Gondolatok a matematika tanításáról

Kolumbán József

Babeș–Bolyai Tudományegyetem, Matematika és Informatika Kar

jokolumban@yahoo.com

A jelenlevők bizonyára találkoztak már a matematika tanításával kapcsolatos gondokkal tanárként, de akár szülőként is. Előadásomban arra szeretnék röviden rámutatni, honnan erednek ezek a gondok, amelyek már régóta foglalkoztatják a szakembereket, amelyekről könyvtárnyi tanulmányt és könyvet írtak, és amelyek mégis szívósan élnek tovább. Úgy tűnik, új művészeti ág megszületésére van szükség, amelynek tárgya a matematika oktatása.

Nem célom a matematika iskolai tanításának módszereiről beszélni. A módszerek megválasztása másodlagos kérdés mindaddig, amíg a matematikatanítás évtizedekre visszanyúlóan hibás elgondolásokra épül, ezzel pedig diákgenerációk sorozatának torzítja el a matematikához való viszonyulását. A megfelelően megválasztott módszerek enyhíthetik valamelyest ezt a problémát, ám ez csak tüneti kezelés. Aki tanít, annak figyelembe kell vennie, hogy kit, mit, miért tanít, és azt mire lehet használni. Az oktatás mai gondjai éppen abból erednek, hogy ezeket sokszor szem elől tévesztjük. A gondok forrásai közül hárommal szeretnék most foglalkozni, ezek a következők: (1) a gyermeklélektan figyelmen kívül hagyása a matematika tanítása során, (2) a Bourbaki-féle axiomatikus módszer kialakulása, valamint (3) a 20. századi matematikának az oktatásra gyakorolt negatív hatása.

(1) Minden tudományterületen, amit ma érdemes tudni, az megtalálható a világhálón. Így helyénvalónak tűnik az a kérdés, hogy miért kell az iskolákban matematikát tanítani, miért kell a diákokat ezzel a „nehéz" tantárggyal „kínozni"? Nyilvánvalóan nem azért, hogy képleteket, szabályokat tanítsunk nekik, amelyeket rövid idő alatt elfelejtenek, ha nem alkalmazzák azokat nap mint nap. A mindennapi élet szempontjából – a gépies tevékenységekkel ellentétben – a jelenségek természetének, okainak megértése a legfontosabb, mert enélkül nem lehet újat alkotni az élet semmilyen területén. Sajnos, a matematikai tananyag jelentős része napjainkban még mindig memorizálásból és mechanikusan ismételt műveletekből áll. Jó példa erre a szorzótábla, ahol a gépies tanulás alapvető a matematikai teljesítményben. Holott, ha egy egészséges ötödik osztályos gyermek nem tudja kívülről a szorzótáblát, az nem olyan nagy baj, mint ha nem tudja megindokolni, hogy 3 x 2 miért 6.

Sok tanulóban nagyon korán kialakul egyfajta félelem a matematikával kapcsolatban, ami gátolja matematikai teljesítményének fejlődését. Ezt, a matematikai szorongásnak nevezett lélektani jelenséget Mark H. Ashcraft (1949–2022) amerikai pszichológus vizsgálta először. Például amikor egy diáknak nem sikerül megtanulnia a szorzótáblát fiatalon, szorongást fog átélni azért, mert társai képesek visszaemlékezni a fontosabb szorzatokra, míg ő nem. A matematikai szorongás mérésére skálát is kifejlesztettek (elsőkként Richardson és Suinn 1972-ben), amelyet később számos empirikus kutatás felhasznált a jelenség vizsgálatára. Ezek alapján kimutatható, hogy a matematikai szorongás összefügg a matematikai teszteken mutatott gyenge teljesítménnyel, a matematikával kapcsolatos negatív attitűdökkel és a matematika elkerülésére irányuló tendenciákkal. A matematikától való menekülés bűvös körként működik: felkészületlenséget eredményez, ami még több szorongást, aggódást, feszültségérzetet kelt a diákokban, ami még jobban elidegeníti őket a matematikától, és így tovább.

