


1. Egy ember kecskét, farkast és káposztát szeretne átvinni egy folyón, de csak egy csónakot talál, amelybe rajta kívül csak egy tárgy fér. Hogyan tud a folyón úgy átkelni, hogy
  - (a) a farkas ne falja fel a kecskét,
  - (b) a kecske ne egye meg a káposztát?

(bekövetkezne, ha ezek felügyelet nélkül együtt maradnának)


Reprezentáljuk a feladatot keresési feladatként. Azaz:

- (a) határozzuk meg a feladat állapotterét;
  - (b) adjuk meg az elfogadható állapotokat; <sup>1</sup>
  - (c) írjuk fel az operátorokat (műveleteket) és építsük fel a gráfot;
  - (d) határozzunk meg egy utat – azaz megoldást a feladatra.
2. Öten szeretnének egy hídon átmenni a sötétben. A híd egyszerre csak két embert bír meg és az átjutáshoz szükség van egy lámpára. Az öt részvevő sebessége különbözik: 1, 3, 6, 8, illetve 12 időegységre van szükségük ahhoz, hogy átjussanak a másik partra. Amennyiben ketten mennek a hídon, a haladási sebességük megegyezik a lassabban haladónak a sebességével. Ha a lámpában harminc időegységre elegendő olaj van, keressünk egy módozatot arra, hogy mindenki átjusson.
    - (a) Határozzunk meg egy állapotteret a feladatnak.
    - (b) Írjunk egy algoritmust, mely talál megoldást.
  3. Hatan szeretnének átmenni egy folyón, három kannibál és három misszionárius. Rendelkezésre áll egy csónak, mely legtovább két embert bír el. A kannibálok csak akkor nem eszik meg a misszionáriusokat, ha nincsenek többen azoknál a folyó egyik partján. Találjunk egy módszert arra, hogy mind a hatan átjussanak a másik partra.
    - (a) Határozzunk meg egy állapotteret a feladatnak.
    - (b) Írjunk egy algoritmust, mely talál megoldást.
  4. Három korsónk van: egy nyolcliteres, egy ötliteres, illetve egy háromliteres - egyiken sincs szintjelölés. A korsókat mérésre használjuk: egy edényt meg tudunk tölteni egy másik edényből, azonban addig kell töltsük a folyadékot (bort), ameddig az egyik edény megtelik vagy kiürül (például a teli háromliteres korsóból az üres ötliteresbe töltés során kiürítjük a kisebb korsót). Feladat, hogy a teli nyolcliteres kancsóban levő folyadékot osszuk kettőbe: a nyolc- és ötliteres kancsóban legyen négy-négy liter folyadék.
    - (a) Határozzuk meg a feladat állapotterét;
    - (b) Írjuk meg a „töltögetés” szabályait: rögzítsük a feltételeket, melyekkel egy adott állapotban egyik korsóból a másikba lehet tölteni, illetve határozzuk meg azt, hogy mennyit.
    - (c) Írjunk egy kereső programot, mely adott számhármásra – a fentiekben ez (3, 5, 8) – talál egy lépés-sorozatot, mely a cél-állapotba visz. (<http://www.inf.unideb.hu/~jeszy>)
  5. Fedjük le egy sakktáblát 21 darab  $3 \times 1$ -es téglával (alakjuk ) úgy, hogy csak egy kocka maradjon üresen.
    - (a) Ábrázoljuk a feladatot: adjuk meg az állapotteret, a kezdőállapotot, valamint írjunk feltéltelt a cél-állapotra.
    - (b) Írjunk egy függvényt (predikátumot), mely egy állapotból generálja a lehetséges lépéseket.
    - (c) Írjunk programot (predikátumot), mely talál egy megoldást.
    - (d) Keressünk megoldásokat, melyek a (8, 8)-as koordinátájú mezőt hagyják üresen.

<sup>1</sup>Javaslat: kizárással vagy logikai formulával.

(e) Ábrázoljuk grafikusan a megoldásokat.

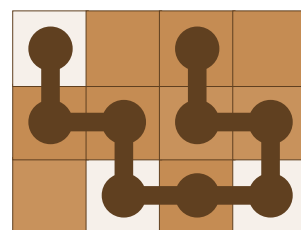
(<http://www.inf.unideb.hu/~jeszy>)

6. Egy  $2^N \times 2^N$  méretű sakktáblát szeretnénk lefedni három négyzetből álló téglákkal, melyek háromszög alakúak a következő minta szerint: 

- Bizonyítsuk be, hogy minden  $2^N \times 2^N$  tábla – egy négyzet üresen hagyásával – lefedhető a téglákkal (forgatás és transláció felhasználásával).
- A hiányzó négyzet pozíciójának a függvényében adjuk meg a tábla egy lefedését.
- Vizsgáljuk meg, hogy egyedi-e a lefedés.
- Mennyire bonyolult egy szokványos Prolog visszalépő algoritmus? Keressünk egy jobb algoritmust!

7. A mellékelt ábrán egy sötét és világos mezőkből álló táblára egy csuklókkal összekapcsolt testrészből álló kígyót helyeztünk. A kígyó előre és hátra mozoghat (tehát *nincs feje*) egy mezőnyit. Minden lépésben egy mezőn csak egy testrész (csukló) lehet. A kígyót úgy kell mozgatni, hogy a testének minden része sötét mezőkre kerüljön.

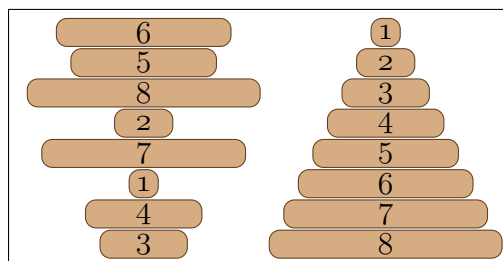
Az előző feladatokhoz hasonlóan építsük fel a feladat állapotterét; írjunk függvényt, mely egy állapot összes következő állapotát megadja, majd generáljuk azt a lépés-sorozatot, mely a mellékelt állapotból olyan állapotba visz, ahol **nincs** a fehér mezőkön kígyó. Írjunk egy szimulátort, mely megjeleníti az eredményt.



(<http://www.inf.unideb.hu/~jeszy>)

8. A mellékelt ábrán látható nyolc korongot kell csökkenő sorrendbe helyezni egymásra úgy, hogy **csak az oszlop felső**  $n$  korongját lehet mozgatni. A mozgatás azt jelenti, hogy *felcseréljük* a felső  $n$  korong sorrendjét (az  $n$  lehet természetesen nyolc is).

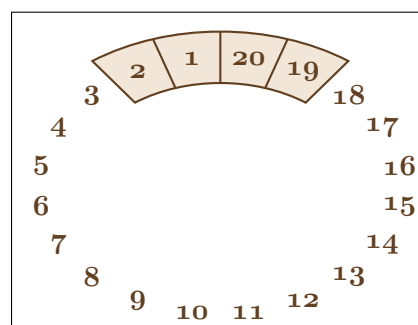
- Határozzuk meg a feladat állapotterét.
- Írjunk függvényt, mely egy állapot **összes** következő állapotát visszatéríti.
- Generáljuk a mellékelt állapotból a rendezett állapotba vivő lépés-sorozatot. Keressük meg a legrövidebbet.
- Írjunk egy szimulátort, mely megjeleníti a lépéseket.



(<http://www.inf.unideb.hu/~jeszy>)

9. Tekintsünk egy számsort, melyet egy körön helyeztünk el. A kör mentén a számok növekvő sorrendbe vannak téve, a sorrend az óra járásával ellenkező. A számokat egyszerre négyesével tudjuk mozgatni, úgy hogy a négy szám egymás melletti. A mellékelt ábrán a  $[2, 1, 20, 19]$  számsort választottuk ki, ezt helyettesítjük a  $[19, 20, 1, 2]$  számsorral ugyanazon pozíciókon, balról jobbra.

**Feladat:** az egész számsort rendezzük növekvő sorrendbe, az irány egyezzen meg az óra járásával.



- Ábrázoljuk a feladatot: jelöljük ki a változókat.
- írjunk függvényt, mely teszteli azt, hogy jó-e a megoldás.
- Írjunk egy algoritmust, mely egy kezdő-pozícióból megkeresi azon lépéseket, melyekkel el tudunk jutni egy végső pozícióba.
- Írjunk egy szimulátort, mely megjeleníti a lépéseket.

(<http://www.inf.unideb.hu/~jeszy>)

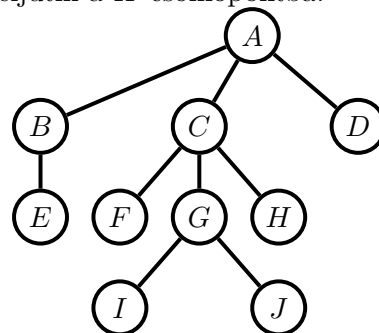
10. Legyen a következő tudásbázis:

- Fáradt**  $\implies \neg$ **Focizik**
- Focizik**  $\implies$  **Egészséges**
- $\neg$ **Egészséges**  $\implies$  **Fáradt**
- $\neg$ **Focizik**  $\implies \neg$ **Szomjas**
- $\neg$ **Szomjas**  $\implies \neg$ **Iszik**

Ismerve azt, hogy **Iszik**, vezessük le, hogy **Egészséges**.

11. Adott a mellékelt gráf, melyben az *A* csomópontból szeretnénk eljutni a *H* csomópontba. Írjuk fel a meglátogatott csomópontokat sorrendben, ha a keresési stratégia a

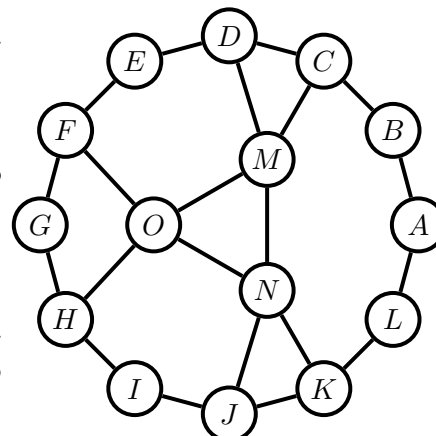
- (a) szélességi keresés, és csomópontokat balról jobbra terjesztünk ki;
- (b) szélességi keresés, és csomópontokat jobbról balra terjesztünk ki;
- (c) mélységi keresés, és csomópontokat balról jobbra terjesztünk ki.



