TANULÁS

- Egy algoritmus tanul, ha egy feladat megoldása során olyan változások következnek be a működésében, hogy később ugyanazt a feladatot vagy ahhoz hasonló más feladatokat jobb eredménnyel, illetve jobb hatékonysággal képes megoldani, mint korábban.
- A tanulás során változhat a feladat
  - reprezentációja (valószínűségi hálók)
  - megoldó algoritmusa (genetikus programozás)
  - heurisztikája (B' algoritmus)

1

Tanulási módok

- Felügyelt tanulás: Feladat-megoldás párok alapján.
  - Karakter felismerés
- Megerősítéses tanulás: Lépéssorozat-hasznosság párok alapján (csak adott feladat tanulására).
  - Kétszemélyes játék
- Felügyelet nélküli tanulás: Feladatok, illetve az azt megoldó lépések közötti összefüggéseket ismeri fel, és osztályozza azokat.
  - Asszociatív memória

2

Induktív tanulás

- Induktív tanulási modell
  - Az f leképezést tanuljuk meg az $(x_i, f(x_i))$ tanító példák (minták) alapján úgy, hogy előállítunk egy olyan h leképezést (hipotézist), amelyre $h \sim f$
- Adaptív (inkrementális) tanulás
  - A korábban talált h hipotézist egy új minta esetén anélkül módosítjuk, hogy a korábbi mintákat újra megvizsgálnánk.

3

Miért működik jól az induktív tanulás?

- Ha fenn áll a stacionaritási feltétel:
  - A tanító példák és a teszt-példák ugyanabból a populációból történő véletlen kiválasztással származnak, akkor
- bármely súlyos hibákkal terhelt hipotézis már kis számú példa vizsgálata után nagy valószínűséggel megbukik,
- azaz nem képzelhető el, hogy a rossz hipotézis a tanító példákra jó eredményt ad, és majd éles helyzetben félrevezet bennünket.

4

Hány példára van szükség ahhoz, hogy ne kapjunk rossz hipotézist?

- Legyen ε-nál nagyobb annak a valószínűsége, hogy egy rossz h hipotézis rossz eredményt ad egy tanító példára.
- Annak valószínűsége, hogy a rossz h mindegyik tanító példára (m darab) jó eredményt ad kisebb, mint $(1-\varepsilon)^m$
- Annak a valószínűsége, hogy a rossz hipotézisek ($H_{rossz} \subseteq H$) között van mindegyik példára jó eredményt adó hipotézis kisebb, mint
  - $|H_{rossz}|(1-\varepsilon)^m \leq |H|(1-\varepsilon)^m$.
- Tekintsük a δ-t a $|H|(1-\varepsilon)^m$ felső korlátjának. Ebből a tanító példák számosságára kapunk alsó korlátot:
  - $m \geq 1/\varepsilon(\ln(1/\delta) + \ln|H|)$

5

I. Logikai formulák tanulása

- Adott egy Q célpredikátum, amelynek csak néhány kiértékelését (tanító példák) ismerjük. Keressük a Q-val logikailag ekvivalens formulát.
- Egy hipotézis egy ilyen logikai formulát jelöl ki:
  - $H_i(x) \leftrightarrow Q(x)$
- Az összes hipotézis alkotja a hipotézis teret (probléma tér)

6

tanulás = keresés a hipotézistérben

- A tanulás során azt a hipotézist (hipotéziseket) keressük, amelyek az eddig vizsgált tanító példákra teljesülnek.
- A vizsgált hipotézis szempontjából a tanító példa lehet igazoló, vagy cáfoló. A cáfoló (hamis) tanító példa lehet
  - pozitív = a hipotézis szerint igaz,
    a célpredikátum szerint hamis
  - negatív = a hipotézis szerint hamis,
    a célpredikátum szerint igaz
- Speciális alakú példák speciális alakú logikai formulával jellemezhető

7

1. Döntési fák

- Egy objektumnak vagy egy szituációnak szeretnénk megítélni egy adott tulajdonságát (ezt a továbbiakban kérdésnek nevezzük) annak alapján, hogy néhány más tulajdonságát (attribútumait) ismerjük.
- Alkalmazzunk ehhez egy olyan irányított fát, amelynek minden nem-levél (belső) csúcsa egy attribútumot jelenít meg, az ebből kivezető élek pedig az attribútum lehetséges értékeit szimbolizálják.
- A fa levelei a kérdésre adható lehetséges válaszokat tartalmazzák.