A matematikai szorongás gyakorta annak következtében alakul ki a tanulókban, hogy a tanár maga is szorong a matematika bizonyos területeire vonatkozó ismereteinek és képességeinek a hiányosságai miatt. A világ számos országában a leendő matematikatanároknak elegendő a vizsgákon 51%-ot elérniük, tehát az a tanárjelölt, akinek a matematikai tanterv 49%-át nem sikerült megértenie és befogadnia, még oktathat, és gyakran oktat is. Félelmeit és hiányosságait önkéntelenül átadja a diákjainak.

Másfelől, amint azt John Taylor Gatto (1935–2018) amerikai neveléstudós munkáiban kifejtette, a 20. század során kialakult modern nyugati iskolarendszer általában ideális talaj a félelem és a szorongás kialakulására. A probléma az, hogy – kimondva vagy kimondatlanul, merev hozzáállással – a diákoknak azt tanítják: egyetlen módon lehet eljutni a jó eredményhez, és bármilyen más út rossz, még ha a jó

megoldáshoz vezetett is. A levezetés jónak vagy rossznak értékelésével a tanulókat nem motiválják a próbálkozásra, a kísérletezésre. Az aktív tanulókat a konkrét, a tananyagra vonatkozó kérdéseken kívül az is foglalkoztatja, hogy „miért csináljuk így, és miért nem úgy?”. A tanárok azzal tennék a legjobbat a gyerekeknek, ha bátorítanák őket, hogy törekedjenek saját gondolataik megosztására és válaszaik igazolására a feladatok megoldása közben. Ezzel segíthetnének enyhíteni a tanulók matematikai szorongását és sikerélményhez juttathatnák őket.

A matematika tanítása során tapasztalható kudarcok sokszor abból erednek, hogy nem vesszük figyelembe az emberi gondolkodás általános pszichológiai sajátosságait, valamint a gondolkodásnak az egyes életkori szakaszokra jellemző eltéréseit. A múlt században a gyermelélektan nagy fejlődésnek indult. (...) Ennek az új ismeretágnak egyik első rendszeralkotója Jean Piaget (1896–1980) svájci pszichológus volt. Vizsgálódásai mindenekelőtt a gyermeki gondolkodást tárják fel azzal a (ma már közhelynek látszó, de a húszas években, Piaget fellépésekor eredeti és nehezen elfogadott) feltevéssel, hogy a gyermek gondolkodása, ítéletalkotása minőségileg más, mint a felnőtté, nem csak ismeretanyagban kevesebb, nem csak hiányosabb, hanem más – más a menete, más a szerkezete, másféle érvényességi igényt képvisel. Ezt a jelenségkört, ennek a minőségrendnek a fejlődését követte nyomon Piaget (lásd Majoros Mária: A matematikai gondolkodás leírásának történeti áttekintése. Matematika Oktatási Portál, http://matek.fazekas.hu/).

Gerald Hüther (szül. 1951-ben) német neurobiológus azt hangsúlyozta, hogy minden gyermek a játékon keresztül tanul, amely időigényes folyamat, amit nem lehet sürgetni, teljesítménykényszer alatt nem lehet eredményesen tanulni. Rossz irányba halad a pedagógia: mi határozzuk meg a tananyag mennyiségét, az elsajátítás sebességét, nem alkalmazkodunk a gyerek befogadóképességéhez, a gyermek tempójához. Ezt a modern agykutatásban idomításnak nevezik. A megkövült mintáktól szabadulni kell. A gyermekre fordított figyelem a legjobb tanácsadó. Hagyni kell a gyermekeket önállóan cselekedni a szabad idejükben, mert ekkor válnak kreatívvá, és nem akkor, amikor a szülők minden percüket beosztják. Hagyni kell, hogy valódi érzelmeket éljenek meg, hogy felismerjék ezeket, és meg is tudják fogalmazni, ki is tudják fejezni.