12. Adott a mellékelt gráf.

Milyen sorrendben járja be a mélységi keresési stratégiával a *C*-ből a *I*-t kereső algoritmus a gráfot, ha:

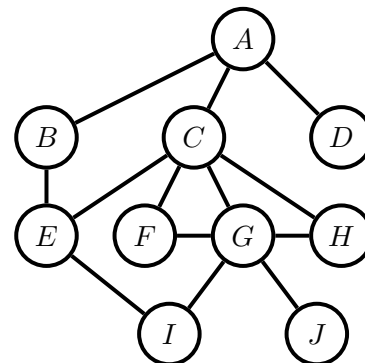
- (a) A keresés során az azonos szinten lévő csomópontok közül mindig a 12-től induló, óramutató járásával ellenkező irányba haladunk?
- (b) Mi lesz a bejárési sorrend, ha az irányt az óramutató járásának megfelelőre változtatjuk?
- (c) Írjuk fel a csúcsok bejárési sorrendjét, ha az *I*-ből az *A*-ba szeretnénk eljutni a szélességi bejárást és az óramutató járásával megegyező irányt használjuk.



13. Adott a mellékelt gráf.

Milyen sorrendben járja be a mélységi keresési stratégiával a *B*-ből a *H*-t kereső algoritmus a gráfot, ha a

- (a) keresés során az azonos szinten lévő csomópontok közül mindig a 12-től induló, óramutató járásával ellenkező irányba haladunk?
- (b) Mi lesz a bejárési sorrend, ha az irányt az óramutató járásának megfelelőre változtatjuk?



14. Írjuk fel a fenti gráf esetére a csúcsok bejárési sorrendjét, ha az *I*-ből az *A*-ba szeretnénk eljutni a szélességi bejárást és az óramutató járásával megegyező irányt használjuk.

15. Legyen a következő tudásbázis:

- |   |  |
|---|--|
| (a) Az <i>angolnak piros háza</i> van.              | (i) A <i>doktor szomszédjának lova</i> van.      |
| (b) A <i>spanyolnak kutya</i> ja van.               | (j) Az <i>angol szomszédja művész</i> .          |
| (c) A <i>japán detektív</i> .                       | (k) A <i>művész szomszédjának róka</i> ja van.   |
| (d) A <i>francia teát</i> iszik.                    | (l) Az <i>ügyvéd paradicsomlevet</i> iszik.      |
| (e) A <i>fehér ház a zöld ház</i> jobb oldalán van. | (m) A <i>mérnöknek macskája</i> van.             |
| (f) A <i>középső házban tejet</i> isznak.           | (n) A <i>zöld házban kávé</i> t isznak.          |
| (g) A <i>norvég háza</i> balról az <i>első</i> .    | (o) A <i>norvég házával szomszédos ház kék</i> . |
| (h) A <i>sárga ház a doktoré</i> .                  |  |

Válaszoljunk a következő kérdésekre: (1) **Ki iszik sört?** (2) **Kinek van zebrája?**

A feladatban a mutatók legyenek a nemzetek nevei: [Angol, Japán, Norvég, Francia, Spanyol]. Ekkor minden entitáshoz tudunk rendelni egy házzsín, egy állatot, egy foglalkozást, valamint egy italt. A tények leírásához szükséges a szomszédsági kapcsolatoknak is a kódolása. Ugyanis abban az esetben, ha ismerjük egy-egy ház pozícióját, a többi attribútumot meg tudjuk feleltetni egy-egy oszlopnak.

Egy megoldás tehát az, hogy a különböző helyek szerint végezzünk backtracking-et.

16. **Formalizáljuk és oldjuk meg rezolúcióval**

Ásványi Tibor, ELTE

- A következő tények alapján:
  - Ha süt a nap, akkor Péter strandra megy;
  - Ha Péter strandra megy, akkor úszik.
  - Péternek nincs lehetősége otthon úszni.

lássuk be, hogy ha süt a nap, akkor Péter nem marad otthon. (Miért kell a harmadik mondat?)

- Egy dolgozó elhatározásai
  - ha nem emelik a fizetését, akkor elmegy a munkahelyéről máshová dolgozni, vagy kevesebb időt tölt bent és külön munkát vállal.
- Kiderült, hogy sem a fizetését nem emelik, sem a munkaidejét nem tudja csökkenteni. Lássuk be, hogy a dolgozó nem marad a munkahelyén.
- Ha János nem találkozott akkor éjjel Dénessel, akkor vagy Dénes a gyilkos vagy János hazudik. Ha nem Dénes a gyilkos, akkor János nem találkozott akkor éjjel Dénessel, és a gyilkosság éjfél után történt. Azonban ha a gyilkosság éjfél után történt, akkor Dénes gyilkos vagy János hazudik.
 

Helyes arra következtetnünk, hogy Dénes gyilkos?
- Nincs olyan autókereskedő, aki használt autót vásárolna a családjának. Vannak tehetős emberek, akik használt autót vásárolnak a családjuknak. Lássuk be, hogy van olyan tehetős ember, aki nem autókereskedő.
- Kockákból és gúlákból tornyokat építünk. Minden kockán van valamilyen test. Lássuk be, hogy minden kocka fölött van gúla.

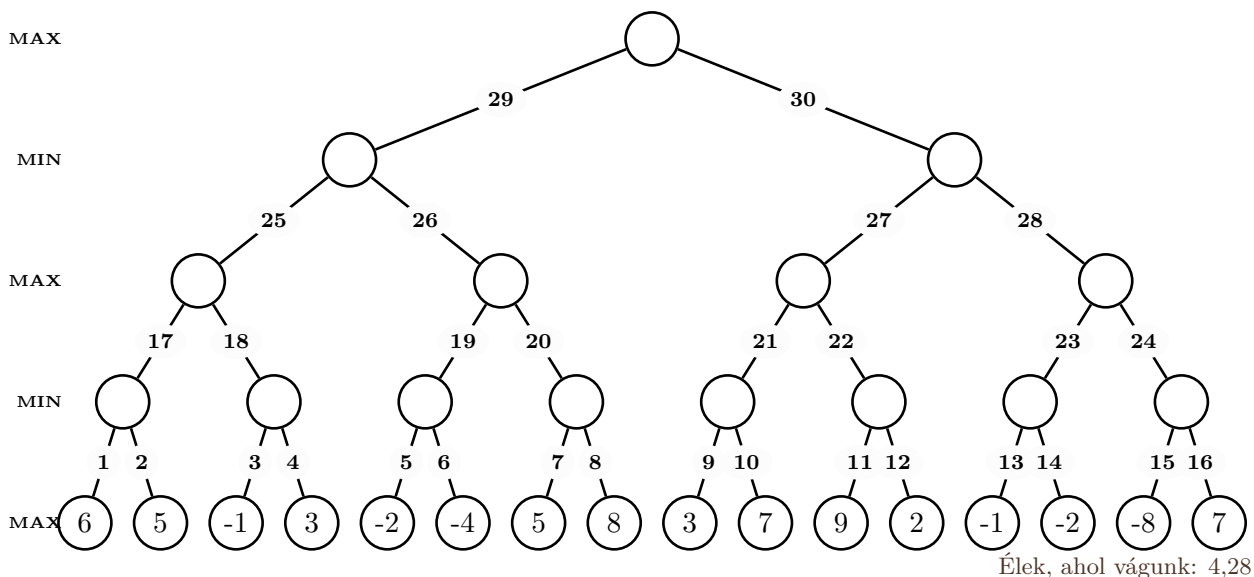
17. Ábrázoljuk a következő szövegrészletet szemantikus hálókkal:

*Az aorta egy 2.5cm átmérőjű artéria. Az artéria egy ér-típus. Egy érnek általában izomrostos fala van és általában 0.4cm átmérőjű. A véna is egy vérér-típus, azonban sima szövetes fallal. Az erek mindig cső-szerűek és vér van bennük. Ez alól kivétel a nyirokér, mely nem vért, hanem nyirokfolyadékot szállít.*

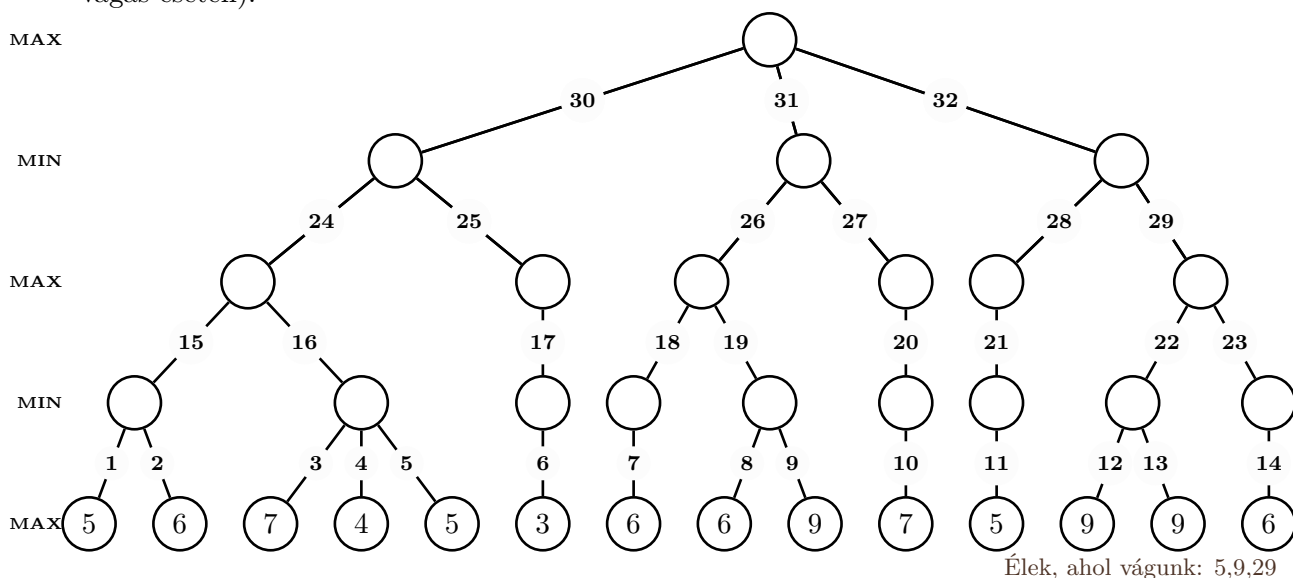
18. Ábrázoljuk a következő szövegrészletet szemantikus hálókkal:

*A pázsitfűfélék családja az egyszikűek osztályának tagja, melyek nehezen rághatók és emészthetők. Ugyancsak a pázsitfűfélék családjába tartoznak a gabonafélék is, például a búza, árpa vagy a rizs. Ezen fűfélék többnyire egyévesek, de számos évelő faj is akad; ilyen például a bambusz.*

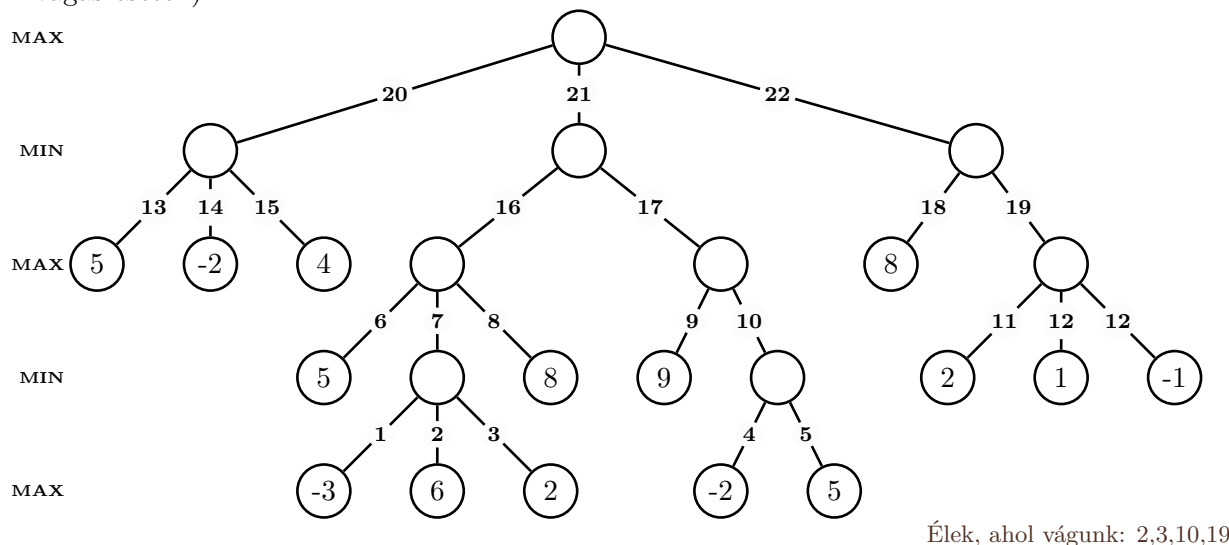
19. Keressünk az ALFA-BETA vágással egy optimálisnak tűnő lépést a MAX játékos számára az alábbi játék-gráfban (magyarázzuk meg a döntést az aktuális  $\alpha$  illetve  $\beta$  értékekkel mindegyik vágás esetén).



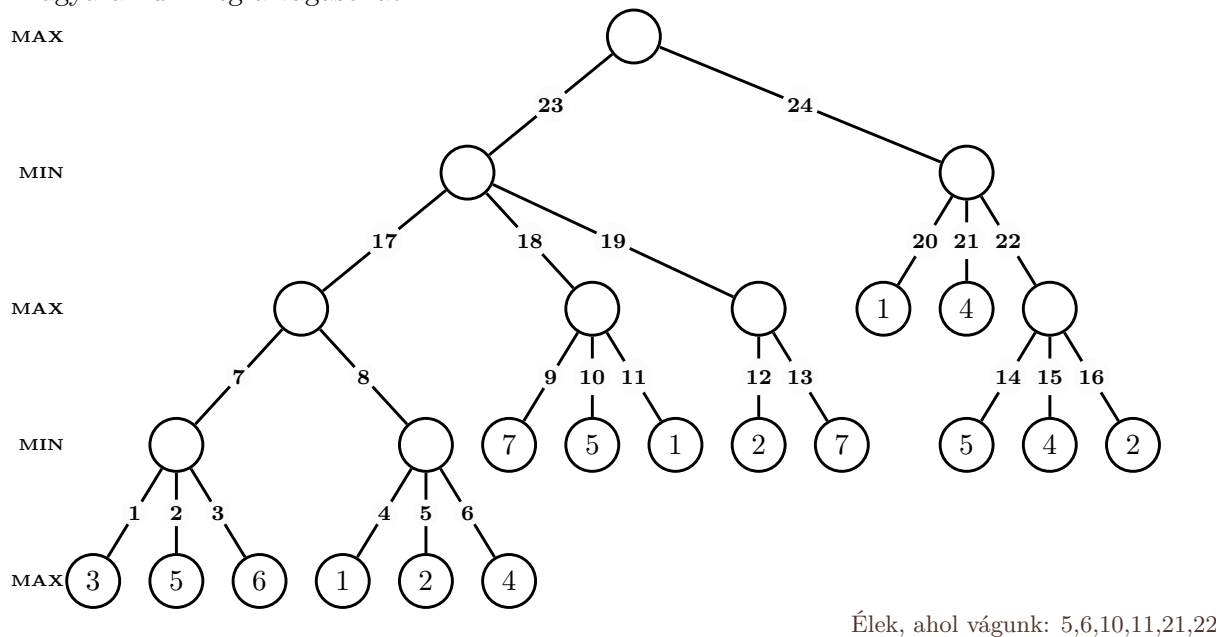
20. Keressünk az ALFA-BETA vágással egy optimálisnak tűnő lépést a MAX játékos számára az alábbi játék-gráfban (magyarázzuk meg a döntést az aktuális  $\alpha$  illetve  $\beta$  értékekkel mindegyik vágás esetén).



21. Keressünk az ALFA-BETA vágással egy optimálisnak tűnő lépést a MAX játékos számára az alábbi játék-gráfban (magyarázzuk meg a döntést az aktuális  $\alpha$  illetve  $\beta$  értékekkel mindegyik vágás esetén).



22. Keressünk az ALFA-BETA vágással egy optimális lépést a MAX számára az alábbi játék-gráfban. Magyarázzuk meg a vágásokat!



23. **Egyszerű kugli-játék.** Az egyszerűsített kuglijátékban minden bábu (teke) egy sorban van elhelyezve, ez – közelítően – merőleges arra az irányra, ahonnan a kugligolyó érkezik. A golyó mérete akkora, hogy vagy egyszerre egy bábút vagy két szomszédosat képes leütni. Vesztes az a játékos, aki nem üt le – nem tud leütni – bábút.

**Feladat:**

- Határozzuk meg a játék állapotterét  $K = 3$  bábúra;
- Határozzuk meg, hogy az kezdő játékos nyer vagy veszít.
- Számítsuk ki, hogy a kezdő játékos nyertes-e  $K = 7$  bábú esetén.
- Írjunk programot, mely meghatározza, hogy a kezdő játékos nyer-e tetszőleges  $K$  esetén.

24. **Az amőba-játék** Az amőba-játékban a feladatunk egy négyzetekből álló mezőre felváltva rajzolni köröket és kereszteket úgy, hogy előbb nekünk gyűljön ki  $J = 5$  darab azonos jel egy sorban vagy egy átló mentén. Tegyük fel, hogy egy  $K \times K$  méretű mezőn játszunk, ahol  $K > 4$ . Ha a  $K$  értéke nagy, akkor a játékot nem tudjuk *teljesen kiterjeszteni*, közelítő becsléseket kell használnunk. Ha  $J = K = 3$ , akkor bizonyítható, hogy racionális játék során nem lesz győztes.

**Feladatok:**

- Implementáljuk az amőba játékot, ahol be tudjuk állítani a  $J$  és  $K$  értékeket, valamint tudjuk ellenőrizni, hogy egy állapotban egyik játékos nyert-e vagy mehet tovább a játék.
  - A  $J = K = 3$  esetre implementáljuk a BOT játékost, aki racionálisan játszik.
  - Implementáljuk az automata játékost a  $K = 4, J = 4$  konfigurációra. Ezekre a paraméterekre a játékos kezdése mindig nyerst jelent. Ha mi kezdünk és nem játszunk jól, akkor is a BOT játékos nyer. Használjunk minél több heurisztikát, mellyel gyorsíthatjuk a programunkat.
  - Próbáljuk kiterjeszteni a játékot a  $K = 5$  és  $J = 4$  esetre.
  - Írjunk programot a  $J = 5$  esetre, amikor a  $K$  mérete nagyobb, mint 8.
25. **Kártyajáték.** (Filep László. Játékelmélet. 29. old.) Két kártyajátékos a következő játékot játssza: az I. játékos kap egy piros 1-est, 2-est, 3-ast és egy fekete 5-öst, a II. játékos pedig kap egy fekete 1-est, 3-ast, 5-öst, és egy piros 5-öst (a piros 5-ösből *két* darab van, nem elírás; valószínűleg két pakli kártyával játsszák). A játék menete a következő: mindkét játékos egyszerre felmutat 1-1 lapot: ha a lapok azonos színűek, akkor I. nyeri a két kártyán lévő szám különbségének abszolút értékét; ellenkező esetben (különböző színű kártyák esetén) II. nyeri a különbség abszolút értékét.
- Írjuk fel a nyereségmátrixot az I. játékos szempontjából.
  - Keressük meg az játékosok tiszta stratégiáit.
  - Mennyi a játék értéke? Igazságos-e a játék?
26. **Orosz rulett.** (Filep László. Játékelmélet. 30. old.) Két gengszter kirabol egy bankot, ahonnan 6000\$-t zsákmányolnak. Mindkettő magáénak akarja az egész összeget, ezért elhatározzák, hogy egy játékkal eldöntik kinek mennyi pénz jut. Először elosztják két egyenlő részre, azaz mindkét gengszternél 3000–3000\$ marad. Ebből 1000–1000\$-t betesznek egy táskába, majd a következő kétlépéses játékot játsszák:
- Az I. gengszter választ: vagy beszáll az orosz rulettbe, vagy egyszerűen beteszi a fennmaradó 2000\$-ját a táskába és megvárja a játék kimenetelét.
  - Ha úgy dönt, hogy játszik, akkor csak 1000\$-t tesz a táskába, megpörgeti a hatlövetűt, amelybe 1 golyót helyeztek, a fejéhez tartja és elsüti; a túlélés valószínűsége  $\frac{5}{6}$ , a halálé pedig  $\frac{1}{6}$ .
  - Ha meghal, akkor a másik nyeri a táskában levő pénzt, azt ami az I. gengszternél maradt (1000\$) elküldi az I. gengszter családjának.
  - Ha életben marad, akkor a II. gengszter következik, aki hasonló módon jár el.
- Rajzoljuk fel a játékfát, azaz rajzoljuk fel a játék során előálló helyzeteket. A fa leveleihez rendeljük a nyereségeket az I. gengszter szempontjából (a kezdeti 3000\$-hoz viszonyítva).
  - Írjuk fel a nyereségmátrixot az I. gengszter szempontjából.
  - Keressük meg az I. és II. gengszter tiszta stratégiáját.
  - Mennyi a játék értéke? Igazságos-e a játék?
27. Legyen egy zéró-összegű játék nyereségmátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Állapítsuk meg az  $X$  játékos tiszta stratégiáját; 1 v 3
- Írjuk fel a játék értékét a játékosok kevert stratégiájának a függvényében;  

$$x_1 y_1 - 5x_2 y_1 + y_1 + 5x_1 y_2 + 3x_2 y_2 - 2y_2 - 2x_1 + x_2 + 1$$
- Keressük meg az  $X$  játékos optimális kevert stratégiáját;  

$$x_1 = 1/4; \quad x_2 = 1/4; \quad x_3 = 2/4$$
- Számítsuk ki a játék értékét; 3/4
- Keressük meg az  $Y$  játékos optimális kevert stratégiáját;  

$$y_1 = 11/28; \quad y_2 = 9/28; \quad y_3 = 8/28$$
- Ellenőrizzük a játék értékének a helyességét az  $Y$  szerinti újraszámolással.