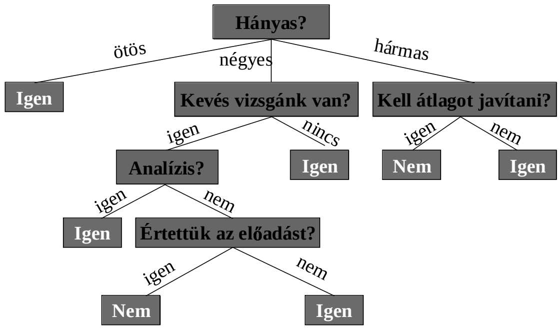
8

Példa

- Elfogadjuk-e a megajánlott vizsgajegyet?
  - Ha az ötös, akkor feltétlenül.
  - Ha négyes és kevés vizsgánk van és értettük az előadást, akkor nem; feltéve, hogy a tárgy nem az analízis.
  - Ha hármas és az átlagot kell javítanunk, akkor nem.
  - stb.

9

A példa egy döntési fája



10

Döntési fák kifejező ereje

- A döntési fa ágai (példák) speciális szabályokat reprezentálnak:
  - $\forall x\ Ajánlott\_Jegy(x,négyes) \wedge Kevés\_Vizsga(x,igen) \wedge Analízis(x,nem) \wedge Értettük(x,igen) \rightarrow \neg Elfogadjuk(x)$
  - Ilyen $\forall x\ P_1(x,v_1) \wedge \ldots \wedge P_m(x,v_m) \rightarrow Q(x)$ formula kifejezhető egy $p_{v_1} \wedge \ldots \wedge p_{v_m} \rightarrow q$ ítéletkalkulusbeli formulával is.
- A döntési fa egy $f{:}A_1\times\ldots\times A_m \rightarrow L$ logikai függvényt reprezentál; egy ág az $f(v_1, \ldots, v_n)$ esetet írja le, és fordítva: minden logikai függvényhez adható döntési fa.

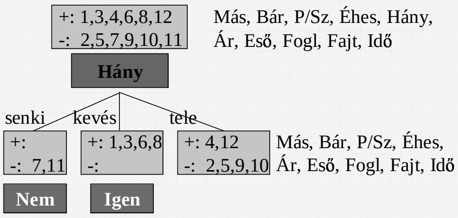
11

Étterem probléma (Russel-Norvig)

Pl.	Más	Bár	P/Sz	Éhes	Hány	Ár	Eső	Fogl	Fajt	Idő	Marad
1	I	N	N	I	kevés	drá	N	I	Fra	10	I
2	I	N	N	I	tele	olcs	N	N	Tha	60	N
3	N	I	N	N	kevés	olcs	N	N	Bur	10	I
4	I	N	I	I	tele	olcs	N	N	Tha	30	I
5	I	N	I	N	tele	drá	N	I	Fra	sok	N
6	N	I	N	I	kevés	köz	I	I	Ol	10	I
7	N	I	N	N	senki	olcs	I	N	Bur	10	N
8	N	N	N	I	kevés	köz	I	I	Tha	10	I
9	N	I	I	N	tele	olcs	I	N	Bur	sok	N
10	I	I	I	I	tele	drá	N	I	Ol	30	N
11	N	N	N	N	senki	olcs	N	N	Tha	10	N
12	I	I	I	I	tele	olcs	N	N	Bur	60	I

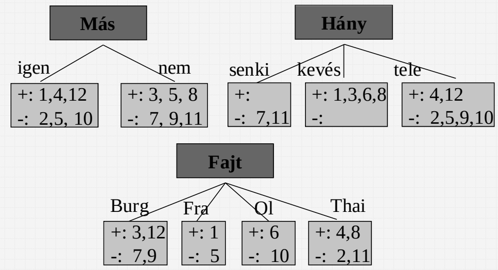
12

Étterem probléma első lépés



13

Alternatív lépések



14

Heurisztika

- Arra kell törekedni, hogy a döntési fa minél tömörebb, egy-egy ága minél rövidebb legyen, azaz
  - a választott attribútum (*a*) a példákat olyan részhalmazokra vágja szét, amelyeken belül a példák minél kevesebb attribútumban különböznek,
  - más szavakkal a szétvágás információs előnye, azaz a szétvágás előtt példa-halmaz (*P*) információ tartalmának és az utána kapott példa-részhalmazok ($P_{a=v}$) információ tartalmának (számosságuk szerinti súlyozott) összege közti különbség legyen minél nagyobb.

