# Valószínűségszámítás és valószínűségi paradoxonok

Csató Lehel

Matematika és Informatika Tanszék,
Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár
http://www.cs.ubbcluj.ro/~csatol

2011 szeptember 6

*Klasszikus az, amit mindenki szeretett volna már elolvasni,*
*de amit olvasni senki sem szeretne.*

# Az előadás céljai



- Alapfogalmak bemutatása;
- Alapfogalmak tisztázása;
- Érdekes feladatok felsorolása;
- Matlab illusztrációk (ahol szükséges);

# Tartalom

# Tartalom

# Definíciók

**Paradoxon**

Olyan meglepő állítás, mely a **„józan észnek”** ellentmondani látszik.

Paradoxonok szerepe:

- Megvilágítanak egy problémát, melyre megoldást kell javasolni.

  (tudománytörténet)

- Bemutatják „józan” (lásd fentebb) példákon keresztül a *formális gondolkodás* hasznát.

  (oktatás)

# Kérdések, melyekre kereshetjük a választ

- Van nyerő kombináció a lottón?
- Jó, ha kölcsönös ajándékozásnál sorsoljuk az ajándékozó személyt?
- Ha ismételten játszunk egy játékot, hogyan kell azt „optimálisan játszani”?
- Helyes az a táblázat, melyben az átlagos életkor $26$ év; ugyanakkor $50\%$ a valószínűsége annak, hogy valaki a $8$. évet *ne* érje meg?
- Véletlen a számsorozat, amit látunk?
- Mit jelent a val. változók függetlensége?
- Mekkora valószínűséggel lesz egy húr adott hossznál nagyobb?

## A valószínűség nem garancia!

### Dr. Tel

Betegvizsgálat után, hosszas fejrázás közben:

- Önnek nagyon súlyos betegsége van; tíz közül csak egy beteg éli túl.

## A valószínűség nem garancia!

### Dr. Tel

Betegvizsgálat után, hosszas fejrázás közben:

- Önnek nagyon súlyos betegsége van; tíz közül csak egy beteg éli túl.

majd nyugtatólag:

- De nagy szerencséje van, hogy hozzám fordult!
  Eddig kilenc hasonló betegem volt és eddig mindenki belehalt . . .

## A valószínűség nem garancia!

### Dr. Tel

Betegvizsgálat után, hosszas fejrázás közben:

- Önnek nagyon súlyos betegsége van; tíz közül csak egy beteg éli túl.

majd nyugtatólag:

- De nagy szerencséje van, hogy hozzám fordult!
  Eddig kilenc hasonló betegem volt és eddig mindenki belehalt . . .

Nem biztos, hogy helyesen értelmezett a valószínűség!

## Váltsunk vagy ne?

Televizióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

## Váltsunk vagy ne?

Televizióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

## Váltsunk vagy ne?

Televizióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

## Váltsunk vagy ne?

Televizióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

## Váltsunk vagy ne?

Televizióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos váltson vagy ne.
Vélemények:

- úgysem tudja, hogy jó-e. Ne váltson!
- rosszabb nem lehet, tehát váltson!
- meg tudjuk vizsgálni?

## Váltsunk vagy ne?

Televizióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos váltson vagy ne.
Vélemények:

- úgysem tudja, hogy jó-e. Ne váltson!
- rosszabb nem lehet, tehát váltson!
- meg tudjuk vizsgálni?

## Váltsunk vagy ne?

Televizióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos váltson vagy ne.
Vélemények:

- úgysem tudja, hogy jó-e. Ne váltson!
- rosszabb nem lehet, tehát váltson!
- meg tudjuk vizsgálni?

## Váltsunk vagy ne?

Televizióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos váltson vagy ne.
Vélemények:

- úgysem tudja, hogy jó-e. Ne váltson!
- rosszabb nem lehet, tehát váltson!
- meg tudjuk vizsgálni?

## Váltsunk vagy ne?

Televizióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos váltson vagy ne.

- Fontos a cselekvés sorrendje;
- A műsorvezető mindig tud választani;
- Az ajtó kinyitásával eggyel kevesebb lehetőség marad;
- Ha váltunk, az esélyünk $2/3$, ha nem, akkor marad az $1/3$.

## Váltsunk vagy ne?

Televizióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos váltson vagy ne.

- Fontos a cselekvés sorrendje;
- A műsorvezető mindig tud választani;
- Az ajtó kinyitásával eggyel kevesebb lehetőség marad;
- Ha váltunk, az esélyünk $2/3$, ha nem, akkor marad az $1/3$.

## Váltsunk vagy ne?

Televizióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos váltson vagy ne.

- Fontos a cselekvés sorrendje;
- A műsorvezető mindig tud választani;
- Az ajtó kinyitásával eggyel kevesebb lehetőség marad;
- Ha váltunk, az esélyünk $2/3$, ha nem, akkor marad az $1/3$.

### Váltsunk vagy ne?

Televizióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos váltson vagy ne.

- Fontos a cselekvés sorrendje;
- A műsorvezető mindig tud választani;
- Az ajtó kinyitásával eggyel kevesebb lehetőség marad;
- Ha váltunk, az esélyünk $2/3$, ha nem, akkor marad az $1/3$.

# Rab dilemmája

Mosteller'65

## Kérdezzen vagy ne?

Három rabnak tudomására jut, hogy másnap ketten kegyelemmel szabadulnak. Az egyik rab megtudhatna egy nevet, aki rajta kívül szabadul.

A rab **nem kérdi meg**, ugyanis:

- ha nem kérdezi meg, akkor $2/3$ eséllyel szabadul;
- ellenben, ha megkérdi, akkor
  - megtudja egy személynek a nevét, aki szabadulni fog, és
  - mivel tudja, hogy vagy ő vagy egy másik társa a második,
  - a szabadulásának az esélye $1/2$-re csökken.