28. Legyen egy zéró-összegű játék nyereségmátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Állapítsuk meg az  $X$  játékos tiszta stratégiáját; 1 v 3
- Írjuk fel a játék értékét a játékosok kevert stratégiájának a függvényében;  

$$-6x_1 y_1 - 10x_2 y_1 + 6y_1 + 2x_1 y_2 - 2x_2 y_2 + 3x_2 - 1$$
- Keressük meg az  $X$  játékos optimális kevert stratégiáját;  

$$x_1 = 3/8; \quad x_2 = 3/8; \quad x_3 = 2/8$$
- Számítsuk ki a játék értékét; 1/8
- Keressük meg az  $Y$  játékos optimális kevert stratégiáját;  

$$y_1 = 3/16; \quad y_2 = 9/16; \quad y_3 = 4/16$$
- Ellenőrizzük a játék értékének a helyességét az  $Y$  szerinti újraszámolással.

29. Legyen egy zéró-összegű játék nyereségmátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Állapítsuk meg az  $X$  játékos tiszta stratégiáját; 1 v 3
- Írjuk fel a játék értékét a játékosok kevert stratégiájának a függvényében;  

$$3x_1 y_1 - x_2 y_1 + 5x_2 y_2 + 3x_1 y_2 - 2x_1 - x_2 - y_1 - 2y_2 + 1$$
- Keressük meg az  $X$  játékos optimális kevert stratégiáját;  

$$x_1 = 7/18; \quad x_2 = 3/18; \quad x_3 = 8/18$$
- Számítsuk ki a játék értékét; 1/18
- Keressük meg az  $Y$  játékos optimális kevert stratégiáját;  

$$y_1 = 7/18; \quad y_2 = 5/18; \quad y_3 = 6/18$$



- Ellenőrizzük a játék értékének a helyességét az  $Y$  szerinti újraszámolással.

## 30. Tizenegyes rúgások.

A tizenegyesek rúgásakor feltételezzük, hogy a *játékos* jobbra, balra, valamint középre rúghatja a labdát. A *kapus* véd: balra vagy jobbra vetődhet, illetve maradhat a helyén, amit  $K$ -val jelölünk.

A „játék” null-összegű és teljes információs, ahol:

- a kapus a lövés előtt mozdul el;
- a játékos szintén a kapus mozdulata előtt dönt.

	B	K	J
B	5	8	9
K	8	4	8
J	9	8	5

Ismételt „kísérletezés” eredménye a fenti mátrix, ahol a számok a 10 rúgott büntetőből a gólok száma, azaz a *játékos* nyereségmátrixa. A fenti mátrix alapján:

(a) Írjuk fel a játék értékét;

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y}, \text{ majd az } x_3 = 1 - x_1 - x_2, \text{ illetve az } y_3 = 1 - y_1 - y_2 \text{ felhasználásával a következő kifejezést kapjuk:}$$

$$V = -8y_1x_1 - 4y_1x_2 + 4y_1 - 7y_2x_2 + 3y_2 + 4x_1 - 4x_1y_2 + 3x_2 + 5$$

(b) Keressük meg az  $X$  játékos optimális kevert stratégiáját;

$$y_1 = 2/5, y_2 = 1/5, y_3 = 2/5.$$

(c) Mennyi lesz a „játék” értéke? Értelmezzük az eredményt!

$$V = 36/5 = 7, 1/5 - \text{ optimális stratégia esetén ennyi az átlagos gólok száma 10 rúgásból.}$$

(d) Hasonlítsuk össze az eredményt a **tiszta** stratégia értékével.

A játékos tiszta stratégiájának az értéke: 5, kisebb a kevert stratégia által elért eredménynél.

## 31. Legyen egy zéró-összegű játék nyereségmátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Állapítsuk meg az  $X$  játékos tiszta stratégiáját;

3

- Írjuk fel a játék értékét a játékosok kevert stratégiájának a függvényében;

$$-2x_1y_1 - 8x_2y_1 + 4y_1 + 6x_1y_2 - y_2 - 2x_1 + 2x_2$$

- Keressük meg az  $X$  játékos optimális kevert stratégiáját;

$$x_1 = 4/24; \quad x_2 = 11/24; \quad x_3 = 9/24$$

- Számítsuk ki a játék értékét;

7/12

- Keressük meg az  $Y$  játékos optimális kevert stratégiáját;

$$y_1 = 3/12; \quad y_2 = 5/12; \quad y_3 = 4/12$$

- Ellenőrizzük a játék értékének a helyességét az  $Y$  szerinti újraszámolással.

## 32. Legyen egy zéró-összegű játék nyereségmátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Állapítsuk meg az  $X$  játékos tiszta stratégiáját;

1 v 2 v 3

- Írjuk fel a játék értékét a játékosok kevert stratégiájának a függvényében;

$$6x_1y_1 + 4x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 - 3x_1 - 2x_2 - 2y_1 - 3y_2 + 2$$

- Keressük meg az  $X$  játékos optimális kevert stratégiáját;

$$x_1 = 1/4; \quad x_2 = 1/2; \quad x_3 = 1/4$$

- Számítsuk ki a játék értékét;

1/4

- Keressük meg az  $Y$  játékos optimális kevert stratégiáját;

$$y_1 = 1/5; \quad y_2 = 9/20; \quad y_3 = 7/20$$

- Ellenőrizzük a játék értékének a helyességét az  $Y$  szerinti újraszámolással.

33. Legyen egy zéró-összegű játék nyereségmátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Állapítsuk meg az  $X$  és  $Y$  játékosok tiszta stratégiáit;

X: 3 v 4 ; Y: 1.

- Írjuk fel a játék értékét a játékosok kevert stratégiájának a függvényében;

$$-4x_1y_1 - 7x_1y_2 - 2x_1y_3 - 2x_2y_1 - x_2y_2 + 5x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_3 + 3x_1 - x_2 - x_3 + y_1 + 2y_2 - y_3$$

- Keressük meg az  $X$  játékos optimális kevert stratégiáját;

A rendszer, amit megoldunk:

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_1 - x_3 &= 1 & 7x_1 + x_2 &= 2 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

A megoldások:  $x_1 = 5/19; x_2 = 3/19; x_3 = 7/19; x_4 = 4/19$ 

- Számítsuk ki a játék értékét;

5/19

- Keressük meg az  $Y$  játékos optimális kevert stratégiáját;

$$y_1 = 17/57; \quad y_2 = 9/57; \quad y_3 = 20/57; \quad y_4 = 11/57$$

- Ellenőrizzük a játék értékének a helyességét az  $Y$  szerinti újraszámolással.

34. Legyen egy zéró-összegű játék nyereségmátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Állapítsuk meg az  $X$  és  $Y$  játékosok tiszta stratégiáit;

X: 1 v 2 v 3 v 4 ; Y: 1 v 2.

- Írjuk fel a játék értékét a játékosok kevert stratégiájának a függvényében;

$$-3x_1y_1 - 4x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_3 + 3x_3y_1 + 4x_3y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1 - 3x_3 + y_1 - 2y_3$$

- Keressük meg az  $X$  játékos optimális kevert stratégiáját;

A rendszer, amit megoldunk:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 1 & 4x_1 - 4x_3 &= 0 \\ 5x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

A megoldások:  $x_1 = 1/15$ ;  $x_2 = 5/15$ ;  $x_3 = 1/15$ ;  $x_4 = 8/14$

- Számítsuk ki a játék értékét;

$-1/15$

- Keressük meg az  $Y$  játékos optimális kevert stratégiáját;

$$y_1 = 1/3; y_2 = 1/4; y_3 = 1/5; y_4 = 13/60$$

- Ellenőrizzük a játék értékének a helyességét az  $Y$  szerinti újraszámolással.

35. Legyen egy zéró-összegű játék nyereségmátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 8 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Határozzuk meg a domináns stratégiákat és töröljük a mátrixból a dominált stratégiákat.
- Állapítsuk meg a tiszta stratégiákat.
- Számítsuk ki a játék értékét.

36. Legyen egy zéró-összegű játék nyereségmátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Határozzuk meg a domináns stratégiákat és töröljük a mátrixból a dominált stratégiákat.
- Állapítsuk meg a tiszta stratégiákat.
- Számítsuk ki a játék értékét.

37. Legyen egy zéró-összegű játék nyereségmátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & 5 & 4 & 4 \\ 6 & 9 & 9 & -3 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 1 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 5 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

- Határozzuk meg a domináns stratégiákat és töröljük a mátrixból a dominált stratégiákat.
- Állapítsuk meg a tiszta stratégiákat.
- Írjuk fel a játék értékét a játékosok kevert stratégiájának a függvényében.
- Keressük meg az  $X$  játékos optimális kevert stratégiáját.
- Számítsuk ki a játék értékét.
- Keressük meg az  $Y$  játékos optimális kevert stratégiáját.
- Ellenőrizzük a játék értékének a helyességét az  $Y$  szerinti újraszámolással.