Piaget az 1950-es években kísérleti úton igazolta, hogy a gyermek gondolkodási készségei korfüggők. Például a 7–11 éves kor a konkrét műveletek szakasza: képekkel, gondolatban elképzelt dolgokkal, tevékenységekkel is képes a gyermek foglalkozni. Ez teszi lehetővé számára a számokkal végzett műveleteket a tárgyakkal való manipulálás helyett. Több szempontra is képes egyidejűleg figyelni. Állandósul a számfogalom, a mennyiségek (hosszúság, tömeg, terület, idő). 11 éves kor körül kezdődik a formális műveletek szakasza. A gyerekek képessé válnak szimbólumokkal végezni műveleteket, állításokkal, hipotézisekkel kapcsolatosan érvelni. Képessé válnak továbbá egyidejűleg osztályozni többféle szempont szerint, rendszerezni, nézőpontot váltani, visszafelé következtetni, és állandósul a térfogat fogalma, a mennyiségek aránya. Az absztrakt gondolkodás készsége általában 13 éves kor után fejlődik ki.

A matematika iránti pozitív motiváció már óvodáskorban kialakulhat. Ami érdekel bennünket, ami tetszik nekünk, ami felkelti a kíváncsiságunkat, azzal szívesen foglalkozunk, szívesen tanuljuk, minden megerőltetés nélkül, az megmozgat, tevékenységre sarkall. Ez érvényes a gyermekekre is, ezért fontos az oktatás szempontjából is. A gyermeklélektan fenti szempontjait minden oktatónak figyelembe kellene vennie. Ezek gyermekenként különbözők, és még akkor is figyelmet kell rá fordítanunk, ha egyszerre 25–30 gyermekkel foglalkozunk a tanítási órán.

(2) Mivel a panaszok nagy része a tananyag nehézségére vonatkozik (és ez kapcsolatos a fentiekkel), arról is kell szólnom, hogy a gyermekek többségének miért nehéz a matematika tanulása. Ahhoz, hogy a probléma lényegét és súlyát megértsük, 150 évet vissza kell mennünk a történelemben. 1874-ban jelent meg Georg Cantor (1845–1918) német matematikus *A valós algebrai számok halmazának tulajdonságairól* című korszakalkotó dolgozata, amely új fejezeteket nyitott a matematikában, és az akkori matematikusokat megdöbbentő állításokat is tartalmazott. Például ilyeneket: annyi racionális szám van, ahány természetes szám, minden pozitív hosszúságú szakasznak ugyanannyi eleme van, mint az egységnégyzetnek és az egységkockának, stb. Két tetszőleges halmaz esetén az „ugyanannyi eleme van” azt jelenti, hogy egyik halmaz a másikra kölcsönösen egyértelműen (mai szóhasználattal: bijektíven) leképezhető. (A dolgozat más érdekes eredményével kapcsolatban lásd például Sain Márton *Nincs királyi út!* című könyvét.)

A halmaz fogalmát Cantor a következőképpen értelmezte: „Halmazon a gondolkodásunk által jól meghatározott és jól elkülönülő objektumok valamely összességét értjük. Ezen objektumokat a halmaz elemeinek nevezzük.” Látható, hogy ez a meghatározás nem pontos, hanem körülíró, olyan, mint a közbeszédben

használatos absztrakt fogalmaink értelmezése (asztal, ember, demokrácia stb.). Néhány más tanulmány közlése után Cantor a halmazelmélet teljes felépítését az 1895-ben, illetve 1897-ben megjelent *Adalékok a transzfinit számok elméletéhez* című kétkötetes művében fejtette ki. Úgy nézett ki, hogy az egész matematika – beleértve a formális logikát is – felépíthető a halmazelméletre. És amikor a matematikusok többsége már elismerte a halmazelmélet fontosságát, Cantor észrevette, hogy elméletében vannak bizonyos logikai problémák. Villámcsapásként hatott a matematikusok körében, hogy 1897-ben Cesare Burali-Forti (1861–1931) torinói matematikus felfedezte a Cantor-féle halmazelmélet egyik ellentmondását. Egy másik ellentmondásra Bertrand Russell (1872–1970) angol matematikus mutatott rá. (Ellentmondásokat később mások is találtak.) A kiutat keresve David Hilbert (1862–1943) német matematikus rájött, hogy az ellentmondás okozója a halmaz fogalmának pontatlan értelmezése, és azt kezelni lehetne, ha a halmazelméletet olyan axiómákra építenék fel, amelyek a matematikában előforduló halmazok esetén teljesülnek. 1908-ban Ernest Zermelo (1871–1953) német matematikus megalkotta a halmazelmélet első axiomatikus felépítését, amelyet később Adolf Abraham Fraenkel (1891–1965) jeruzsálemi matematikus egészített ki. A Zermelo és Fraenkel axiómáival felépített halmazelméletből levezethető a korábbi ún. naiv halmazelmélet, és benne az ismert antinómiák nem lépnek fel. Ebből azonban nem következik az elmélet ellentmondás-mentessége. Kurt Gödel (1906–1978) osztrák matematikus 1931-ben bebizonyította, hogy ha a Zermelo-Fraenkel axiómarendszer ellentmondásmentes, akkor tartalmaz olyan állítást, amely benne nem eldönthető, és ez igaz az axiomatikusan felépített matematikára is (lásd Filep László *A tudományok királynője* című könyvét).