## Helyesen járt el?

# Rab dilemmája

Mosteller'65

## Kérdezzen vagy ne?

Három rabnak tudomására jut, hogy másnap ketten kegyelemmel szabadulnak. Az egyik rab megtudhatna egy nevet, aki rajta kívül szabadul.

A rab **nem kérdi meg**, ugyanis:

- ha nem kérdezi meg, akkor $2/3$ eséllyel szabadul;
- ellenben, ha megkérdi, akkor
  - megtudja egy személynek a nevét, aki szabadulni fog, és
  - mivel tudja, hogy vagy ő vagy egy másik társa a második,
  - a szabadulásának az esélye $1/2$-re csökken.

## Helyesen járt el?

Miért nem?

# Tartalom

# Eseménytér $\Omega$

**Eseménytér $\Omega$**

Egy véletlen kísérlet lehetséges eseményeinek összessége.

Pl:

- érme dobásánál $\Omega = \{F, I\}$,
- kocka dobásánál az $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
- egy négyzetre leejtett tű hegyének a koordinátái esetén: $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

# Események $\mathcal{F}$

## Események $\mathcal{F}$

Az $\Omega$ eseménytér $\sigma$-algebráját eseményeknek nevezzük.
$\sigma$-algebra:

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- ha $A \in \mathcal{F}$, akkor $\overline{A} \in \mathcal{F}$,
- ha $A, B \in \mathcal{F}$, akkor $A \cup B \in \mathcal{F}$,
- ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, akkor $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{F}$,

**Megj:** a fenti tulajdonságok a konzisztenciát biztosítják.

- **biztos esemény**: az összes lehetséges eseményt tartalmazó halmaz. $\Omega$
- **lehetetlen esemény**: az üres halmaz. $\emptyset$

## Valószínűség $P$

A $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ nemnegatív függvény valószínűségi eloszlás, ha

- $P(\Omega) = 1$;
- ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- ha $A_1, A_2, \ldots$ egymást kölcsönösen kizáró események, akkor

$$P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$$

## Valószínűségi mező $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ hármast valószínűségi mezőnek nevezzük.

### Valószínűségi változó $\xi$

A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó, ha

$$\{\xi < x\} = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

### Eloszlásfüggvény $F$

Az

$$F(x) = P(\xi < x)$$

függvényt a $\xi$ változó eloszlásfüggvényének nevezzük.

### Valószínűségi Modell

Egy feladat leírásában teljes vagy részleges specifikációja egy véletlen eseménynek.

**Például:** kockadobás modellje az $X$ valószínűségi változó, mely $6$ lehetséges értéket vehet fel; mindegyiket egyforma valószínűséggel:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

## Bertrand

Mi a valószínűsége annak, hogy egy húr hosszabb, mint a körbe írt egyenlő oldalú háromszög egyik oldala?

## Rögzítsük a húr végét

A lehetőségek tere a $[0, \pi]$ intervallum, a hosszabb húroknak a „helye” a $(\pi/3, 2\pi/3)$ intervallum:

$$\frac{\pi/3}{\pi} = 1/3$$

## Bertrand szerint

a valószínűség nem egyértelmű, amennyiben a generáló mechanizmus nincs megfelelően specifikálva.

### Bertrand

Mi a valószínűsége annak, hogy egy húr hosszabb, mint a körbe írt egyenlő oldalú háromszög egyik oldala?

### Rögzítsük a húr végét

A lehetőségek tere a $[0, \pi]$ intervallum, a hosszabb húroknak a „helye” a $(\pi/3, 2\pi/3)$ intervallum:

$$\frac{\pi/3}{\pi} = 1/3$$

### Rögzítsük a húr irányát

A lehetőségek tere a $[0, r]$ intervallum, a hosszabb húroknak a „helye” a $(0, r/2)$ intervallum:

$$\frac{r/2}{r} = 1/2$$

### Bertrand szerint

a valószínűség nem egyértelmű, amennyiben a generáló mechanizmus nincs megfelelően specifikálva.

### Bertrand

Mi a valószínűsége annak, hogy egy húr hosszabb, mint a körbe írt egyenlő oldalú háromszög egyik oldala?

### Rögzítsük a húr végét

A lehetőségek tere a $[0, \pi]$ intervallum, a hosszabb húroknak a „helye” a $(\pi/3, 2\pi/3)$ intervallum:

$$\frac{\pi/3}{\pi} = 1/3$$

### Rögzítsük a húr irányát

A lehetőségek tere a $[0, r]$ intervallum, a hosszabb húroknak a „helye” a $(0, r/2)$ intervallum:

$$\frac{r/2}{r} = 1/2$$

### Rögzítsük a húr közepét

A lehetőségek tere a kör, a hosszabb húroknak a „helye” az $r/2$ sugarú kör:

$$\frac{\pi(r/2)^2}{\pi r^2} = 1/4$$

### Bertrand szerint

a valószínűség nem egyértelmű, amennyiben a generáló mechanizmus nincs megfelelően specifikálva.

### Bertrand

Mi a valószínűsége annak, hogy egy húr hosszabb, mint a körbe írt egyenlő oldalú háromszög egyik oldala?

### Rögzítsük a húr végét

A lehetőségek tere a $[0, \pi]$ intervallum, a hosszabb húroknak a „helye” a $(\pi/3, 2\pi/3)$ intervallum:

$$\frac{\pi/3}{\pi} = 1/3$$

### Rögzítsük a húr irányát

A lehetőségek tere a $[0, r]$ intervallum, a hosszabb húroknak a „helye” a $(0, r/2)$ intervallum:

$$\frac{r/2}{r} = 1/2$$

### Rögzítsük a húr közepét

A lehetőségek tere a kör, a hosszabb húroknak a „helye” az $r/2$ sugarú kör:

$$\frac{\pi(r/2)^2}{\pi r^2} = 1/4$$

### Bertrand szerint

a valószínűség nem egyértelmű, amennyiben a generáló mechanizmus nincs megfelelően specifikálva.

