Hardy típusú egyenlőtlenségek éles konstanssal

Páles Zsolt és Paweł Pasteczka

Debreceni Egyetem Matematikai Intézete
Krakkói Pedagógiai Egyetem Matematikai Intézete
pales@science.unideb.hu, ppasteczka@up.krakow.pl

Hardy 1925-ben felfedezett klasszikus egyenlőtlensége azt állítja, hogy $0 < p < 1$ esetén minden nemnegatív tagú (x_n) sorozatra

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{1-p}\right)^{1/p}\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Knopp megmutatta, hogy ez az egyenlőtlenség $p < 0$ esetén is érvényes. Képezve a $p \to 0$ határátmenetet a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \leq e\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

egyenlőtlenséghez jutunk, amit pedig Carleman fedezett fel.

Ekkor a Hardy-, Knopp- és Carleman-egyenlőtlenségek mindannyian speciális esetei az alábbi általánosabb egyenlőtlenségnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} M(x_1,\ldots,x_n) \leq C_M\sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

ahol $M : \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ egy közép. Egy M közepet Hardy-típusúnak mondunk, ha a fenti egyenlőtlenség egy véges pozitív C_M konstanssal teljesül. A legélesebb C_M konstanst, amivel a fenti egyenlőtlenség fennáll, az M közép Hardy-konstansának nevezzük.

Az előadásban megadjuk a Hardy-típusú közepek egy tág osztályát és meghatározzuk a közepekhez tartozó Hardy-konstanst is.

Hivatkozások

[1] Páles, Zs.—Pasteczka, P.: *Characterization of the Hardy property of means and the best Hardy constants.* Math. Inequal. Appl. **19**(4) (2016), 1141–1158.

[2] Páles, Zs.—Persson, L.-E.: *Hardy type inequalities for means*, Bull. Austr. Math. Soc. **70**(3) (2004), 521–528.