38. Két érmét dobunk fel, a dobások mindegyike fej –  $F$  – vagy írás –  $I$ . Tekintsük az  $\{A, B, C\}$  eseményeket az alábbiak szerint:

- $A =$  „az első érme fej”
- $B =$  „a második érme fej”
- $C =$  „**csak egy** érme fej”

$A$	$B$	$C$	$P(A, B, C)$
0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

A jobb oldalon található táblázatot töltsük ki az *együttes valószínűségekkel*.

A táblázat alapján vizsgáljuk meg az  $A \perp B$ ,  $B \perp C$ ,  $C \perp A$  függetlenségeket, majd javasoljunk egy grafikus modellt, mely leírja a szerkesztett valószínűségi táblát.

Vizsgáljuk meg az  $\{A, B\} \perp C$  függetlenségi feltételt is, majd javítsunk a táblán. Ellenőrizzük a modellt.

39. Egy éjjel a riasztó megszólal a lakásban.

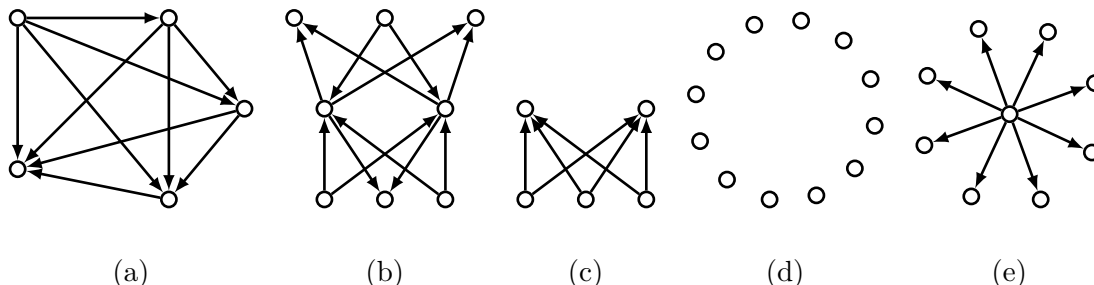
Mekkora a valószínűsége annak, hogy betörés történt, ha tudjuk, hogy:

- A riasztó 96%-os valószínűséggel megszólal betörés esetén;
- A riasztó 1%-ban hamis riasztást végez;
- Statisztikai adatok szerint 1/1000 az esélye annak, hogy betörjenek.

Magyarázzuk meg az eredményt a következőkkel:

- Írjuk fel a keresett – feltételes – valószínűséget;
- Írjuk fel a teljes valószínűségi táblát;
- Alkalmazzuk a Bayes-képletet.

40. Tekintsük az alábbi irányított gráfokat. Amennyiben minden csomópont egy változót tartalmaz, a gráfok élei pedig a dependenciákat jelentik, állapítsuk meg az együttes valószínűségi változó megadásához szükséges – feltételes vagy nem – valószínűségeknek a számát.

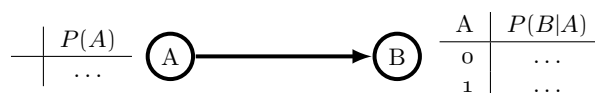


Mekkora a teljes specifikációhoz szükséges valószínűségi tábla és a grafikus modellekhez szükséges „elemi” valószínűségek számának az aránya. Mit tudunk megállapítani a gráfokról – melyek tartalmaznak kevesebb „információt”?

41. Legyen a következő valószínűségi tábla:

$A \setminus B$	0	1
0	0.08	0.12
1	0.32	0.48

(a) Írjuk fel a fenti tábla alapján az alábbi grafikus modellt. Milyen következtetést tudunk levonni?



(b) Ellenőrizzük, hogy az  $A$  esemény független-e a  $B$ -től a

$$p(A, B) = p(A)p(B)$$

reláció alapján.

42. Legyen a következő valószínűségi tábla:

	A \ B	0	1
C = 0	0	0.32	0.08
	1	0.32	0.08

	A \ B	0	1
C = 1	0	0.144	0.036
	1	0.016	0.004

ahol a nyolc valószínűség az A, B, illetve C események együttes előfordulásainak a gyakoriságai.

- (a) Állapítsuk meg, hogy a következő kijelentések igazak-e:
- A és B események függetlenek;
  - A és C események függetlenek;
  - C és B események függetlenek.
- (b) A fentiek alapján javasoljunk egy grafikus modellt és állapítsuk meg a szükséges feltételes valószínűségeket.

43. Legyen a következő valószínűségi tábla:

	A \ B	0	1
C = 0	0	0.32	0.144
	1	0.32	0.016

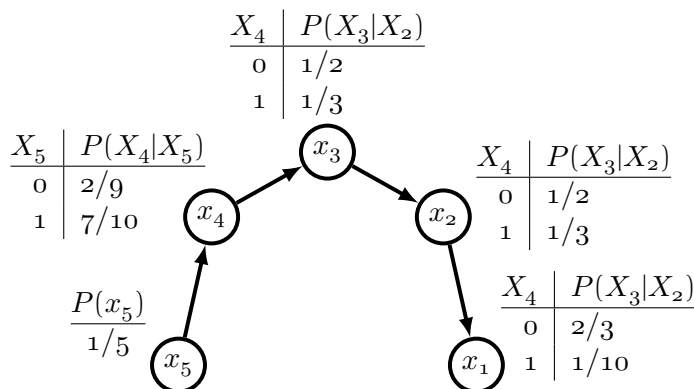
	A \ B	0	1
C = 1	0	0.05	0.09
	1	0.05	0.01

ahol az előbbi feladathoz hasonlóan az együttes valószínűségeket adtuk meg.

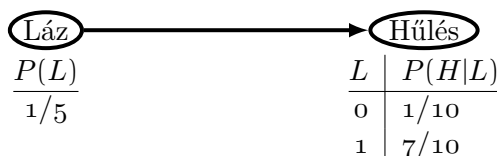
- (a) Állapítsuk meg, hogy a következő kijelentések igazak-e:
- A és B események függetlenek;
  - A és C események függetlenek;
  - C és B események függetlenek.
- (b) A fentiek alapján javasoljunk egy grafikus modellt és állapítsuk meg a szükséges feltételes valószínűségeket.

44. Tekintsük a mellékelt grafikus modellt. Számítsuk ki a következő feltételes valószínűségeket:

- (a)  $P(x_5|x_3)$  és  $P(x_5|\bar{x}_3)$  ;  
 (b)  $P(x_1|x_3)$  és  $P(x_1|\bar{x}_3)$  ;  
 (c)  $P(x_1|x_4)$  és  $P(x_1|\bar{x}_4)$  ;  
 (d)  $P(x_5|x_4)$  és  $P(x_5|\bar{x}_4)$  ;



45. Legyen a következő grafikus modell:

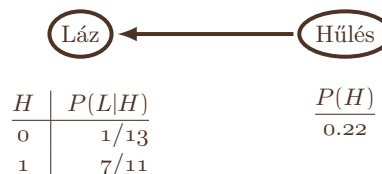


- (a) Mekkora valószínűséggel állítható, hogy:  
*ha lázas vagyok, akkor meg vagyok hűlve.*

(b) Írjuk fel a valószínűségi változók együttes eloszlás-tábláját;

L \ H	0	1
0	0.72	0.08
1	0.06	0.14

(c) Fordítsuk meg az irányítottságot a grafikus modellben;



(d) Mekkora valószínűséggel állítható, hogy:

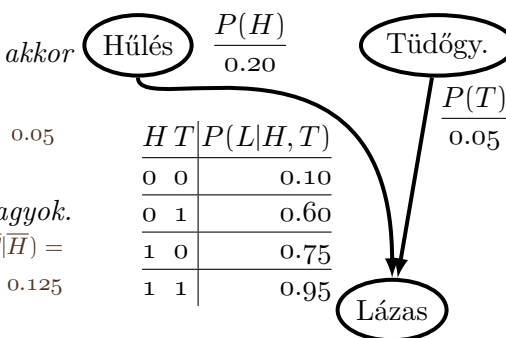
ha **nem** vagyok meghűlve, akkor lázas vagyok;

$$1/13 = 0.0769$$

46. Legyen a következő grafikus modell:

- Mekkora valószínűséggel állítható, hogy:

Ha meg vagyok hűlve és tüdőgyulladásom van, akkor **nem** vagyok lázas.



- Mekkora valószínűséggel állítható, hogy:

ha **nem** vagyok meghűlve, akkor lázas vagyok.

$$P(L|\bar{H}) = P(L, T|\bar{H}) + P(L, \bar{T}|\bar{H}) = P(L|\bar{H}, T)P(T) + P(L|\bar{H}, \bar{T})P(\bar{T}) = 0.125$$

- Számítsuk ki az  $(H, T)$  együttes eloszlását, ha tudjuk hogy  $L = 0$ ;

H \ T	0	1	H
0	0.9144	0.0214	0.9358
1	0.0635	0.0007	0.0642
T	0.9779	0.0221	-

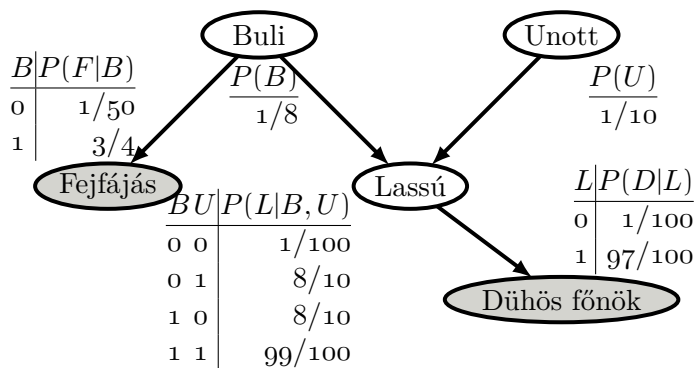
- Független a  $H$  a  $T$ -től ha feltételezzük, hogy  $L = 0$ ? Miért?

**NEM.**

Ellenőrizzük például, hogy  $P(H, T) \neq P(H)P(T)$ , azaz  $0.0007 \neq 0.0014$ .

47. Tekintsük a mellékelt grafikus modellt (Barber D. 2011, 48. oldal).

A grafikus modell ábrázolja egy cég (vagy projekt) főnöke és egy alkalmazottja „releváns” állapotait. Amint az ábra mutatja, a **vezető dühös**, ha az alkalmazott **lassú** a munkahelyén. Az alkalmazott akkor lassú, ha előző este **bulizott**, illetve akkor, ha általában nem szereti a munkáját, azaz **unott** a munkahelyén. Látjuk azt is, hogy a **buli fejfájást** eredményezhet.