## Tekintsük a húr közepét

majd vizsgáljuk meg a középpontok eloszlását a különböző modellek szerint.

1. **A húr modell szerint:**
   - Rögzítjük az érintőt, majd mintavételezzük az $\alpha \in [0, \pi]$ szöget, ekkor a középpont koordinátái:

     $$x_c = -R \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha \qquad y_c = R \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

   - Az érintő $\theta \in [0, 2\pi]$ szögét is választjuk; ez egy forgatást eredményez:

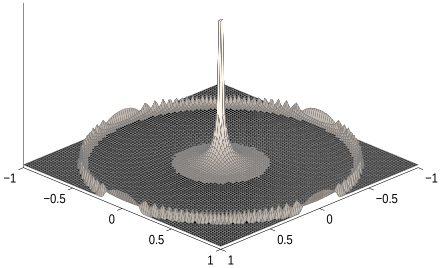
     $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix}$$

2. **Az irány modell szerint** mintavételezzük a hosszat $r \in [0, R]$ majd elforgatjuk $\theta \in [0, 2\pi]$ szöggel.
3. **A középpont modell szerint** mintavételezzük a középpontot.

```
N = 5000000;        % a minták száma

%! a húr módszer
alpha = rand(N,1)*pi;
theta = rand(N,1)*2*pi;
cTh = cos(theta); sTh = sin(theta);
p = [-cos(alpha) sin(alpha)];
p = repmat(-p(:,1),[1,2]) .* p;
% forgatás
p1(:,1)= p(:,1).*cTh + p(:,2).*sTh;
p1(:,2)=-p(:,1).*sTh + p(:,2).*cTh;
%! az irány modell szerint
p2(:,1) = alpha/pi;
p2(:,2) = -p2(:,1).*sTh;
p2(:,1) =  p2(:,1).*cTh;
%! a középpont modell szerint
N2 = round(N * 4 / pi); % több kell
p3 = (rand([N2,2])-.5)*2;
ll = sum(p3.^2,2);
ind = ll<1;
p3 = p3(ind,:);
```

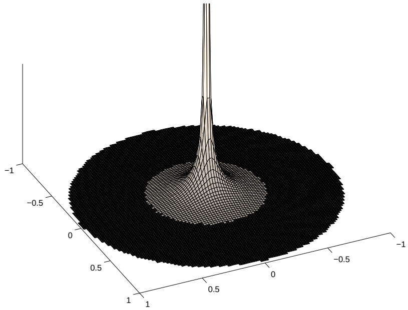
A **húr** mintavételezéssel:



```
N = 5000000;        % a minták száma

%! a húr módszer
alpha = rand(N,1)*pi;
theta = rand(N,1)*2*pi;
cTh = cos(theta); sTh = sin(theta);
p = [-cos(alpha) sin(alpha)];
p = repmat(-p(:,1),[1,2]) .* p;
% forgatás
p1(:,1)= p(:,1).*cTh + p(:,2).*sTh;
p1(:,2)=-p(:,1).*sTh + p(:,2).*cTh;
%! az irány modell szerint
p2(:,1) = alpha/pi;
p2(:,2) = -p2(:,1).*sTh;
p2(:,1) =  p2(:,1).*cTh;
%! a középpont modell szerint
N2 = round(N * 4 / pi); % több kell
p3 = (rand([N2,2])-.5)*2;
ll = sum(p3.^2,2);
ind = ll<1;
p3 = p3(ind,:);
```

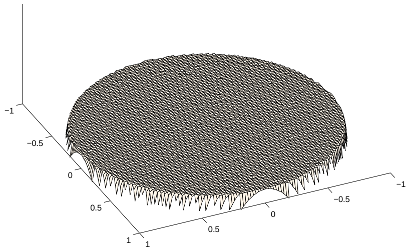
Az irány mintavételezéssel:



```
N = 5000000;          % a minták száma

%! a húr módszer
alpha = rand(N,1)*pi;
theta = rand(N,1)*2*pi;
cTh = cos(theta); sTh = sin(theta);
p = [-cos(alpha) sin(alpha)];
p = repmat(-p(:,1),[1,2]) .* p;
% forgatás
p1(:,1)= p(:,1).*cTh + p(:,2).*sTh;
p1(:,2)=-p(:,1).*sTh + p(:,2).*cTh;
%! az irány modell szerint
p2(:,1) = alpha/pi;
p2(:,2) = -p2(:,1).*sTh;
p2(:,1) =  p2(:,1).*cTh;
%! a középpont modell szerint
N2 = round(N * 4 / pi); % több kell
p3 = (rand([N2,2])-.5)*2;
ll = sum(p3.^2,2);
ind = ll<1;
p3 = p3(ind,:);
```

A középpont mintavételezéssel:



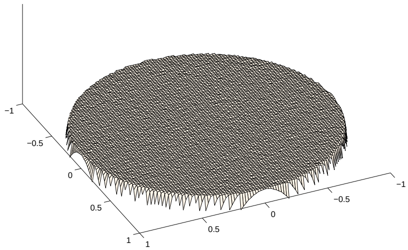
# Szimuláció II



```
N = 5000000;        % a minták száma

%! a húr módszer
alpha = rand(N,1)*pi;
theta = rand(N,1)*2*pi;
cTh = cos(theta); sTh = sin(theta);
p = [-cos(alpha) sin(alpha)];
p = repmat(-p(:,1),[1,2]) .* p;
% forgatás
p1(:,1)= p(:,1).*cTh + p(:,2).*sTh;
p1(:,2)=-p(:,1).*sTh + p(:,2).*cTh;
%! az irány modell szerint
p2(:,1) = alpha/pi;
p2(:,2) = -p2(:,1).*sTh;
p2(:,1) =  p2(:,1).*cTh;
%! a középpont modell szerint
N2 = round(N * 4 / pi); % több kell
p3 = (rand([N2,2])-.5)*2;
ll = sum(p3.^2,2);
ind = ll<1;
p3 = p3(ind,:);
```

A középpont mintavételezéssel:




## Jaynes szerint

Amennyiben nincs más információ, akkor azt a megoldást kellene elfogadni, mely a legkevésbé tünteti ki a különböző régiókat:
$\Rightarrow$ az egyenletes az elfogadott megoldás.

