Maradj talpon! - Josephusszal
- Kivonat -

Egy n $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ tagú gyerekcsapat körbe állva, kiszámolós játékot játszik és pedig úgy, hogy hangosan számolnak:1-2,1-2… Akire a 2-es jut, az kiáll a játékból. Az nyer, aki végig benn marad. Ha 1-től n-ig számozott helyekre állnak, akkor meg lehet-e a játék kezdetén mondani azt , hogy ki nyer?

A kérdés érdekes és nagyon sok kísérletet igényel, mire megtaláljuk a választ.

A probléma nem új keletű. Josephus Flavius ókori történetíró nevéhez fűződik az a legenda, mely szerint 40 társával együtt a zsidó – római háború során fogságba esett. Mivel a harcosok nem akartak római kézre kerülni, elhatározták, hogy öngyilkosok lesznek, éspedig nagyon érdekes módon: körbe állnak és minden harmadikat megölik. Josephus nem értett egyet ezzel a döntéssel, ezért előre kiszámolta, hova kell állnia, hogy utolsó maradjon a kiszámolás esetén.

A sajátos esetek vizsgálatakor Josephus-féle permutációk keletkeznek, melyeket elemezve megállapíthatjuk, hogy az eredmény a 2 hatványinak függvénye.

Ha $J\left(n\right)$- el jelöljük az n ember esetén utolsónak maradó sorszámát, és $n=2^m+l$, akkor: $J(n)=J(2^m+l)=2l+1$

Ezt az eredményt matematikai indukcióval igazoljuk.

A probléma megoldása szoros kapcsolatban van 2-es számrendszerrel. Ennek segítségével, binárisan felírva a feladatban szereplő számokat egyszerű rekurzióra jutunk:

Ha $n=\left(b_m b_{m-1}...b_1 b_0\right)_2$ ahol $b_m=1$, $b_i\in\{0,1\}$, $i=\overline{1,(m-1)}$ akkor $n=2^m+1$ és $J\left(n\right)=2l+1=2\left(b_{m-1}b_{m-2}...b_1 b_0\right)+1=\left(b_{m-1}b_{m-2}...b_1 b_0 1\right)$

Tehát a keresett eredményt binárisan úgy kapjuk meg, hogy az n bináris értékeit egyel balra csúsztatjuk, az első értéket pedig a végére írjuk.

Ha nem kettenként ejtjük ki a sorszámokat, hanem k-anként, akkor $J(n,k)$-val jelölve az utolsó bennmaradó értéket, a következő rekurziós képlethez jutunk:

$J(n,k)=[J(n-1,k)+k]\bmod n$ és $J(1,k)=1$.

A Josephus problémának általánosítása is ismert:

Még egy változót be lehet vezetni az n és k mellé, egy l értéket.

Általánosan: n szám közül minden k-t kiejtjük, de mindenki kap l életet. Az eredeti problémában l=1. Ebben az esetben $J(n,k,l)$ értékét kell meghatározni, és ekkor keletkeznek az $\left(n,k,l\right)$ típusú Josephus permutációk.

A dolgozat elején a gyermekjáték esetén felvetett problémára igenlő a válasz, a fent bemutatott képlettel meg lehet határozni a nyerőt.

Manapság divatos kvíz játék esetén is megfogalmazhatunk hasonló feladatot:

A *Maradj talpon!* kvíz játékban tíz játékos közül úgy válogat a kihívó játékos, hogy az 1-től számolva, minden másodikat választja ellenfélnék. Az utoljára kihívott játékosnak van a legtöbb esélye a győzelemre. Melyik sorszámú helyet válasszuk, ahhoz, hogy legnagyobb eséllyel benn maradjunk?

$J(10) = J(2^3 + 2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ Tehát az 5 számú hely a nyerő.

Mészár Julianna, Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta

Könyvészet:

[1] Donald E. Knuth, Ronald Graham, Oren Patashnik: Konkrét matematika, Műszaki kiadó, Budapest, 1998, 8 – 16 oldal

[2] Oxford - Matematika : Kislexikon
http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tkt/oxford-typotex/ch02s12.html

[3] Nagy Ádám: A Josephus probléma Egy túlélés matematikája, Révai Miklós Gimnázium, Győr
http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/tv2009/tv0907/nagy.pdfv

[4] Lei Wang, Xiaodong Wang: A Comparative Study on the Algorithms for a Generalized Josephus Problem
http://www.naturalspublishing.com/files/published/3457b055l1a55d.pdf

[5]Ion D Ion, E. Campu, A. Ghioca, N. Angelescu, N. Nedita, G. Streinu-Cercel, R. Ilie, B. Singer, Matematika, Tankönyv a XII. osztály számára, M, Ábel kiadó, 2002, 43 oldal

.