15

Információ tartalom

- A *P*-beli példák információtartalma (entrópiája):
  - A *P*-beli példák információtartalma (entrópiája):

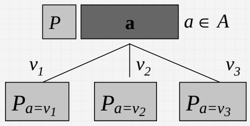
    $E(P) = E(p^+, p^-) = -p^+ \log_2 p^+ - p^- \log_2 p^-$
  - ahol p^+ a *P*-beli pozitív, p^- a negatív példák aránya ($p^+ + p^- = 1$)
- Példa:
  - Ha *P*-ben 2 pozitív és 3 negatív példa van:

    $E(P) = E(2/5, 3/5) = 0.97$
  - Ha *P*-ben 0 pozitív és 3 negatív példa van:

    $E(P) = E(0/3, 3/3) = 0$

16

Információs előny számítása

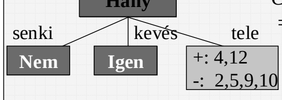


$$C(P,a) = E(P) - \sum_{v \in Érték(a)} \frac{|P_{a=v}|}{|P|} E(P_{a=v})$$

- ahol *P* a szülő csúcs tanító példái, *a* a választott attribútum,
- az *Érték(a)* az *a* attribútum által felvett értékek, és
- a $P_{a=v} = \{p \in P \mid p.a = v\}$

17

Étterem probléma második lépése



$C(P,a) = E(p^+, p^-) - \Sigma =$
$= E(2/6, 4/6) - \Sigma = 0.92 - \Sigma$

Más, Bár, P/Sz, Éhes, Ár, Eső, Fogl, Fajt, Idő

- Ha most a *Más* attribútumot választjuk, akkor a példák ketté válnak: 9 (*Más= hamis*), és 2, 4, 5, 10, 12 (*Más=igaz*),
- Az első csoportban egy negatív példa van, a másodikban két pozitív és három negatív.

$= 0.92 - (1/6\ E(0/1,1/1) + 5/6\ E(2/5,3/5)) = 0.92 - 0.81 = 0.11$

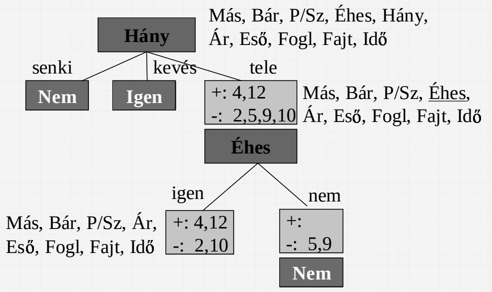
18

Étterem probléma második lépése

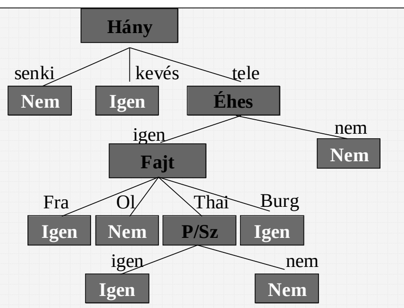
C(P,a)= 0.92 -

Más:	*1/6 E(0/1,1/1)+ 5/6 E(2/5,3/5)=*	*0.81*
Bár:	*3/6 E(1/3,2/3)+ 3/6 E(1/3,2/3))=*	*0.92*
P/Sz:	*1/6 E(0/1,1/1)+ 5/6 E(2/5,3/5)=*	*0.81*
Éhes:	*4/6 E(2/4,2/4)+ 2/6 E(0/2,2/2)=*	*0.67*
Ár:	*4/6 E(2/4,2/4)+ 0/6 E(0,0)+ 2/6 E(0/2,2/2)=*	*0.67*
Eső:	*5/6 E(2/5,3/5)+ 1/6 E(0/1,1/1)=*	*0.81*
Fog:	*4/6 E(2/4,2/4)+ 2/6 E(0/2,2/2)=*	*0.67*
Fajt:	*2/6 E(1/2,1/2)+ 1/6 E(0/1,1/1)+ 1/6 E(0/1,1/1)+ +2/6 E(1/2,1/2)=*	*0.67*
Idő:	*0/6 E(0,0)+ 2/6 E(1/2,1/2)+2/6 E(1/2,1/2) + 2/6 E(0/2,2/2)=*	*0.67*

Étterem probléma második lépése



Étterem probléma döntési fája



Döntési fák tanulása

- Egy épülő döntési fában vannak attribútumokkal vagy igen-nem értékkel címkézett, illetve címkézetlen csúcsok.
- Minden csúcs rendelkezik a tanító példák egy *P* részhalmazával, és a választható *A* attribútumokkal.
- Csak az attribútummal címkézett csúcsból vezetnek ki élek, és ezek az attribútum egy-egy lehetséges értékével van megcímkézve.

