}}}$$

Ebből a fogótétellel a (**) vagyis a (*) adódik.

Következmények: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{2k}{2k-1} \right)^2 - n\pi \right) = \frac{\pi}{4}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(n \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{2k} \right)^2 - \frac{1}{\pi} \right) = \frac{\pi}{4}$