MAJDNEM HELYI KONTRAKCIÓK NEM ÖNLEKÉPEZŐ VÁLTOZATA

Zákány Mónika

Kolozsvári Műszaki Egyetem; Nagybányai Egyetemi Központ

zakanymoni@yahoo.com

A helyi kontrakciók és a gyenge kontrakciók fogalmának egybeolvadásából születtek a gyenge helyi kontrakciók. Ezen új típusú kontrakciók fixpontjait vizsgáljuk, pontosabban a nem önleképező változatát.

Kulcsszavak: gyenge helyi kontrakció, kontrakciós együttható, fixponttétel, helyi kontrakció

1. Értelmezés. *Legyen (X,d) metrikus tér. Ekkor $T : X \to X$ leképezést gyenge kontrakciónak vagy (δ, L)- kontrakciónak nevezzük,ha léteznek $\delta \in (0,1)$ és $L \geq 0$ állandók, úgy hogy*

$$d(Tx,Ty) \leq \delta \cdot d(x,y) + L \cdot d(y,Tx), \forall x,y \in X \tag{1}$$

2. Megjegyzés. *A gyenge kontrakciót először V. Berinde vezette be [3],2004- ben.*

3. Megjegyzés. *Mivel a távolság szimmetrikus, a gyenge kontrakció (1) feltétele helyettesíthető a következő egyenlőtlenséggel:*

$$d(Tx,Ty) \leq \delta \cdot d(x,y) + L \cdot d(x,Ty), \forall x,y \in X \tag{2}$$

amit az (1)- ből kapunk, ha kicseréljük x és y- t egymás közt.

Nyilvánvaló: annak bizonyításához, hogy T gyenge kontrakció, az (1) és (2) feltételeknek egyaránt teljesülniük kell.

A következő tétel megmutatja, hogy egy gyenge kontrakció folytonos minden fixpontjában az [1] alapján.

4. Tétel. *Legyen (X,d) teljes metrikus tér és $T : X \to X$ gyenge kontrakció. Akkor T folytonos bármely fixpontjában, azaz $\forall p \in Fix(T)$ pontban.*

A helyi kontrakciókat először Martins da Rocha és Filipe Vailakis vezette be [7] (2010- ben), itt tanulmányozták a fixpontok létezését és unicitását a helyi kontrakciók esetén.

5. Értelmezés. *Legyen F egy halmaz és legyen $\mathcal{D} = (d_j)_{j\in J}$ féltávolság-család, melyek F- en értelmezettek. Tekintsük $\mathcal{D}$ által az F- en értelmezett gyenge topológiát.*
Legyen r függvény, mely leképezi J halmazt önmagára. Ekkor $T : F \to F$ helyi kontrakció ($\mathcal{D}$,r) szerint, ha bármely j esetén, létezik $\beta_j \in [0,1)$ úgy, hogy

$$\forall f,g \in F, \quad d_j(Tf,Tg) \leq \beta_j d_{r(j)}(f,g)$$

Megpróbálunk a fent említett két kontrakcióból egy új kontraktív leképezést értelmezni: a gyenge helyi kontrakciókat.

6. Értelmezés. *A következő megfeleltetést, $d(x,y) : X \times X \to \mathbb{R}_+$ pszeudometrikának nevezzük, ha teljesíti az alábbi feltételeket:*

1. $d(x,y) = d(y,x)$
2. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
3. $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$

Metrikus terekben a 3. feltétel így alakul: $x = y \Leftrightarrow$d(x,y)=0

7. Értelmezés. *Legyen X egy halmaz és* $\mathcal{D} = (d_j)_{j\in J}$ *egy X-en értelmezett pszeudometrika-család. Tekintsük az X-en értelmezett,* $\mathcal{D}$ *család által meghatározott gyenge topológiát, melyet* σ*- val fogunk jelölni.*
Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sorozat* $\sigma - Cauchy$ *típusú, ha* d_j*-Cauchy sorozat,* $\forall j \in J$.
Az A⊂X részhalmaz szekvenciálisan σ*-teljes halmaz, ha bármely* σ*-Cauchy sorozat X- ből konvergens X-ben a* σ*-topológia esetén.*
Az A⊂X részhalmaz σ*-határos, ha* $diam_j(A) \equiv sup\{d_j(x,y) : x, y \in A\}$ *véges,bármely* $j \in J$.

8. Értelmezés. *Legyen* $r : J \to J$ *függvény. Ekkor* $T : X \to X$ *leképezést gyenge helyi kontrakciónak nevezzük (*$\mathcal{D}$*,r) szerint, ha bármely j esetén, léteznek* $\theta \in (0, 1)$ *és* $L \geq 0$ *állandók úgy, hogy*

$$d_j(Tx, Ty) \leq \theta \cdot d_j(x, y) + L \cdot d_{r(j)}(y, Tx), \forall x, y \in X \tag{3}$$

9. Megjegyzés. *A gyenge kontrakciók egy sajátos esetét jelentik a gyenge helyi kontrakcióknak, tekintve az (X,d) metrikus teret az X- en értelmezett pszeudometrika helyett. Továbbá, r függvény helyett az identikus leképezést kell tekintenünk a (3) összefüggésben, tehát r(j)=j.*

10. Értelmezés. *Az X tér* σ*- Hausdorff tér, ha a következő feltétel teljesül: minden x,y* $\in X$, $x \neq y$ *pár esetén, létezik j* $\in$*J úgy, hogy* $d_j(x, y) > 0$.
Ha A nemüres részhalmaza X- nek, akkor bármely $z \in X$ *esetén, tekintsük:*
$d_j(z, A) \equiv inf\{d_j(z, y) : y \in A\}$.