# Várható érték (F.04)

## Várható érték $E[\xi]$

Ha a $\xi$ valószínűségi változó értékeinek száma véges: $\{x_1, \ldots, x_d\}$, és $p_i = P(\xi = x_i)\ \forall i$, akkor

$$E[\xi] = \sum_i x_i p_i.$$

## Szórás $D(\xi)$

A

$$D(\xi) = \left((\xi - E[\xi])^2\right)^{1/2}$$

mennyiség a $\xi$ valószínűségi változó szórása.

# Példa (F.04)

## Várható érték

Határozzuk meg az

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ \frac{x}{4} & \text{ha } 0 \leq x < 4 \\ 1 & \text{ha } x \geq 4 \end{cases}$$

valószínűségi változó várható értékét.

**Megoldás:**

Az eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{ha } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{másképp} \end{cases}$$

Az átlag tehát:

$$E[x] = \int_0^4 \frac{x}{4} dx = \frac{x^2}{8}\Big|_0^4 = 2$$

# Binomiális eloszlás (F.04)

## Binomiális eloszlás $\xi \sim B(n,p)$

Legyen $A \in \mathcal{F}$. Végezzünk egy $n$ hosszúságú Bernoulli kísérletsorozatot és legyen $\xi$ az $A$ esemény bekövetkeztének a száma.
Ha $p(A) = p$ és $q = 1 - p$, akkor

$$p(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

**Az eloszlás átlaga:**

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \sum_{k=0}^{n} kP(\xi = k) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= np \end{aligned}$$

**A szórás:**

$$D(\xi) = \sqrt{npq}$$

**Poisson eloszlás** $\xi \sim Poisson(\lambda)$

A

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

eloszlással adott változót Poisson eloszlásnak nevezzük ($\lambda > 0$).

**Az eloszlás átlaga:**

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

**A szórás:**

$$D(\xi) = E[\xi^2] - E^2[\xi] = \lambda$$

### Egyenletes eloszlás $\xi \sim U(a,b)$

A

$$P(\xi = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{ha } a < x < b \\ 0 & \text{másképp} \end{cases} \tag{1}$$

eloszlással adott változót egyenletes eloszlásnak nevezzük.

**Az eloszlás átlaga:**

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left. \frac{x^2}{2(b-a)} \right|_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

**A szórása:**

$$D(\xi) = E[\xi^2] - E^2[\xi] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

**Megj:** az egyenletes eloszlás a véletlenszám-generátorok alapja.

**Normális eloszlás** $\xi \sim N(m, \sigma)$

Legyen $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$. A $\xi$ normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left( -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right)$$

**Az eloszlás átlaga:**

$$E[\xi] = m \qquad D(\xi) = \sigma$$

Az eloszlás centrális szerepet játszik a modern valószínűségben.
**De Moivre** (1738): „Merem állítani, hogy ez a legnehezebb probléma, amit fel lehet vetni a Véletlen Tudományában... (Sz.04)”

# Paradoxon (Sz.04)

## Kockázás

Két kocka esetén a $9$ és a $10$ is ugyanannyiszor írható fel.
$9 = 6 + 3 = 4 + 5$ illetve $10 = 6 + 4 = 5 + 5$
Miért van az, hogy a $9$ valószínűsége mégis nagyobb, mint a tízé.

Fontos az eseménytér meghatározása!

**Tévedtek:**

- Leibnitz
- d'Alembert

```
% kísérletek száma
N = 50000000;
% dobások
kocka = ceil(6*rand(N,2));

osszeg= sum(kocka,2);
% számolás
kilenc= length(find(osszeg==9));
tiz   = length(find(osszeg==10));
```

Eredmény:

kilenc: $5554431$
tiz: $4163003$

## Osztozkodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer $6$ játszmát. A játék félbemarad, amikor az első $5$, a második $3$ játszmát nyert.

Mennyi a méltányos osztozkodás aránya?

Modell

## Osztozkodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer $6$ játszmát. A játék félbemarad, amikor az első $5$, a második $3$ játszmát nyert.
Mennyi a méltányos osztozkodás aránya? Modell

- Arab eredetű, már 1380-ban megjelent Itáliában.
- Először 1497-ben jelent meg Paccioli könyvében, a valószínűségi jelleg nélkül;
- A helyes megoldás nagyon soká született meg.

# Osztozkodás paradoxona — Paccioli

## Osztozkodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer $6$ játszmát. A játék félbemarad, amikor az első $5$, a második $3$ játszmát nyert.
Mennyi a méltányos osztozkodás aránya? Modell

- Mit vizsgálunk?
- $5:3$ állásnál legtöbb $3$ játszma lesz;
- $7$ kedvező az első; $1$ a második játékos számára;
- A méltányos arány tehát a $7/1$ !

# Osztozkodás paradoxona — Paccioli

## Osztozkodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer $6$ játszmát. A játék félbemarad, amikor az első $5$, a második $3$ játszmát nyert.

Mennyi a méltányos osztozkodás aránya? Modell

- Mit vizsgálunk?

- $5:3$ állásnál legtöbb $3$ játszma lesz;
- $7$ kedvező az első; $1$ a második játékos számára;

- A méltányos arány tehát a $7/1$ !

## Osztozkodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer $6$ játszmát. A játék félbemarad, amikor az első $5$, a második $3$ játszmát nyert.
Mennyi a méltányos osztozkodás aránya? Modell

- Mit vizsgálunk? A további lehetséges eseteket.
- $5:3$ állásnál legtöbb $3$ játszma lesz;
- $7$ kedvező az első; $1$ a második játékos számára;
- A méltányos arány tehát a $7/1$ !

## Osztozkodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer $6$ játszmát. A játék félbemarad, amikor az első $5$, a második $3$ játszmát nyert.
Mennyi a méltányos osztozkodás aránya? Modell

- Mit vizsgálunk? A további lehetséges eseteket.
- $5:3$ állásnál legtöbb $3$ játszma lesz;
- $7$ kedvező az első; $1$ a második játékos számára;
- A méltányos arány tehát a $7/1$ !

## Osztozkodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer $6$ játszmát. A játék félbemarad, amikor az első $5$, a második $3$ játszmát nyert.
Mennyi a méltányos osztozkodás aránya? Modell

- Mit vizsgálunk? A további lehetséges eseteket.
- $5:3$ állásnál legtöbb $3$ játszma lesz;
- $7$ kedvező az első; $1$ a második játékos számára;
- A méltányos arány tehát a $7/1$ !

## Osztozkodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer $6$ játszmát. A játék félbemarad, amikor az első $5$, a második $3$ játszmát nyert.
Mennyi a méltányos osztozkodás aránya? Modell

- Mit vizsgálunk? A további lehetséges eseteket.

- $5:3$ állásnál legtöbb $3$ játszma lesz;
- $7$ kedvező az első; $1$ a második játékos számára;

- A méltányos arány tehát a $7/1$ !

**Hatosok keresése** $P(A_{\text{hatos}})$

Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy kocka kétszeri dobásánál *legalább egy* hatos van.

**Megoldás:**
Az elemi események az összes *rendezett páros*:

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (2,1) & (2,2) & \cdots & \cdots & (6,6) \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \cdots & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \cdots & \cdots & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

Ezek közül kedvező: $(1,6), \ldots, (5,6)$, valamint az összes eset, ahol az első szám a hatos.
Azaz:

$$P(A_{\text{hatos}}) = 11 \cdot \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

# Feladat 2 (Sz.04)

**Adott összeg** $P(A_{ossz9}), \quad P(B_{ossz10})$

Mekkora a valószínűsége annak, hogy két kocka dobásakor a számok összege $9$?
A számok összege $10$?

# Feladat 2 (Sz.04)

## Adott összeg $P(A_{ossz9})$, $P(B_{ossz10})$

Mekkora a valószínűsége annak, hogy két kocka dobásakor a számok összege $9$?
A számok összege $10$?

**Megoldás:**

$9 = 6+3 = 5+4 = 4+5 = 3+6 \quad \Rightarrow P(A_{ossz9}) = 4/36$

$10 = 6+4 = 5+5 = 4+6 \quad \Rightarrow P(A_{ossz10}) = 3/36$

## Adott összeg $P(A_{ossz9})$, $P(B_{ossz10})$

Mekkora a valószínűsége annak, hogy két kocka dobásakor a számok összege $9$?
A számok összege $10$?

**Megoldás:**

$$9 = 6+3 = 5+4 = 4+5 = 3+6 \quad \Rightarrow P(A_{ossz9}) = 4/36$$
$$10 = 6+4 = 5+5 = 4+6 \quad \Rightarrow P(A_{ossz10}) = 3/36$$

## Adott összeg $P(A_{ossz9})$, $P(B_{ossz10})$

Mekkora a valószínűsége annak, hogy **három** kocka dobásakor a számok összege $9$?
És a számok összege $10$?

# Feladat 2 (Sz.04)

## Adott összeg $P(A_{ossz9})$, $P(B_{ossz10})$

Mekkora a valószínűsége annak, hogy két kocka dobásakor a számok összege $9$?
A számok összege $10$?

**Megoldás:**

$$9 = 6+3 = 5+4 = 4+5 = 3+6 \quad \Rightarrow P(A_{ossz9}) = 4/36$$
$$10 = 6+4 = 5+5 = 4+6 \quad \Rightarrow P(A_{ossz10}) = 3/36$$

## Adott összeg $P(A_{ossz9})$, $P(B_{ossz10})$

Mekkora a valószínűsége annak, hogy **három** kocka dobásakor a számok összege $9$?
És a számok összege $10$?

**Megoldás:**

$$9 = 6+2+1 = 6+1+2 = 5+3+1 = \ldots \quad \Rightarrow P(A_{ossz9}) = 25/216$$
$$10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 6+1+3 = \ldots \quad \Rightarrow P(A_{ossz9}) = 27/216$$

# Feladat 3 (F.07)

## Valószínűségek becslése

Ádám és Éva azonos képességű játékosok. Mekkora a valószínűsége, hogy:

- Ádám négy meccsből pontosan hármat nyer?
- Éva nyolc meccsből pontosan ötöt nyer?

## Valószínűségek becslése

Ádám és Éva azonos képességű játékosok. Mekkora a valószínűsége, hogy:

- Ádám négy meccsből pontosan hármat nyer?
- Éva nyolc meccsből pontosan ötöt nyer?

**Megoldás:**
Ádám nyer (1) vagy veszít (0). Négy meccs $2^4 = 16$ módon végződhet. Ebből $4$ kedvező Ádámnak: $1/4$.

## Valószínűségek becslése

Ádám és Éva azonos képességű játékosok. Mekkora a valószínűsége, hogy:

- Ádám négy meccsből pontosan hármat nyer?
- Éva nyolc meccsből pontosan ötöt nyer?