A módszereinek köszönhetően az axiomatikus halmazelmélet polgárjogot nyert mint önálló, érdekes és fontos matematikai elmélet, de igazi diadala csak az 1930-as években kezdődött. 1932-ben Andrej Nyikolájevics Kolmogorov (1903–1987) orosz matematikus próbálta a Brouwer-féle intuicionista logikát formalizálni. Ez vezette őt el a valószínűségelmélet axiomatikus felépítéséhez. 1934-ben megjelent az axiomatikus halmazelméletre épített *A valószínűségszámítás alapfogalmai* című, nagy feltűnést keltő munkája. Miután Hilbert axiomatikus módszerrel kidolgozta a róla elnevezett terek elméletét, ugyancsak 1934-ben francia matematikusok egy csoportja elhatározta, hogy az axiomatikus halmazelméletre építve, Hilbertéhez hasonló szellemben megírt könyvekben bemutatja a matematika fontosabb fejezeteit. 1939-tól tíz, többkötetes művet közöltek, amelyeken szerzőként a Nicolas Bourbaki álnevet tüntették fel. (Az 1870–71-es francia–német, illetve a krími háborúban szerepelt egy Bourbaki nevű tábornok.) A matematika elemei *(Éléments de mathématique)* könyvsorozat célja az volt, hogy bemutassák a modern matematikai elméleteket. (A halmazelméletben ismert jelöléseket, valamint az injektív, szürjektív, bijektív szakkifejezéseket is nekik köszönhetjük.) A tudóscsoport a matematika olyan újkori szintézisét, egységes fogalmakkal és módszerekkel rendelkező tudományként való tárgyalását kívánta megvalósítani, ami méltó az Euklidész *Elemek* című munkájában található gondos, precíz, és az ókori fogalmak szerint szinte teljes felépítéshez. A matematika teljes egységesítésére való törekvésük eredményesnek mondható; a huszadik századra teljesen átalakult a matematika képe.

Ezeket a könyveket először Franciaországban, később máshol is használták az egyetemi oktatásban. Amikor az 1960-as években a Bourbaki-matematika szemléletmódja és egyes fogalmai átszivárogtak az egyetemekről az iskolai oktatásba, világszerte „*új matematikáról*” kezdtek beszélni. A tanterveket és a tankönyveket ebben a szellemben újraírták. Ezeknek a hatásai sok országban – köztük Romániában is – érződtek és érződnek ma is.

Érdekességként megemlítjük, hogy a Bourbaki-matematika népszerűsítéséhez jelentősen hozzájárult a Szputnyik–1-nek, a világ első műholdjának az 1957. október 4-én (a kazahsztáni, mai bajkonuri űrrepülőtérről) történt fellövése Föld körüli pályára. Az eseményről az indítás másnapján a Pravda megjelentetett egy rövid hírt. Amerikában pánikként élték meg az emberek a „fejük felett repülő vörös űrhajót”. Az amerikaiak megértették, hogy a Szovjetuniónak olyan fegyver van a kezében, amellyel a világ bármely pontjára képes eljuttatni egy bombát, esetleg atomtöltetet is. Eisenhower elnök meghallotta az amerikai társadalom igényét a visszavágásra, és azonnal keresni kezdte a rendelkezésre álló projekteket, amelyekkel a hosszabb távra hozott intézkedésekkel (a NASA megalapítása) az országa mielőbb fel tud mutatni valamit a szovjet térnyerés ellensúlyozására. Többek között a Kongresszus sürgősséggel tárgyalta és iktatta be az 1958-as, *National Defense Education Act* (Nemzeti védelmi képzési törvény) jogszabályt, amely az amerikai iskolákban a matematika és természettudományok oktatásának hangsúlyosabbá tételéről rendelkezett az

addigiakhoz képest. Kézenfekvő ötlet volt, hogy a matematika oktatásába bevezessék ott is a Bourbaki-féle „új módszert”. Ezzel bekövetkezett a módszer világszintű meghonosodása.