A következő tétel a gyenge helyi kontrakciók fixpontjának létezését biztosítja.

11. Tétel. *Legyen az* $r : J \to J$ *függvény és* $T : X \to X$ *gyenge helyi kontrakció (*$\mathcal{D}$*,r) szerint. Tekintsük* $A \subset X$ *nemüres,* σ*- határos, szekvenciálisan* σ*- teljes, és T- invariáns részhalmazt.*
Ha teljesül:

$$\forall j \in J, \quad \lim_{n\to\infty} \theta^{n+1} diam_{r^{n+1}(j)}(A) = 0 \tag{4}$$

akkor T függvény rendelkezik egy x^* *fixponttal az A halmazban.*

12. Megjegyzés. *Ha T teljesíti a (3) egyenlőtlenséget, úgy hogy* $L = 0$ *és* $r : J \to J$ *az identikus leképezés, akkor Vailakis tételét kapjuk meg [7] abban az esetben, ha megválasztjuk* $\theta = \beta_j$ *értéket.*
Továbbá, $d_j = d, \forall j \in J$ *esetben, ahol d = távolság az X halmazban, a jól ismert Banach kontrakciót kapjuk, az ő egyetlen fixpontjával.*
A következő tétel a gyenge helyi kontrakciók fixpontjának unicitását biztosítja.

13. Tétel. *Ha a 11.Tétel feltételeihez hozzáadjuk:*
(U) bármely rögzített $j \in J$ *esetén, létezik:*

$$\lim_{n\to\infty} (\theta + L)^n diam_{r^n(j)}(z, A) = 0, \forall x, y \in X \tag{5}$$

akkor az x^* *fixpont unicitása fennáll.*

SAJÁT EREDMÉNYEK

Tekintsük az X halmazt és legyen $\mathcal{D} = (d_j)_{j\in J}$ *az X halmazon értelmezett pszeudometrika-család. Legyen továbbá* σ *az X halmazon értelmezett gyenge topológia a* $\mathcal{D}$ *család segítségével.*
Legyen K zárt nemüres részhalmaza X-nek és $T : K \to X$ *nem önleképező gyenge helyi kontrakció, amely teljesíti az (5) egyenlőtlenséget.*
Ha $x \in K$ *eleget tesz az* $Tx \notin K$ *feltételnek, akkor mindig választani tudunk egy* $y \in \partial K$ *(K halmaz határa) úgy, hogy* $y = (1 - \lambda)x + \lambda \cdot Tx$*,* $(0 < \lambda < 1)$*, ami tulajdonképpen azt jelenti:*

$$d(x, Tx) = d(x, y) + d(y, Tx), y \in \partial K \tag{6}$$

Szükség lesz az alábbi fogalomra, melyet [4]- től kölcsönöztük:

14. Értelmezés. *Adott az X halmaz és legyen K egy nemüres részhalmaza X- nek, $T : K \to X$ nem önleképező függvény. Legyen $x \in K$ és $Tx \notin K$, valamint $y \in \partial K$ a megfelelő elemek, melyek teljesítik (8)-at. Ha ilyen x elemekre fennáll:*

$$d(y, Ty) \leq d(x, Tx), \tag{7}$$

legalább egy neki megfelelő $y \in Y$ elemre, akkor azt mondjuk, hogy T rendelkezik az (M) tulajdonsággal.

A következő tétel a nem önleképező gyenge helyi kontrakció fixpontjának létezését vizsgálja.

15. Tétel. *Adott az X halmaz és legyen K egy nemüres részhalmaza X- nek, $T : K \to X$ nem önleképező gyenge helyi kontrakció, azaz amelyre léteznek az $\theta \in (0, 1)$ és $L \geq 0$ állandók úgy, hogy*

$$d_j(Tx, Ty) \leq \theta \cdot d_j(x, y) + L \cdot d_{r(j)}(y, Tx), \forall x, y \in K \tag{8}$$

Feltételezzük, hogy a 11. tétel feltételei teljesülnek. Ha T rendelkezik az (M) tulajdonsággal, és teljesül Rothe határ-feltétele:

$$T(\partial K) \subset K, \tag{9}$$

akkor T- nek van fixpontja K- ban.

Hivatkozások

[1] *Berinde, V.,Pacurar,M. Fixed points and continuity of almost contractions Carpathian J. Math. 19 (2003) No. 1, 7-22*

[2] *Berinde, V., On the approximation of fixed points of weak contractive mappings Carpathian J. Math. 19 (2003) No. 1, 7-22*

[3] *Berinde, V., Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration Nonlinear Analysis Forum 9(2004) No.1, 43-53*

[4] *Berinde, V., Păcurar, M. Fixed points theorems for nonself single-valued almost contractions Fixed Point Theory, 14(2013), No. 2, 301-312*

[5] *Fang Jin-xuan, FIXED POINT THEOREMS OF LOCAL CONTRACTION MAPPINGS ON MENGER SPACES, Applied Mathematics and Mechanics, (English Edition, Vol. 12, No. 4, Apr. 1991)Published by SUT,Shanghai, China*

[6] *G. V. R. Babu, M. L. Sandhya, M. V. R. Kameswari, A note on a fixed point theorem of Berinde on weak contractions, Carpathian J. Math., 24 (2008), No.1*

[7] *Martins-da-Rocha,Filipe, Vailakis, Yiannis, Existence and uniqueness of a fixed point for local contractions, Econometrica, vol.78, No.3 (May, 2010) 1127-1141*

[8] *] I.A. Rus, Generalized Contractions and Applications, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001*

[9] *Schweizer, B., A. Sklar and E. Thorp, The metrization of statistical metric spaces, Pacific J. Math., 10 (1960), 673 - 675.*