**Megoldás:**
Ádám nyer (1) vagy veszít (0). Négy meccs $2^4 = 16$ módon végződhet.
Ebből $4$ kedvező Ádámnak: $1/4$.

Éva nyer (1) vagy veszít (0). Nyolc meccs $2^8$ módon végződhet.
Ebből $V(8,5) = 8 \cdot 7 \cdot 6/(1 \cdot 2 \cdot 3)$ kedvező Évának: $7/32$

## Valószínűségek becslése

Balázs és Marci négy dobókocka feldobásával döntik el, ki sétáltatja a kutyát. Az egyszerre dobott kockák között ha van hatos, akkor Balázs, különben Marci sétáltatja a kutyát.
Igazságos a módszer?

# Feladat 4 (KöMaL.04)

## Valószínűségek becslése

Balázs és Marci négy dobókocka feldobásával döntik el, ki sétáltatja a kutyát. Az egyszerre dobott kockák között ha van hatos, akkor Balázs, különben Marci sétáltatja a kutyát.
Igazságos a módszer?

**Megoldás:**
Négy kockában nincs hatos:

$$\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6} = 0.4822$$

## Valószínűségek becslése

Balázs és Marci négy dobókocka feldobásával döntik el, ki sétáltatja a kutyát. Az egyszerre dobott kockák között ha van hatos, akkor Balázs, különben Marci sétáltatja a kutyát.
Igazságos a módszer?

**Megoldás:**
Négy kockában nincs hatos:

$$\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6} = 0.4822$$

Tehát a módszer nem igazságos!

## Urnafeladat

$n$ golyót helyezünk véletlenszerűen $n$ urnába.
Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan $1$ marad üresen?

## Urnafeladat

$n$ golyót helyezünk véletlenszerűen $n$ urnába.
Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan $1$ marad üresen?

**Megoldás:**
Minden urnába egy golyó: $p(A_{mind}) = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{n} = \frac{n!}{n^n}$

Kijelölünk egy üres urnát illetve egyet, melyben két golyó lesz: $n(n-1)$

Kiválasztunk két golyót az $n$ közül $\binom{n}{2}$.

A maradék $n-2$-t elhelyezzük az $n-2$ urnába: $(n-2)!$.

$$p(A_{mind-1}) = \frac{n(n-1)\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot(n-2)!}{n^n} = \frac{(n-1)!\cdot(n-1)}{2\cdot n^{n-2}}$$

## Első előfordulás

Három játékos társasjátékot kezd. Egymás után dobnak egyet egy dobókockával. Az kezd, aki elsőként dob hatost.

- Mekkora valószínűséggel lesznek kezdők egy-egy dobás után az egyes résztvevők?
- Mekkora annak a valószínűsége, hogy nem tudják elkezdeni a játékot egy kör után?
- Számítsuk ki egyes résztvevőkre annak a valószínűségét, hogy éppen ő kezdhet!

**Megoldás:**
Az első kezd: $P(elso) = 1/6$,
a második kezd $P(masod) = 5/6 \cdot 1/6 = 5/36$,
a harmadik kezd $P(harmad) = 5/6 \cdot 5/6 \cdot 1/6 = 25/216$.

**Megoldás: (folyt)**

Egy kör után nem kezdenek:

$$P(nemelso) = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = 0.5787$$

Az első játékos kezdési valószínűsége:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 & \frac{1}{6} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^2 & \dots \end{pmatrix}$$

A teljes valószínűség:

$$\frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^k = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5^3}{6^3}} = \frac{36}{91}$$

A második $\frac{30}{91}$, a harmadik $\frac{25}{91}$ valószínűséggel kezd.

## Sakktábla

Helyezzünk el a sakktáblán találomra bástyákat ($2 \leq k \leq 8$).
Mekkora a valószínűsége annak, hogy a bástyák nem ütik egymást.

## Könyvek

Egy könyvespolcról Pisti leszedte a könyveket, majd véletlenszerűen visszarakta mind a $25$-öt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a köztük levű három idegen nyelvű könyv egymás mellé került?

## Érmék

Öt pénzérme feldobásakor mennyi a valószínűsége, hogy pontosan három érmén a fej lesz felül?

## Négyesek és ötösok a lottón

Az ötös lottón 90 számból választanak 5-öt a szelvények kitöltői. Hányszor nagyobb a valószínűsége egy négytalálatos szelvénynek, mint az öttalálatosnak?

## Négyesek és ötösök a lottón

Az ötös lottón 90 számból választanak 5-öt a szelvények kitöltői. Hányszor nagyobb a valószínűsége egy négytalálatos szelvénynek, mint az öttalálatosnak?

**Megoldás:**
Ötösünk van, ha a $90$ szám közül pont azt az ötöt húzzák:

$$P(otos) = \frac{1}{\binom{90}{5}} = 0.000000022753 = 2.27 \cdot 10^{-8}$$

Négyesünk van, ha egy szám hiányzik, ez pedig a maradék $85$ szám valamelyike:

$$P(negyes) = \frac{\binom{5}{1}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} = 0.00000967 = 0.96 \cdot 10^{-5}$$

A kettő aránya $425$.

## Ropik

Három egyenlő hosszú ropiból véletlenszerűen kitörünk egy-egy darabot. A törési pontok kiválasztása egymástól független és egyenletes.

- mekkora a valószínűsége annak, hogy a maradékokból háromszöget lehet alkotni?
- mekkora a valószínűsége annak, hogy a maradékokból hegyesszögű háromszöget lehet alkotni?

## Ropik

Három egyenlő hosszú ropiból véletlenszerűen kitörünk egy-egy darabot. A törési pontok kiválasztása egymástól független és egyenletes.

- mekkora a valószínűsége annak, hogy a maradékokból háromszöget lehet alkotni?
- mekkora a valószínűsége annak, hogy a maradékokból hegyesszögű háromszöget lehet alkotni?