Algoritmus

- Kezdetben a fa egy címkézetlen (gyökér) csúcsból áll, amelyhez az összes tanító példát és attribútumot rendeljük.
- Adott egy címkézetlen csúcs:

1. Ha $P=\emptyset$, akkor levélcsúcsot kaptunk, amelynek értékét a szülőcsúcs példáinak többségi szavazása alapján döntjük el.
2. Ha *P* csak pozitív (vagy csak negatív) példából áll, akkor egy igen (illetve nem) levélcsúcsnál vagyunk.
3. Ha $A=\emptyset$, akkor is levélcsúcsot kaptunk, és a csúcs pozitív és negatív példáinak többségi szavazása alapján döntjük el annak értékét.
4. Egyébként ...

Algoritmus (folytatás)

4. Egyébként a legnagyobb információs előnnyel járó, még teszteletlen $a \in A$ attribútumot rendeljük az adott csúcshoz, majd generáljuk összes gyerekét:

   a) ezekhez az *a* lehetséges értékeivel címkézett élek vezetnek.

   b) Ha az *a* címkéjű csúcsból egy gyerekcsúcsába a *v* címkéjű él vezet, akkor az ahhoz rendelt
   - példák: $P_{a=v}=\{p \in P \mid p.a=v\}$
   - attribútumok: $A= A-\{a\}$

   c) Végül minden gyerekre ismételjük meg rekurzív módon az 1-4 pontokat.

Összefoglalás

- Döntési fa létrehozása példák alapján
  - induktív tanulással pozitív és negatív példák alapján
  - egy tanító példa sorozathoz több, azt kifejező döntési fa is megadható
  - a legkisebb döntési fa magadása egy nem megoldható probléma
- Döntési fa felhasználása
  - a tanító példákra tökéletes
  - a tanító példákhoz hasonló példákra többnyire jó

25

Megjegyzés

- Zaj: Két vagy több eltérő a besorolású példának attribútum-értékei megegyeznek. (lásd alg. 3.lépés)
  - Megoldás többségi szavazással.
- Túlzott illeszkedés: Például a kocka dobásra annak színe és dátuma alapján értelmetlen szabályszerűségeket találunk.
  - Megoldás a lényegtelen attribútumok (C(P,a)~0) félreállítása.
- Általánosítások:
  - Hiányzó adatok problémája
  - Sok-értékű attribútumok
  - Folytonos értékű attribútumok

26

2. Pillanatnyilag legjobb hipotézis

- Amikor egy új példa ellentmond az adott hipotézisnek,
  - ha az cáfoló pozitív, akkor szigorítjuk a hipotézist.
  - ha az cáfoló negatív, akkor gyengítjük a hipotézist.

27

Étterem probléma

- 1.példa (Más=I , … , Hány=kevés) pozitív, mint például a „*Más*” attribútuma
  - H_1 : *Más(x)* ↔ *Marad(x)*
- 2.példa (Más=I , … , Hány=tele) negatív, de H_1 alapján pozitív lenne (cáfoló pozitív). Szigorítjuk a „*Hány*” attribútummal, amely „*kevés*” érték mellett kizárja a 2.példát, de illeszkedik az 1.példához
  - H_2 : *Más(x)* ∧ *(Hány(x,kevés)* ∨ *Hány(x,senki))* ↔ *Marad(x)*

28

Étterem probléma folytatása

- 3.példa (Más=N) pozitív, de H_2 szerint (a „*Más*” feltétel miatt) negatív (cáfoló negatív). Gyengítjük a „*Más*” feltétel törlésével.
  - H_3 : *Hány(x,kevés)* ∨ *Hány(x,senki)* ↔ *Marad(x)*
- 4.példa (Hány=tele,…,P/SZ=I) pozitív, de H_3 szerint negatív (cáfoló negatív). Nem gyengíthetjük törléssel.
  - H_4 : *Hány(x,kevés)* ∨ *Hány(x,senki)* ∨ ∨ *(Hány(x,tele)* ∧ *P/Sz(x)* ↔ *Marad(x)*
  - H_4 : ¬*Vár(x,60)* ↔ *Marad(x)*
  - H_4 : *Hány(x,kevés)* ∨ *Hány(x,senki)* ∨ *(Hány(x,tele)* ∧ *Vár(x,30))* ↔ *Marad(x)*

29

Hátrány

- A fenti nem-determinisztikus módszer egy nagy keresési térben zajlik
- Amikor a hipotézis keresés zsákutcába jut, mert olyan hipotézishez jutunk, amelynek a módosítása egy újabb példánál már nem megoldható, akkor vissza kell lépnünk egy korábbi döntési ponthoz.
- A tanulás nem inkrementális: Vissza kell nyúlni az előző példákhoz