(3) A matematikai ismeretek és fogalmak felépítésénél a Bourbaki-féle tankönyvek, valamint a hozzájuk tartozó tantervek megpróbáltak logikai szempontból egyre pontosabb felépítést követni. Ennek következtében a reformok és változtatások arra korlátozódtak, hogy logikai szempontból pontosították azt, hogy milyen matematikai ismereteknek kell megelőznie egy-egy új fogalom bevezetését. Ez valóban fontos kérdés egy axiomatikus felépítés esetén, de az emberi ismeretek nem axiomatikusan épülnek fel. Gondoljunk arra, hogy Newton hogyan fedezte fel a differenciálhányados fogalmát. Az egyenesvonalú egyenletes mozgás és a szabadesés példájából előbb értelmezte a pillanatnyi sebességet a körülírt végtelen kicsi fogalma segítségével. Az integrál fogalmának értelmezését ugyancsak fizikai jelenségek tanulmányozása előzte meg. A határérték fogalmának pontos értelmezése nélkül a differenciál- és integrálszámítás akadálytalanul fejlődött, az alkalmazások szempontjából minden lényeges fogalmát és tételét felfedezték. Csak közel 150 évvel később jött rá Cauchy, hogy a végtelen kicsi fogalma nem pontos, ezért a vele kapcsolatos tételek bizonyítása sem érvényes. Ettől függetlenül a differenciál- és integrálszámítás – köszönte szépen – megszületett, és kivirágzott. Ne feledkezzünk meg arról, hogy időközben olyan matematikusok munkálkodtak, mint Leibniz, a Bernoulli-testvérek, Euler, Lagrange stb.

A szakma legjobbjai – látva a Bourbaki-módszer negatív hatásait – tiltakoztak a módszernek az iskolai oktatásba való bevezetése ellen. 1963-ban amerikai matematikusok egy csoportja (köztük Pólya György is) referendumot nyújtott be a kormányhoz, de hiába. A matematikusok egy része azonban nem adta fel a káros matematikai oktatás elleni küzdelmet. Azt, hogy mit kifogásoltak, legvilágosabban Vlagyimir Igorjevics Arnold (1937–2010), a századforduló egyik leghíresebb matematikusa foglalta össze: a merev, formalista Bourbaki-matematika csúnya, és tanítása a tanulók ellen elkövetett bűn.

Meghívott egyetemi vendégtanárként 1997. március 7-én Arnold a matematika tanításáról Párizsban tartott tanácskozáson hangsúlyozta, hogy „A matematika a fizika része. A fizika kísérleti tudomány, a természettudományok része. A matematika a fizikának az a része, ahol a kísérletek olcsóak. A huszadik század közepén megpróbálták szétválasztani a fizikát és a matematikát. A következmények katasztrofálisnak bizonyultak. Matematikusok egész generációi nőttek fel úgy, hogy tudományuk felét sem ismerték, és persze teljes tudatlanságban minden más tudományról. Először a diákjaiknak, majd az iskolásoknak kezdték tanítani csúnya skolasztikus álmatematikájukat. Mivel a fizikától elszakított skolasztikus matematika nem alkalmas sem a tanításra, sem a más tudományokban való alkalmazásra, az eredmény a matematikusok iránti általános gyűlölet lett – mind a szegény iskolások, mind a felhasználók részéről. Ezen a ponton egy speciális technikát fejlesztettek ki a matematikában. Ez a technika a való világra alkalmazva néha hasznos, de néha önbecsapáshoz is vezethet. Ezt a technikát modellezésnek nevezik. Egy modell megalkotásakor a következő idealizálás történik: bizonyos tényeket, amelyeket csak bizonyos valószínűséggel vagy bizonyos pontossággal ismerünk, „abszolút” helyesnek tekintünk, és „axiómaként” fogadunk el. Ennek az „abszolútumnak” az értelme éppen abban rejlik, hogy megengedjük magunknak, hogy ezeket a „tényeket” a formális logika szabályai szerint használjuk, és eközben „tételnek” nyilvánítjuk mindazt, amit levezethetünk belőlük.A „tiszta” deduktív-axiomatikus matematika megteremtésére tett kísérletek a fizikában használt séma (megfigyelés – modell – a modell vizsgálata – következtetések – megfigyelésekkel való ellenőrzés) elvetéséhez és a definíció – tétel – bizonyítás sémával való felváltásához vezettek... Minden olyan kísérlet, amely arra irányul, hogy a fizikának és a valóságnak a matematikába való ilyen beavatkozását nélkülözze, szektásság és elszigetelődés, amely minden értelmes ember szemében lerombolja a matematikáról mint hasznos emberi tevékenységről alkotott képet.”