Azt tapasztaljuk egy alkalommal, hogy az alkalmazottnak **fáj a feje** és ugyanakkor a főnöke **dühös**. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy az alkalmazott **bulizott**.

A keresett *feltételes* valószínűség:  $P(B = 1 | F = 1, D = 1) \stackrel{\text{def}}{=} P(B|F, D)$  ahol a negációt implicit jelöljük pl  $\bar{F}$ -fel, ellenkező esetben a logikai változó értéke *igaz*. A Bayes-képletet használva  $P(B|F, D) = \frac{P(B, F, D)}{P(F, D)}$ , majd kiszámítjuk külön-külön a számlálóban és a nevezőben szereplő valószínűségeket, használva a Bayes-háló struktúráját.

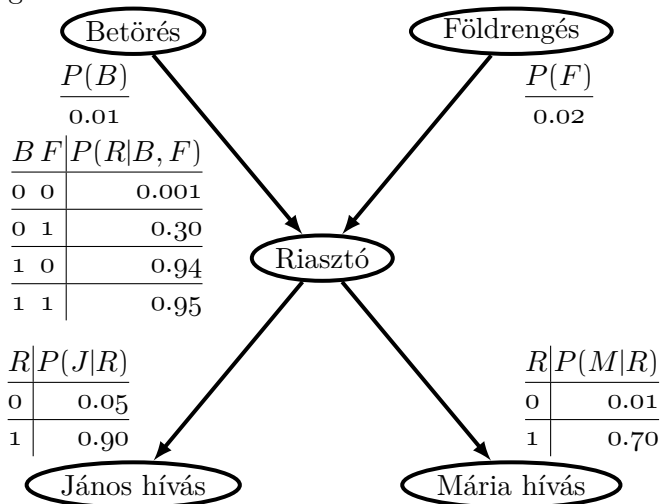
$$\begin{aligned}
 P(B, F, D) &= P(F|B, D) P(B, D) = P(F|B) \sum_{L,U} P(B, U, L, D) \\
 &= P(F|B) P(B) \sum_{L,U} P(D|L) P(L|B, U) P(U) \\
 &= \frac{3}{4} \frac{1}{8} \left( \frac{1}{100} \frac{2}{10} \frac{9}{10} + \frac{1}{100} \frac{1}{100} \frac{1}{10} + \frac{97}{100} \frac{8}{10} \frac{9}{10} + \frac{97}{100} \frac{99}{100} \frac{1}{10} \right) = \frac{29859}{400000}
 \end{aligned}$$

A nevező kiszámításához felírjuk a *tejles valószínűség* képletét:

$$P(F, D) = P(B, F, D) + P(\bar{B}, F, D) = \frac{29859}{400000} + \frac{8351}{5000000}$$

A keresett valószínűség:  $P(B|F, D) = \frac{746475}{763177} = 97.812\%$ .

48. Legyen a következő grafikus modell:



Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

- $P(R|B, \bar{F})$ ;

0.94

- $P(R)$ ;

$$\begin{aligned}
 P(R) &= P(R, \bar{B}, \bar{F}) + P(R, \bar{B}, F) + P(R, B, \bar{F}) + P(R, B, F) \\
 &= 0.0163
 \end{aligned}$$

- $P(J, M)$ ;

$$P(J, M) = P(J, M, \bar{R}) + P(J, M, R) = P(J, M|\bar{R})P(\bar{R}) + P(J, M|R)P(R) \\ = P(J|\bar{R})P(M|\bar{R})P(\bar{R}) + P(J|R)P(M|R)P(R) \\ = 0.0108$$

- $P(J, \bar{M})$ ;

$$= 0.0531$$

- $P(B|J, \bar{M})$ .

$$P(B|J, \bar{M}) = P(B, R|J, \bar{M}) + P(B, \bar{R}|J, \bar{M}) \\ = P(B|R)P(R|J, \bar{M}) + P(B|\bar{R})P(\bar{R}|J, \bar{M}) \\ = 0.3070$$

- Értelmezzük majd számítsuk ki a következő valószínűségeket:

$$P(B, F|R), \quad P(B, \bar{F}|R), \quad P(\bar{B}, R|R), \quad P(\bar{B}, \bar{F}|R)$$

Vizsgáljuk meg, hogy a **Betörés** és a **Földrengés** események függetlenek-e, ha tudjuk, hogy **volt riasztás**. Magyarázzuk meg az eredményt.

A következő átalakítást végezzük el:

$$P(B, F|R) = \frac{P(B, F, R)}{P(R)} = \frac{P(R|B, F) P(B) P(F)}{P(R)}$$

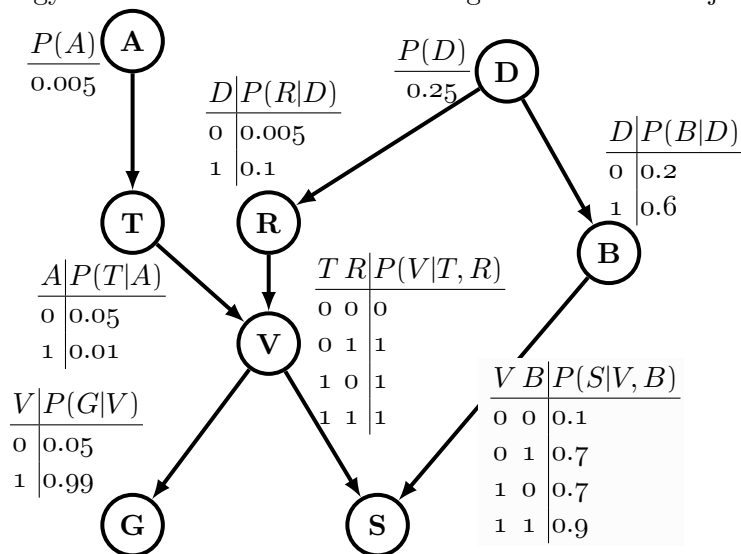
ahol az először a Bayes-képletet, majd a  $B$  és  $R$  események függetlenségét használtuk fel (függetlenség akkor, ha az  $R$  eseményt nem ismerjük). A fentiek ismeretében kiszámítjuk a  $P(\bar{B}, \bar{F}|R)$ ,  $P(\bar{B}, F|R)$ ,  $P(B, \bar{F}|R)$ , illetve a  $P(B, F|R)$  valószínűségeket, majd megvizsgáljuk, hogy az előállt valószínűségi tábla független változókat tartalmaz-e (nem).

- Értelmezzük majd számítsuk ki a következő valószínűségeket:

$$P(M|B), \quad P(J|M), \quad P(M|F)$$

- Kinek a hívása nyomán aggódunk inkább a betörés lehetőségén? Fogalmazzuk meg a kérdést valószínűségi nyelvezetben használva. Igazoljuk a válaszunkat.

49. Egy tüdőkörházban a következő diagnosztikai modellt javasolták (Barber D. 2011, 49. oldal):



A változók a következőket jelentik:  
**A** – volt Ázsiában (mely TBC-t valószínűsít);  
**T** – TBC-vel fertőzött;  
**D** – Dohányzik;  
**R** – Tüdőrák diagnózis;  
**V** – vagy TBC-s vagy tüdőrákos;  
**S** – légszomj, melyet mindhárom betegség okozhat;  
**G** – pozitív röntgenfelvétel;  
**B** – hörghurut, melyet jelen esetben a dohányzás elősegíthet;

- (a) A modell alapján állapítsuk meg a következő események (feltételes) függetlenségét:
- $A \perp D; \quad R \perp B; \quad R \perp B \mid D;$
  - $T \perp R \mid G; \quad A \perp D \mid R; \quad A \perp D \mid R, B$

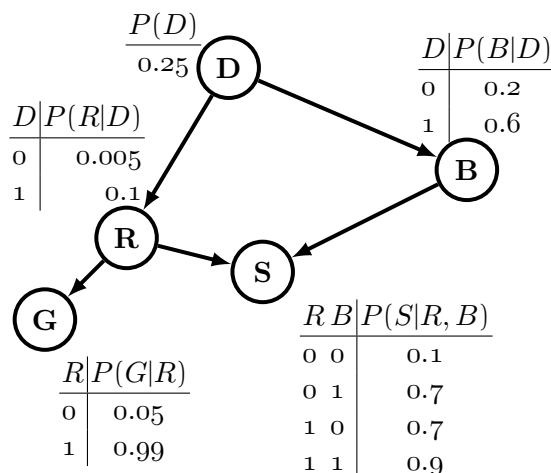


(b) Értelmezzük és számítsuk ki a következő – feltételes – valószínűségeket:

$$P(R), P(R|V), P(R|\bar{V}), P(V|A), P(G|T), P(T|G), P(R|D, G)$$

50. A diagnosztizáló modell mellékelt egyszerűbb változata alapján számítsuk ki a következő (feltételes) valószínűségeket:

- (a) A páciensnek **légszomja** van;
- (b) A **röntgenfelvétel** negatív;
- (c) *Dohányzó* páciensnek van **légszomja**;
- (d) Negatív **röntgenfelvétel** esetén **légszomj** valószínűsége;



Becsüljük az alábbi – marginális – valószínűségeket:

- (a)  $p(R) = p(R|\bar{D})p(\bar{D}) + p(R|D)p(D) = 0.02875$ ,
- (b)  $p(\bar{G}) = 1 - p(G) = 1 - \sum_{i,j} p(G|R=i, B=j)P(R=i) = 0.922975$
- (c)  $p(S|\bar{D}) = \sum_{i,j} p(S|R=i, B=j)p(R=i|\bar{D})p(B=j|\bar{D}) = 0.2226$
- (d)  $p(S|\bar{G}) = (\sum_{i,j,k} p(S, R=i, D=j, B=k, \bar{G})) / p(\bar{G}) = 0.21782$

51. A Dempster–Schafer modell.

Három azonos kockát dobunk és a következő eredményeket kapjuk:

- $K_1 = (1, 1, 6)$      $K_2 = (1, 2, 3)$      $K_3 = (1, 2, 5)$      $K_4 = (1, 2, 6)$      $K_5 = (1, 3, 4)$
- $K_6 = (1, 3, 5)$      $K_7 = (1, 3, 6)$      $K_8 = (1, 4, 5)$      $K_9 = (1, 5, 5)$      $K_{10} = (1, 5, 6)$
- $K_{11} = (2, 3, 5)$      $K_{12} = (2, 3, 6)$      $K_{13} = (2, 4, 5)$      $K_{14} = (2, 4, 6)$      $K_{15} = (2, 6, 6)$
- $K_{16} = (3, 5, 5)$      $K_{17} = (3, 3, 4)$      $K_{18} = (4, 4, 5)$      $K_{19} = (4, 5, 6)$      $K_{20} = (6, 6, 6)$

Az ismétlések szerint többszörözve, valamint ismerve a  $Bel(A) = \sum_{A \in C} m(C)$ , illetve  $Pl(A) = \sum_{A \cup C \neq \emptyset} m(C)$ , számítsuk ki a  $Bel(\{1\})$ ,  $Bel(\{6\})$ , illetve a  $Pl(\{1\})$ ,  $Pl(\{6\})$  értékeket, ha

- (a) Csak az első **öt** eseményt vesszük figyelembe;
- (b) Mind a 20 eseményt figyelembe vesszük.

