A sajátos aszimmetrikus norma és kapcsolata az aszimmetrikus vektornormával

Németh Sándor

Kolozsvár, Alleea Scarisoara 8, 34

Legyen $(X, \leq)$ valós, vektortér. A $P : X \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ funkcionál *aszimmetrikus norma*, hogyha:

1. Értelmezés. *1.* $P(tx) = tP(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X$;

2. $P(x + y) \leq P(x) + P(y),\ \forall x, y \in X$;

3. Ha $P(x) = P(-x) = 0$, *akkor* $x = 0$.

Legyen $(X, \leq)$ valós, rendezett vektortér. A $Q : X \to X$ leképezés *aszimmetrikus vektornorma*, hogyha:

2. Értelmezés. *1.* $Q^2 = Q$;

2. $Q(tx) = tQ(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X$;

3. $Q(x + y) \leq Q(x) + Q(y),\ \forall x, y \in X$;

4. Ha $Q(x) = Q(-x) = 0$, *akkor* $x = 0$.

Feltételezzük, hogy a $K = QX$ halmaz u.n. *csúcsos kúp*, azaz $K \cap (-K) = \{0\}$. Q *retrakció* a K kúpra.

Az aszimmetrikus vektornorma az aszmmetrikus norma természetes általánosítása ugyan de a kettő közötti lényeges különbséget a vektornorma első axiomája adja: utóbbi értékkészlete megegyezik értelmezési tartományával.

Az aszimmetrikus norma segítségével könnyen szerkeszthető asszimetrikus vektornorma a következőképpen:

3. Lemma. *Ha* $P : X \to \mathbb{R}_+$ *aszimmetrikus norma és* $u \in X$ *olyan elem, hogy* $P(u) = 1$, *akkor a*

$$Qx = P(x)u$$

képlettel értelmezett leképezés a $K = \{x = tu,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ *kúp értelmezte rendezés szerint aszimmetrikus vektornorma.*

Az aszimmetrikus vektornorma esetén a szublinearitás követelménye (2. és 3. axióma) igen erős feltétel. Ezeket a klasszikus rendezett vektortereknek igen kis része terljesíti. A 3 Lemma egy partikuláris de fontos aszimmetrikus vektornorma példáját szolgáltatja.

A P aszimmetrikus normához természetes módon rendelhető egy K kúp:

$$K = \{x \in X : P(x) = 0.\}$$

A P axiómáiból következik, hogy a K csúcsos kúp, tehát az általa értelmezett rendezés az X vektorteret rendezett vektortér struktúrával ruházza föl.

4. Lemma. *Ebben a rendezett vektortérben az*

$$Rx = x - P(x)u$$

összefüggéssel értgelmezett $R = I - Q$, $Q = P(.)u$ *leképezés aszimetrikus vektornorma, ha* P *u. n.* sajátos aszimmetrikus norma*, azaz, teljesíti a*

$$P(x - P(x)u) = 0,\ \ \forall x \in X.$$

föltételt.

5. Tétel. *A* $P : X \to \mathbb{R}_+$ *aszimmetrikus norma akkor és csak akkor sajátos, ha az általa generált norma szerint a*

$$K = \{x \in X : P(x) = 0\}$$

káup zárt , belseje nem üres és P *a kúp egy belső pontja szerinti Minkowski funkcionálja.*