**Megoldás:**
$l_1 \leq l_2 \leq l_3$. A gúla térfogata $1/6$.
Háromszög akkor, ha $l_3 < l_1 + l_2$.

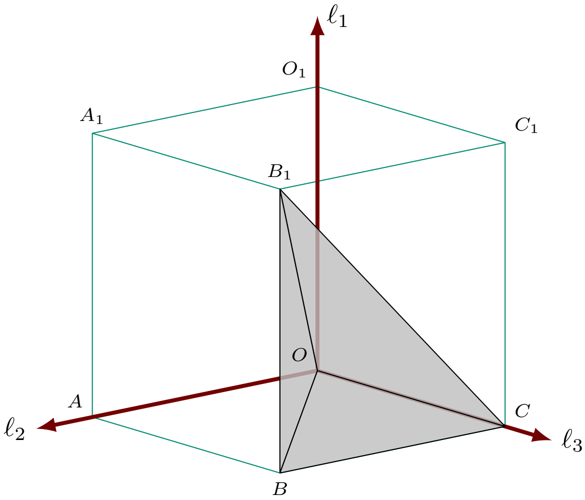
## Ropik

Három egyenlő hosszú ropiból véletlenszerűen kitörünk egy-egy darabot. A törési pontok kiválasztása egymástól független és egyenletes.

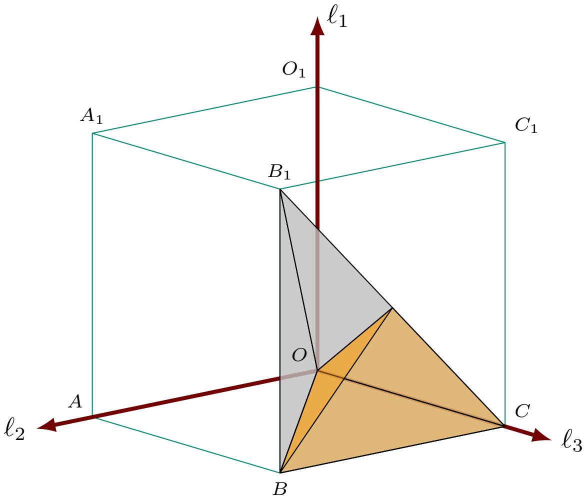
- mekkora a valószínűsége annak, hogy a maradékokból háromszöget lehet alkotni?
- mekkora a valószínűsége annak, hogy a maradékokból hegyesszögű háromszöget lehet alkotni?

**Megoldás:**
$l_1 \leq l_2 \leq l_3$. A gúla térfogata $1/6$.
Háromszög akkor, ha $l_3 < l_1 + l_2$.
Ki kell vonnunk egy gúlát, melynek térfogata $1/12$.
Az összes lehetséges eset és az elfogadható esetek aránya.

$$P(\Delta) = \frac{1}{2}$$




- $\ell_1 < \ell_2 < \ell_3$
- $\ell_1 + \ell_2 > \ell_3$




- $\ell_1 < \ell_2 < \ell_3$
- $\ell_1 + \ell_2 > \ell_3$

# Matlab segédfüggvények



A **MATLAB** programnyelv támogatja a

- mátrix-jelölést: ciklusok helyett „matematikusan”:
  $$C = A * B$$
- gyors prototípusok készítését:
  pl. nincsenek változó-kijelentések.
- numerikus szimulációk írását,

Valószínűségszámítási függvények:

- `rand(m,n)` egy $m \times n$-es mátrixot feltölt pszeudorandom számokkal;
- `hist(X)` egy mátrix(vektor) értékeinek gyakoriságát rajzolja ki;

# Szimulációk

Egy szimuláció **teszteli** a kigondolt elmélet helyességét.

A szimulátor–program struktúrája a következő:

1. Változók meghatározása, a kísérletek számának a meghatározása.
2. for $i \leftarrow 1 \dots N$
   - szimuláld az $i$-edik kísérletet.
   - vizsgáld meg az eredményt.
3. end for
4. jelenítsd meg az eredményeket (elemzés).

# Tartalom

# Lottózás





Felmerülő kérdések:

- létezik nyerő stratégia a lottón?
- létezik jó kombináció amit játszani érdemes?

*ha **igen**, melyek ezek*

- természetesen nincs nyerő stratégia,
- Jó kombináció ≡ ha nyerünk, mások ne legyenek a listán.

Túl szabályos tippek: pl. „két egymás utáni szám”, egy ötszámjegyű egymásutáni számsorozat, …

# Lottózás

Felmerülő kérdések:

- létezik nyerő stratégia a lottón?
- létezik jó kombináció amit játszani érdemes?

*ha **igen**, melyek ezek*

- természetesen nincs nyerő stratégia,
- Jó kombináció = ha nyerünk, mások ne legyenek a listán.

Túl szabályos tippek: pl. „két egymás utáni szám”, egy ötszámjegyű egymásutáni számsorozat, . . .

# Lottózás

Felmerülő kérdések:

- létezik nyerő stratégia a lottón?
- létezik jó kombináció amit játszani érdemes?

*ha* ***igen****, melyek ezek*

- természetesen nincs nyerő stratégia,
- Jó kombináció $\equiv$ ha nyerünk, mások ne legyenek a listán.

Túl szabályos tippek: pl. „két egymás utáni szám”, egy ötszámjegyű egymásutáni számsorozat, ...

# Lottózás

Felmerülő kérdések:

- létezik nyerő stratégia a lottón?
- létezik jó kombináció amit játszani érdemes?

*ha **igen**, melyek ezek*

- természetesen nincs nyerő stratégia,
- Jó kombináció $\equiv$ ha nyerünk, mások ne legyenek a listán.

Túl szabályos tippek: pl. „két egymás utáni szám”, egy ötszámjegyű egymásutáni számsorozat, ...