Ennek az előadásnak következményeként a Bourbaki-csoport meghátrált. Pierre Cartier, a csoport egyik tagja elismerte, hogy helytelen a matematikát úgy tanítani, ahogy a könyveikben le van írva, mert azok a matematika enciklopédiái. Ezeket tankönyveknek tekinteni katasztrófális tévedés.

Az axiomatikus halmazelmélet új ruhát biztosított a matematika szintetikus bemutatására, de ettől az nem sokat változott: a természettudományok „bábáskodásával” született és virágzott ki. Története különösen a fizikáéval mindig szorosan kapcsolódott és kapcsolódik ma is. Jó példa erre, hogy a folyadékok áramlásának tanulmányozása közben maga Arnold rendkívül fontos eredményekkel gazdagította a nemlineáris differenciálegyenletek elméletét. Ugyanakkor ritkaságszámba menő tanár volt. Különleges tehetsége volt ahhoz, hogy szép, új problémákat találjon, hogy felkeltse velük tanítványainak érdeklődését,

és bevonja őket a munkába. Rendkívüli előadó volt a matematikaoktatás minden szintjén. Nehéz, modern elméletek váltak egészen világossá és egyszerűvé az ő kifejtésében. A modern matematikaoktatást aligha lehetne jobban elképzelni, mint ahogy zseniális tankönyveiben le van írva.

Arnold határozottan és nyíltan bírálta a múlt század közepétől a matematikaoktatásban megnyilvánuló magas szintű absztrakciós tendenciát. Nagyon határozott véleménye volt arról, hogy az a felfogás, amelyet a Bourbaki-iskola testesített meg, negatív hatással volt a francia, majd később más országok matematikaoktatására is. Nagyon aggasztotta az, amit a matematika és a természettudományok 20. századi viszonylagos eltávolodása okozott. A Bourbaki-módszer legfontosabb hiányossága, hogy nem veszi (kellőképpen) figyelembe sem a matematikatörténet tanulságait, sem a matematika alkalmazhatóságát. Sajnos, ezeket a hibákat – például Romániában – ma is elkövetik.

Hogyan lehetne változtatni a matematikatanítás mostani helyzetén? Szerintem feltétlenül figyelembe kell venni Arnold meglátásait. Kétségtelen, hogy véleménye a matematikáról és annak tanításáról helyes. Őt kellene követniük azoknak is, akik a tanterveket összeállítják.

Különös figyelmet kell fordítani a matematika alkalmazásaira a fizikában és más tudományágakban, hiszen azokból erednek a matematika fogalmai és tételei. A tananyagból ki kell hagyni a fölösleges formalizmusokat, mint például a halmazelméleti ismereteket, bonyolult összefüggéseket, az indokolatlan általánosításokat és a nehézkes algoritmusokat. Ezáltal lehet csökkenteni a tananyagot. És még valami: értelmetlen az az elvárás, hogy a középiskolában tanítsunk meg minél többet abból, ami az alkalmazott tudományok elsajátításához szükséges. A lényeg az, hogy amit tanulnak a tanulók, azt értsék és tudják használni.