Izoton retrakciók a rendezett euklideszi térben

Németh Sándor

Babes-Bolyai Tudományegyetem

nemab@math.ubbcluj.ro
nemab@math.ubbcluj.ro

Tételezzük föl, hogy az $\mathbb{R}^m$ téren értelmezett a reflexiv, tranzitiv és antiszimmetrikus $\leq$ bináris reláció.

A $\leq$ bináris relácóról föltételezzük, hogy természetes
módon csatlakozik a tér lineáris és topologikus struktúrájához, azaz:

1. Ha $x \leq y$ akkor $tx \leq ty$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$;
2. $x + z \leq y + z\ \forall\, z \in \mathbb{R}^m$;
3. Ha $x_n \to x$ és $x_n \leq y$, $\forall\, n$, akkor $x \leq y$.

A föltételeket teljesítő $(\mathbb{R}^m, \leq)$ kettőst *rendezett euklideszi tér*nek nevezzük.
A fönti föltételek azzal ekvivalensek, hogy

$$K = \{x \in \mathbb{R}^m :\ 0 \leq x\}$$

a rendezés *pozitív kúpja* teljesíti a következő föltételeket:

1. $tK \subset K\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+$;
2. $K + K \subset K$;
3. K zárt halmaz.

Mivel a rendezésről föltételeztük, hogy antiszimmetrikus, teljesül a $K \cap (-K) = \{0\}$ föltétel is.
A $\rho : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ leképezés *izoton* ha

$$\text{bármely } x \leq y \text{ esetén következik } \rho x \leq \rho y.$$

A ρ leképezés *retrakció*, ha idempotens, azaz

$$\rho^2 = \rho.$$

1. Példa.
Az $(\mathbb{R}^m, \leq)$ rendezett euklideszi tér *vektorháló* ha

$$\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^m\ \exists\ \sup\{x, y\} = x \vee y.$$

A $\rho x = x \vee 0 = x^+$ leképezés folytonos retrakció.
A rendezés K pozitív kúpja *hálókúp*.
A $K = cone\{x^1, \dots, x^m\} :=$

$$\{\lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_m x^m :\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m\}$$

halmazt, ahol $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^m$ lineárisan független vektorok, *szimpliciális kúp*nak nevezzük.
A szimpliciális kúp a

$$K = \{x \in R^m; \langle x, u_i \rangle \geq 0, i = 1, ..., n\}$$

ekvivalens formában is felírható, ahol $\langle ., . \rangle$ a skaláris szorzat, az u_i lineárisan független vektorok az x^i vektorokból kiszámíthatók.

Jugyin tétele:

A $K \subset \mathbb{R}^m$ akkor és csak akkor hálókúp, ha szimpliciális.

(A. Youdine: Solution des deux problèmes de la theéorie des espaces semi-ordonnés, Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS vol.23, pp. 418–422, 1939.)

(A vektorháló fogalma és alkalmazásai valahol a 19. század második feléből követhetők. Ezzel szembe a Jugyin tételben megfogalmazott alapvető eredmény meglepően késői.)

2. Példa.

Legyen K zárt konvex kúp, melynek belseje nem üres. Jelölje P_K a K-ra való metrikus projekciót.

A K kúpot *izoton projekciós kúp*nak nevezzük, ha P_K izoton retrakció.

K akkor és csak akkor izoton projekciós kúp, ha fölírható a következő formában:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^m; \langle x, u_i \rangle \geq 0, i = 1, ..., n\}$$

ahol az u_i vektorok lineárisan függetlenek és $\langle u_i, u_j \rangle \leq 0$ ha $i \neq j$.

(G. Isac and A. B. Németh: Monotonicity of metric projections onto positive cones of ordered Euclidean spaces, Arch. Math. vol. 46, pp. 568–576, 1986.)

Tehát az 1. Példa $\rho x = x^+$ leképezése és a 2. Példa P_K projekciója egyaránt izoton retrakció.

Az izoton projekciós kúp egy igen speciális hálókúp.

Tételezzük föl, hogy K olyan zárt konvex kúp, melynek a belseje nemüres és amely az

$$x \leq_K y \ \Leftrightarrow y - x \in K$$

reláció által reflexiv, tranzitiv, antiszimmetrikus és folytonos bináris relációt értelmez $\mathbb{R}^m$-ben.

Ha $\rho : \mathbb{R}^m \to K$ olyan folytonos izoton retrakció K-ra, hogy

$$(I - \rho)(\mathbb{R}^m) \cap (\rho - I)(\mathbb{R}^m) = \{0\},$$

akkor $(\mathbb{R}^m, \leq_K)$ vektorháló. (Azaz K szimpliciĺis kúp kell legyen.)

(S. Z. Németh: Isotone retraction cones in Hilbert spaces, Nonlinear Analysis, vol. 73, pp. 495-499 (2010).)

Tehát pusztán az izoton retrakció létezése, amelyhez egy látszólag gyönge föltétel társul, a K kúpra igen erős föltételt támaszt.

Pusztán izoton retrakciónak a léte a K kúp poliedralitását vonja maga után. (Azt hogy K véges számú zárt féltér keresztmetszete.)

(S. Z. Németh, A. B. Németh, About the existence of an isotone retraction onto a convex cone, J. Convex Anal. vol. 18., pp. 707-720 (2011).)

A K kúp polidralitása már akkor is következik, ha ρ olyan retrakció K-ra, hogy

$$x \leq_W y \ \Rightarrow \rho x \leq_K \rho y,$$

ahol $\leq_W$ tetszőleges zárt, konvex, nem-üres belsejű kúp által származtatott rendezés.