AZ IZOTON PROJEKCIÓTÓL AZ IZOTON REGRESSZIÓIG

Németh Sándor

Babes-Bolyai Tudományegyetem

nemab@math.ubbcluj.ro

Az előadás célja az euklideszi tér izoton projekciós kúpjának értelmezése és annak bemutatása, hogy hogyan kapcsolódik a fogalom a matematikai statisztika izoton regresszióként ismert feladatához.

Jelölje $\mathbb{R}^m$ az m-dimenyiós euklideszi teret, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, a benne értelmezett skaláris szorzatot és $\|.\|$ az általa származtatott normát.

Legyen $K \subset \mathbb{R}^m$ *valódi kúp* , azaz a tér ollyan zárt része, amelyre (i) $K+K \subset K$ és (ii) $tK \subset K$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $K \cap (-K) = \{0\}$ és $K - K = \mathbb{R}^m$.

Az $x, y \in \mathbb{R}^m$ elemek esetén értelmezett $x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$ ekvivalencia által a térben értelmezhető a $\leq_K$ reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus bináris reláció, amit *rendezésnek* nevezünk.

A

$$K = \{t^1 x_1 + \ldots + t^m x_m : \ t^i \in \mathbb{R}_+, \ i = 1, \ldots, m\}$$

halmaz, ahol $x_1, \ldots, x_m$ lineárisan független elemek úgynevezett *szimpliciális kúp.*

Ha $y \in \mathbb{R}^m$ tetszsőleges elem, akkor legyen $P_K y$ az y *metrikus projekciója* K-ra, azaz az

$$P_K y \in K, \ \text{ és } \ \|y - P_K y\| = \inf\{\|y - x\| : \ x \in K\}$$

reláció értelmezte elem.

A K kúpot *izoton projekciós kúpnak* nevezzük, ha

$$x \leq_K y \Rightarrow P_K x \leq_K P_K y.$$

1. Tétel. *A $K \subset \mathbb{R}^m$ akkor és csak akkor izoton projekciós kúp, ha olyan szimpliciális kúp hogy maximális lapjainak normálisai páronként nem hegyes szöget alkotnak.*

(G. Isac and A. B. Németh: Monotonicity of metric projections onto positive cones of ordered Euclidean spaces, Arch. Math. vol. 46, pp. 568–576, 1986.)

1. A derékszögű vonatkoztatási rendszer $\mathbb{R}^m_+$-al jelölt pozitív ortánsa izoton projekciós kúp.

2. A

$$\kappa = \{x = (x^1, ..., x^m) \in \mathbb{R}^m : 0 \leq x^1 \leq x^2 \leq ... \leq x^m\}$$

kúp izoton projekciós kúp.

Az adott $y = (y^1, ..., y^m)$ pont esetén az

$$argmin_x \sum_{i=1}^{m} (y^i - x^i)^2$$

ahol $0 \leq x^1 \leq x^2 \leq ... \leq x^m$

az úgynevezett *izoton regresszió* feledata.

Észrevesszük, hogy a fönti összeg nem más mint az y és az x pontok távolságának négyzete, tehát a fönti feladat megoldása nem más mint

$$argmin_x = P_\kappa y,$$

azaz az y pontnak a κ kúpra való metrikus projekciója.

A izoton regresszió feladatának jelentős irodalma van. Több módszer is született a feladat megoldására.

Guyader és Jégou francia statisztikusok felismerték, hogy a κ kúp izoton projektivitása és ezen kúpok tulajdonságai lehetővé teszik bizonyos módszerek ekvivalenciájának bizonyítását.

(A. Guyader, N. Jégou, A. B. Németh, S. Z. Németh, A geometrical approach to iterative isotone regression, Appl. Math. Computation 227 (2014) 359-369.)

Az izoton regresszióval párhuzamosan nagy fontossága van a statisztikában az általános izoton regressziónak, amely a következőképpen fogalmazható meg:

Az adott $y = (y^1, ..., y^m)$ pont esetén az

$$argmin_x \sum_{i=1}^{m} (y^i - x^i)^2$$

ahol $x^k \geq 0, , \forall k$ és $x^i \leq x^j$ midőn $(i, j) \in (N, G)$, ahol utóbbi az inexek alkotta teljes rendezett gráf. Ha

$$K = \{x = (x^1, ..., x^m) \in \mathbb{R}^m : x^k \geq 0,\, \forall k,\, x^i \leq x^j\, \forall\, (i, j) \in (N, G),$$

akkor itt

$$argmin_x = P_K y.$$

A fönt értelmezett K kúpot *általánosított izoton regressziós kúpnak* nevezzük.

A probléma az, hogy K akkor és csak akkor izoton projekciós kúp, ha izomorf a κ kúppal. Tehát a kiterjesztett feladatra nem alkalmazhatók azok a megoldási módszerek, amelyek a standard izoton regressziós feledatra működnek.

Jelölje $\leq$ a koordinátánkénti rendezést az $\mathbb{R}^m$ térben azaz $x = (x^1, ..., x^m) \leq y = (y^1, ..., y^m)$ legyen akkor és csak akkor igaz, ha $x^i \leq y^i$, $\forall\, i$.

Keressük a $L \subset \mathbb{R}^m_+$ kúpot amelyre

$$x \leq y \Rightarrow P_L x \leq P_L y.$$

2. Tétel. *Izomorfizmustól eltekintve összesen $m(m-1)$ olyan L kúp létezik, amey a fönti tulajdonsággal rendelkezik. Minden K általánosított izoton regressziós kúp ehhez az osztályhoz tartozik.*

(A. B. Németh, S. Z. Németh: Isotonic regression and isotonic projection, Linear Algebra Appl. 404 (2016) 80-89.)