30

3. Legkisebb megkötés elvű keresés

- Az adott pillanatig vizsgált példákkal konzisztens összes hipotézist nyilvántartjuk (Ezt hívjuk verziótérnek)
- A verziótér kezdetben a teljes hipotézistér, amelyből fokozatosan töröljük a példáknak ellentmondó hipotéziseket.
- Megmutatható, hogy a verziótér mindig egyértelműen megadható, a leggyengébb konzisztens hipotézisek (***G***) és a legszigorúbb konzisztens hipotézisek (***S***) halmazával. Az összes többi konzisztens hipotézis e két halmaz „között” helyezkedik el.
- A tanító példák az ***S*** és a ***G*** „távolságát” csökkentik

Algoritmus

- Kezdetben ***S*** a hamis állításból, ***G*** az igaz állításból áll.
- Amíg egy hipotézis nem marad, vagy ***S*** illetve ***G*** üressé nem válik (nincs megoldás), vagy nincs több példa (ilyenkor vehetjük a verziótér hipotéziseinek diszjunkcióját.)
- addig minden új tanító példánál, ha az
  - az S_i -re cáfoló pozitív, akkor S_i -t töröljük az ***S***-ből.
  - az S_i -re cáfoló negatív, akkor S_i -t helyettesítjük annak összes közvetlen általánosításával.
  - az G_i -re cáfoló negatív, akkor G_i -t töröljük az ***G***-ből.
  - az G_i -re cáfoló pozitív, akkor G_i -t helyettesítjük annak összes közvetlen szűkítésével.

Egyszerűsített étterem probléma

(Más, Bár, P/SZ, Fogl)

- Kezdetben
  - ***S***={ *hamis* } és ***G***={ *igaz* }
- Az 1.példa (*I,N,N,I*) pozitív
  - ***S***-beli *hamis* állításra ez a példa cáfoló negatív ezért
  - ***S***={ $Más(x) \wedge \neg Bár(x) \wedge \neg P/SZ(x) \wedge Fogl(x)$ }
- A 2.példa (*I,N,N,N*) negatív, ami
  - ***G***-beli *igaz* állításra ez a példa cáfoló pozitív:
  - ***G***={$\neg Más(x) \vee Bár(x) \vee P/SZ(x) \vee Fogl(x)$ }

Megjegyzés

- Egy hipotézis közvetlen általánosításakor (a pozitív) tanító-példa feltételrendszeréből származó diszjunktív normálforma duális klózait ($C_1 \vee \dots \vee C_n$) külön-külön „hozzávagyoljuk” a hipotézishez.
  - ***S***={ … , S_i , … } → ***S***={ …, $S_i \vee C_1$, … , $S_i \vee C_n$, …}
- Egy hipotézis közvetlen szűkítésekor (a negatív) tanító-példa feltételrendszerének negáltjából származó konjunktív normálforma klózait ($C_1 \wedge \dots \wedge C_n$) külön-külön „hozzáéseljük” a hipotézishez.
  - ***G***={ … , G_i , … } → ***G***={ …, $G_i \wedge C_1$, … , $G_i \wedge C_n$, …}

Egyszerűsített étterem probléma

(Más, Bár, P/SZ, Fogl)

- A 3.példa (*N,I,N,N*) pozitív, ami
  - ***S***-beli állításra ez a példa cáfoló negatív :
  - ***S***={ $(Más(x) \wedge \neg Bár(x) \wedge \neg P/SZ(x) \wedge Fogl(x)) \vee$
    $(\neg Más(x) \wedge Bár(x) \wedge \neg P/SZ(x) \wedge \neg Fogl(x))$ }
- A 4.példa (*I,N,I,I*) pozitív, ami
  - ***S***-beli állításra ez a példa cáfoló negatív :
  - ***S***={$(Más(x) \wedge \neg Bár(x) \wedge \neg P/SZ(x) \wedge Fogl(x)) \vee$
    $(\neg Más(x) \wedge Bár(x) \wedge \neg P/SZ(x) \wedge \neg Fogl(x)) \vee$
    $(Más(x) \wedge \neg Bár(x) \wedge P/SZ(x) \wedge Fogl(x))$ }

Egyszerűsített étterem probléma

(Más, Bár, P/SZ, Fogl)

- A 5.példa (*I,N,I,I*) negatív, ami
  - ***S***-beli állításra ez a példa cáfoló pozitív, ezért
  - ***S*** = {}
  - ***G***={$\neg Más(x) \vee Bár(x) \vee P/SZ(x) \vee Fogl(x)$ } állításra hamis pozitív, de nem érdemes módosítani.
- Itt tehát nincs megoldás. (Az 5. példa ellentmondott a 4. példának)