Mindkét esetben a halmazokat **egyenlő** arányban súlyozzuk (az elsőben a súly  $1/5$ , a másodikban  $1/20$ ).

52. Bizonyítsuk be, hogy a  $Bel(Z)$  függvény szubadditív, illetve azt, hogy a  $Pl(Z)$  függvény szuperadditív.

53. Tekintsük az  $m : 2^{\{1,2,3,4,5,6\}} \rightarrow [0, 1]$  függvényt, mely egy kockához tartozó bizonytalanságot kódolja (Dempster-Schafer rendszer) a következők szerint:

$m(\emptyset) = 0$ , az összes többi részhalmaz egyenlő súlyú:  $1/31$ .

- Számítsuk ki a következő halmazok  $Bel$  és  $Pl$  értékeit:  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{3, 4, 5, 6\}$ .
- Számítsuk ki a fenti halmazokra a  $Bel$  és  $Pl$  értékeket, ha a rendszerben lenullázzuk az összes olyan halmaznak a súlyát, mely több, mint egy elemből áll és tartalmazza az  $\{1, 2, 3\}$  részhalmaz **legalább** egy elemét (a maradék halmazok súlyai egyenlőek).

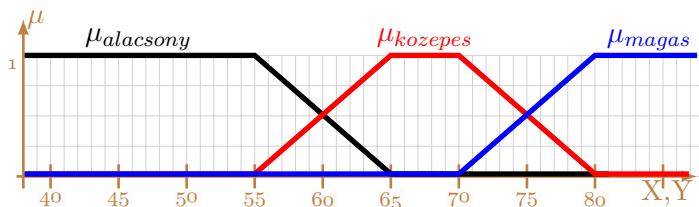
54. Egy gyilkosság során a következő információk birtokába jutunk:

- Három lehetséges gyilkosunk van: *Tamás*, *Péter*, és *Kati*;
- Egy spion állítása szerint a (bér)gyilkost a maffiavezér a következők szerint sorsolta ki: 50%-ban *Tamás* vagy *Péter*, a fennmaradó félben pedig *Tamás* vagy *Kati*.

- Egy részleges DNS-vizsgálat során megállapítják, hogy a gyilkos 80%-ban férfi és 20%-ban nő.

A rendőrség és a spion információit egyenlően súlyozva, állapítsuk meg a személyekhez tartozó *Bel* és *Pl* függvények értékét.

55. Tekintsük az alábbi fuzzy halmazokat és **fuzzy szabály-táblát**:



Z	Y		
X	Alacsony	Közepes	Magas
Alacsony	-	Közepes	Alacsony
Közepes	-	Alacsony	Közepes
Magas	Közepes	Magas	Alacsony

ahol - nem megengedett állapot

- Határozzuk meg az  $X = 77.5$  és  $Y = 68.0$  pontoknak megfelelő fuzzy következtetés  $Z$  halmazát (magyarázzuk meg az eredményt).

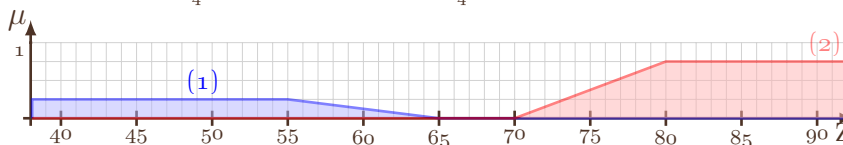
Meghatározzuk a bemeneti értékek hozzátartozását a különböző halmazokhoz:

$$X_{magas} = \frac{3}{4}; X_{kozepes} = \frac{1}{4}$$

$$Y_{kozepes} = 1$$

Súlyozottan összeadjuk a két - ebben az esetben összes - lehetőséget:

$$Z = \frac{3}{4} Z(X_{magas}, Y_{kozepes}) + \frac{1}{4} Z(X_{kozepes}, Y_{kozepes}), \text{ az eredmény:}$$



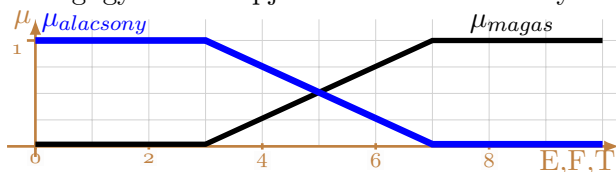
- Határozzuk meg az  $X = 85.0$  és  $Y = 68.0$  pontoknak megfelelő fuzzy következtetést (magyarázzuk meg az eredményt).

Hasonlóan!

- Határozzuk meg az  $X = 57.5$  és  $Y = 77.5$  pontoknak megfelelő fuzzy következtetést (magyarázzuk meg az eredményt).

Hasonlóan!

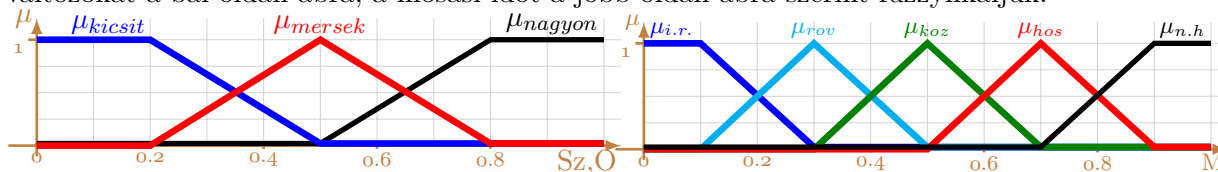
56. Egy bioreaktor kontrollját fuzzy szabályokkal írjuk le. A reaktortban mérjük az energiaszintet -  $E$  - és a reaktorban található fehérje koncentrációját -  $F$  -, majd ezek függvényében teszünk változó mennyiségű tápot - jelöljük  $T$ -vel. Tegyük fel, hogy mindegyik mennyiségre ugyanazt a skálát alkalmazzuk 0 és 10 között. Az alábbi ábrán látjuk a fuzzy halmazokat illetve a megfigyelések alapján összeállított szabályokat.



- (1) Ha  $F$  alacsony és  $E$  alacsony, akkor  $T$  magas.
- (2) Ha  $F$  alacsony és  $E$  magas, akkor  $T$  alacsony.
- (3) Ha  $F$  magas és  $E$  alacsony, akkor  $T$  magas.
- (4) Ha  $F$  magas és  $E$  magas, akkor  $T$  alacsony.

- Határozzuk meg az  $F = 5.5$  és  $E = 7.5$  pontoknak megfelelő fuzzy következtetést (magyarázzuk meg az eredményt).
- Határozzuk meg az  $F = 6.0$  és  $E = 4.5$  pontoknak megfelelő fuzzy következtetést (magyarázzuk meg az eredményt).

57. (Sántháné-Tóth és tsai: *Döntéstámogató rendszerek*, 2007) Egy mosógép mosási idejét szabályozó fuzzy rendszerrel következő változókat használjuk: a bemenő változók a **szennyezettség (Sz)** és az **olajozottság (O)** mértékei, melyek függvényében a **mosási idő (M)** változik. A bemenő változókat a bal oldali ábra; a mosási időt a jobb oldali ábra szerint fuzzyfikáljuk.



A vezérlési szabályok a következők:

- Ha Sz=kicsi és O=kicsi akkor M=rov;
- Ha Sz=kicsi és O=mersek akkor M=koz;
- Ha Sz=mersek és O=kicsi akkor M=rov;
- Ha Sz=mersek és O=nagyon akkor M=koz;
- Ha Sz=nagyon és O=nagyon akkor M=n.h;

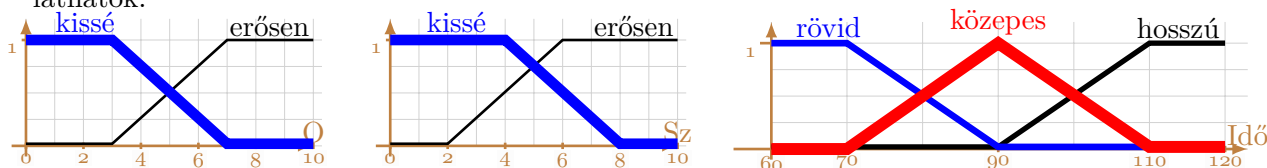
Feladat:

- Írjuk fel a döntéseket tartalmazó táblát *csak* az érvényes szabályokkal.
- Határozzuk meg az  $Sz = 0.3$  és  $O = 0.7$  pontoknak megfelelő fuzzy következtetést.
- Határozzuk meg az  $Sz = 0.4$  és  $O = 0.4$  pontoknak megfelelő fuzzy következtetést.

(magyarázzuk meg az eredményt)

Használjuk a  $T(a, b) = \min(a, b)$  T-normát

58. Egy mosógépnél két „tekerő” segítségével lehet beállítani a mosási idő hosszát. Ezek az „olajozottság” illetve a „(más) szennyezettség mértéke”. Az olajozottság és szennyezettség mértékeinek fuzzy halmazai a bal oldali illetve középső, a mosási idő hosszának fuzzy halmazai a jobb oldalon láthatók:



A fuzzy-rendszer szabályai a következők:

		<i>szennyezett</i>	
		kevésbé	erősen
<i>olajozott</i>	kevésbé	<b>rövid</b>	<b>közepes</b>
	erősen	<b>közepes</b>	<b>hosszú</b>

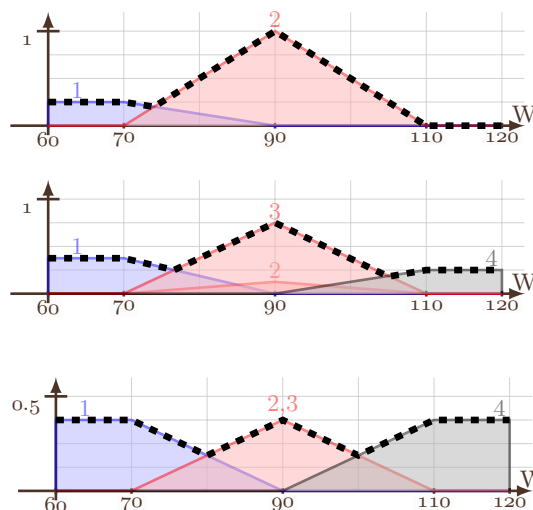
Határozzuk meg a következő bemenő értékekre a szabályok eredményének fuzzy halmazát:

- (a)  $O = 2$  and  $D = 7$ ;
- (b)  $O = 4$  and  $D = 6$ ;
- (c)  $O = 5$  and  $D = 5$ ;

**Plusz feladat:** Defuzzyfikáljuk a kapott eredményt (határozzuk meg a bemeneteknek megfelelő pontos mosási időt).

**Segítség:** A *COG-módszerrel* kiszámítjuk a fuzzy függvények által meghatározott területek középpontjainak  $x$ -koordinátáit, jelöljük  $x_1, x_2, \dots$ -vel, a területek pedig legyenek  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Ekkor a defuzzyfikált eredmény  $(\sum_{i=1}^n t_i \cdot x_i) / (\sum_{i=1}^n t_i)$ .

- (a)  $O = 2 \Rightarrow \mu_K = 1$  és  $\mu_E = 0$   
 $D = 7 \Rightarrow \mu_K = 0.25$  és  $\mu_E = 1$   
 A megoldás:  
 $0.25W_R \vee W_K$
- (b)  $O = 4 \Rightarrow \mu_K = 0.75$  és  $\mu_E = 0.25$   
 $D = 6 \Rightarrow \mu_K = 0.5$  és  $\mu_E = 1$   
 A megoldás:  
 $0.375W_R \vee 0.125W_K \vee 0.75W_K \vee 0.25W_H$
- (c)  $O = 4 \Rightarrow \mu_R = 0.5$  és  $\mu_E = 0.5$   
 $D = 6 \Rightarrow \mu_R = 0.75$  és  $\mu_E = 0.75$   
 A megoldás:  
 $0.375W_R \vee 0.375W_K \vee 0.375W_K \vee 0.375W_H$   
 (változott a függőleges skála).



59. Egy bank *fuzzy szakértői* rendszert szeretne kidolgozni hitelek kockázatának a megállapítására. A jelentkezők **keresete** (EUR), **életkora** és **végzettsége** alapján szeretne egy szabályrendszert kidolgozni, mely szerint *kis/közepes/magas* kockázatú osztályba sorol be **egy adott összegű hitelt**.

- (a) Hány fuzzy változónk lesz? Specifikáljuk a feladatot!
- (b) Építsünk egy fuzzy szabálytáblát, „logikus” működési értékekkel.
- (c) Vázzunk döntési algoritmust egy jelentkező kockázati osztályának a megállapítására.  
 Állapítsuk meg a fuzzy halmazok határait; vegyünk példának egy jelentkezőt; fuzzyfikáljuk az adatokat; számítsuk ki a fuzzy következtetést; javasoljunk egy döntést a fuzzy következtetés alapján.

60. Tekintsük a következő T-normát:

$$T(a, b) = \frac{ab}{a + b - ab}$$

ha  $a$  és  $b$  nem egyszerre zérusok, valamint  $0$  ha  $a = b = 0$ .

- (a) Ellenőrizzük, hogy a fenti norma megfelel a logikai és szabályainak az intervallum végeinél;
- (b) Az  $S(a, b) = 1 - T(1 - a, 1 - b)$  azonosságot használva számítsuk ki a megfelelő  $S$ -normát;

(c) Az értelmezett fuzzy műveletek alkalmazásával számítsuk ki a következő fuzzy halmazokat:

$$a \wedge \bar{a}, \quad a \vee \bar{a} \tag{a}$$

Ellenőrzés az  $a, b \in \{0, 1\}$  értékekre. (b)

$$S(a, b) = T(1 - a, 1 - b) = \frac{a + b - 2ab}{1 - ab} \tag{c}$$

$$T(a, 1 - a) = \frac{a - a^2}{1 - a + a^2} = \frac{a - a^3}{1 + a^3} \quad S(a, 1 - a) = 1 - \frac{a - a^2}{1 - a + a^2}$$

61. Találjuk meg a következő T-normákhoz tartozó S-konormákat<sup>2</sup>:

- $T(a, b) = ab$ ;
- $T(a, b) = \max(0, a + b - 1)$ ;
- $T(a, b) = \begin{cases} b & \text{if } a = 1 \\ a & \text{if } b = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$  ;

62. A „modus ponens” a klasszikus logika következtetési szabálya, „képletesen”:

$$\left. \begin{matrix} a \\ a \rightarrow b \end{matrix} \right\} \Rightarrow b, \text{ vagyis az } (a \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow b$$

A kifejezés tautológia. A *fuzzy logikában* a lehetséges logikai értékek a  $[0, 1]$  intervallumban vannak. Határozzuk meg a „modus ponens” szabály fuzzy  $\mu_{MP}(\mu(a), \mu(b))$  függvényét a következő logikák esetében:

(a)  $T(\mu(a), \mu(b)) = \mu(a)\mu(b)$   
 $S(\mu(a), \mu(b)) = \mu(a) + \mu(b) - \mu(a)\mu(b)$ ;

egyszerűsítő jelölés:  $\mu(a) \stackrel{\text{def}}{=} a$  és  $\mu(b) \stackrel{\text{def}}{=} b$ ;  
 $\mu_{MP}(a, b) = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} - a(1 - b)\right)^2$

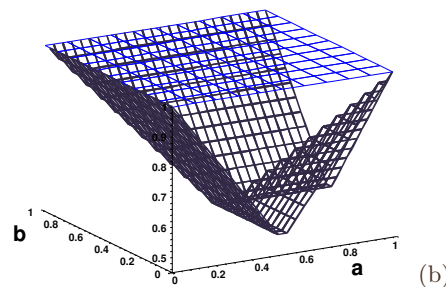
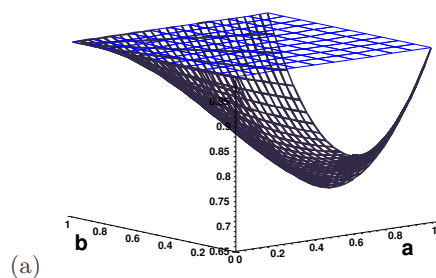
(b)  $T(\mu(a), \mu(b)) = \min(\mu(a), \mu(b))$   
 $S(\mu(a), \mu(b)) = \max(\mu(a), \mu(b))$ ;

egyszerűsítő jelölés:  $\mu(a) \stackrel{\text{def}}{=} a$  és  $\mu(b) \stackrel{\text{def}}{=} b$ ;  
 $\mu_{MP}(a, b) = \max(1 - a, b, \min(a, 1 - b))$

(c)  $T(\mu(a), \mu(b)) = \max(0, \mu(a) + \mu(b) - 1)$   
 $S(\mu(a), \mu(b)) = \min(1, \mu(a) + \mu(b))$ ;

Gyakorlat!

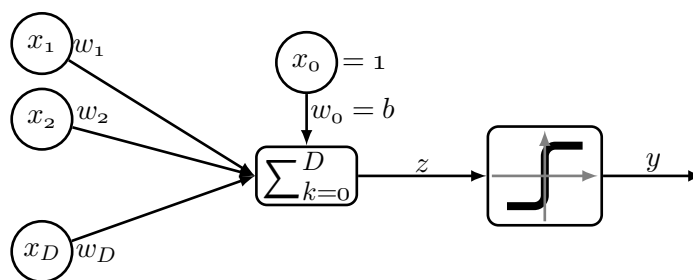
Az (a) valamint (b) esetek grafikus képe:



63. Legyen az alábbi perceptron-modell, ahol az  $\{x_n\}_1^D$  a perceptron bemenetei,  $\{w_n\}_1^D$  a súlyok,  $y$  a kimeneti érték.

---

<sup>2</sup> $T(a, b) = 1 - S(1 - a, 1 - b)$



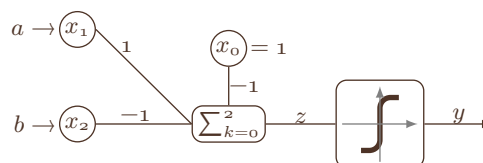
- Írjuk fel a szereplő mennyiségek típusait (logikai vagy valós) illetve a transzformációs függvényt a logikai adatok valóssá tételéhez.

$$x_k \in \{T, F\} \quad \forall 1 \leq k \leq D$$

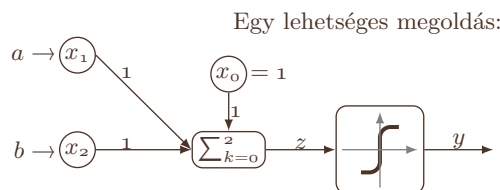
$$\text{Az átalakító függvény: } g: \{T, F\} \rightarrow \{-1, 1\}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x = F \\ 1 & \text{if } x = T \end{cases}$$

- Építsünk – majd teszteljük – egy perceptron modellt az  $a \wedge \bar{b}$  logikai műveletre.



64. Építsünk egy perceptron modellt az  $a \vee b$  logikai műveletre.



65. Magyarázzuk meg, hogy a logikai XOR feladatot egy perceptron miért nem tudja megoldani (magyarázzuk meg a fogalmakat).

Mert a négy pont nem szeparálható lineárisan; az egyrétegű perceptron meg *csakis* lineárisan szeparálható feladatokat tud megoldani.

Indokoljuk meg – grafikus szemléltetéssel.

66. Építsünk egy *többrétegű* perceptron modellt az XOR logikai műveletre.

Átírjuk az XOR műveletet:  $a \text{ XOR } b = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$  A *kétszintes* perceptron rejtett szintjein implementáljuk az  $a \wedge \bar{b}$  és  $\bar{a} \wedge b$  műveleteket, a második szinten a  $h_1 \vee h_2$  logikai vagy műveletet.