# Lottózás

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0001 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 1010 | 0000 | 0000 | 0000 | 0101 |
| 0000 | 0100 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0001 | 0000 |
| 1100 | 0010 | 0000 | 0000 | 1000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0001 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0100 | 1000 | 0000 | 1000 | 0000 | 0000 | 0100 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0010 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 1000 | 0100 | 0000 | 0000 | 0010 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0010 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 0100 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0010 | 0000 | 0001 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0010 | 0000 | 0000 | 0001 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0100 | 0001 |
| 0001 | 1000 | 0000 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0100 |
| 0001 | 0000 | 0000 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0010 | 0000 | 0000 | 0000 | 0100 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0100 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0010 | 1000 | 1000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0001 |
| 0000 | 0010 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 1000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 1000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0100 | 0000 | 0000 | 0000 | 1001 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0010 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 1000 | 0000 | 0000 |
| 0000 | 0010 | 0000 | 1000 | 0100 | 0000 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 1000 |
| 0001 | 0000 | 0010 | 0000 | 0010 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0001 | 0000 |

# Lottózás





## Egymásutáni számok ritkák:

- két egymásutáni szám:

$$P_{2eu} \approx 89 \cdot \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} = 0.2222$$

- három,négy egymásutáni szám:

$$P_{3eu} \approx 88 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{88 \cdot 89 \cdot 90} = 0.0075$$

$$P_{4eu} \approx 0.00017$$

**Nagy nyereségre számíthatunk**

ha nyerünk és „ritka" kombinációkat választunk.

# Lottózás



## Egymásutáni számok ritkák:

- két egymásutáni szám:

$$P_{2eu} \approx 89 \cdot \frac{5\cdot 4}{90\cdot 89} = 0.2222$$

- három,négy egymásutáni szám:

$$P_{3eu} \approx 88 \cdot \frac{5\cdot 4\cdot 3}{88\cdot 89\cdot 90} = 0.0075$$

$$P_{4eu} \approx 0.00017$$

**Nagy nyereségre számíthatunk**

ha nyerünk és „ritka” kombinációkat választunk.

# MATLAB program

```
% lotto paradoxon szimulacio
% parameterek
nL   = 90;           % az osszes szam
n0   = 5;            % hanyat
nH   = 100000;       % hany jatekot szimulalunk
% generaljuk
lOsszes = ceil(rand(nH,n0)*90);
% rendezzuk NOVEKVO sorrendbe
lOsszes = sort(lOsszes,2);
% keressuk az egymasutani szamokat
fMat   = [1 -1];      % szuro matrix
lSucc = filter(fMat,1,lOsszes,-100,2);
lSucc = lSucc(:,2:end);
% keressuk azon elemeket, ahol 1 a kulonbseg
iTwo = find(lSucc==1);
fprintf('Ket elemhossz: %5.4f',length(iTwo)/nH);

% nullazunk minden indexet, ami NEM egy.
lInd=zeros(size(lSucc));
lInd(iTwo) = 1;
fMat    = [1 1];      % szuro matrix
lThree = filter(fMat,1,lInd,-100,2);
iThree = find(lThree==2);

fprintf('Harom elemhossz: %5.4f',length(iThree)/nH);
```

Eredmények (100e):

| T# | Kettő | Három |
|---|---|---|
| 1 | 0.2238 | 0.0077 |
| 2 | 0.2226 | 0.0075 |
| 3 | 0.2203 | 0.0073 |
| 4 | 0.2232 | 0.0074 |
| ... | | |

# Függetlenség paradoxona

**Megfogalmazás:**
Két szabályos érme dobásánál jelölje $A$ az „első dobás fej”; $B$ a „második dobás fej”; $C$ pedig azt, hogy a két dobás közül egy (és csak egy) fej.

**Ekkor:**

- bármely két esemény független, **ugyanakkor**
- bármely kettő meghatározza a harmadikat.

**Megjegyzés:** $A$ és $B$ függetlenek, ha $p(A, B) = p(A)p(B)$.

# Függetlenség paradoxona



**Megfogalmazás:**
Két szabályos érme dobásánál jelölje $A$ az „első dobás fej”; $B$ a „második dobás fej”; $C$ pedig azt, hogy a két dobás közül egy (és csak egy) fej.

**Ekkor:**

- bármely két esemény független, **ugyanakkor**
- bármely kettő meghatározza a harmadikat.

**Megjegyzés:** $A$ és $B$ függetlenek, ha $p(A,B) = p(A)p(B)$.

# Ajándékozási paradoxon

**Megfogalmazás:**
Egy társaság tagjai kölcsönösen meg akarják ajándékozni egymást. Az ajándékokat összegyűjtik majd kisorsolják.

**Paradoxon:**

Lényegesen nagyobb annak az esélye, hogy lesz valaki, aki visszakapja ajándékát, mint annak, hogy nem kapja senki a saját ajándékát vissza.

Összesen $n!$ eset van. Ebből kedvező

$$\binom{n}{0} n! - \binom{n}{1} (n-1)! + \ldots (-1)^n \binom{n}{n} 0!,$$

ennek aránya

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots (-1)^n \frac{1}{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$$

Sok kicsi sokra mehet!

# Ajándékozási paradoxon



**Megfogalmazás:**
Egy társaság tagjai kölcsönösen meg akarják ajándékozni egymást. Az ajándékokat összegyűjtik majd kisorsolják.

**Paradoxon:**

Lényegesen nagyobb annak az esélye, hogy lesz valaki, aki visszakapja ajándékát, mint annak, hogy nem kapja senki a saját ajándékát vissza.

Összesen $n!$ eset van. Ebből kedvező

$$\binom{n}{0}n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \dots (-1)^n\binom{n}{n}0!,$$

ennek aránya

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots (-1)^n\frac{1}{n!} \to \frac{1}{e}$$

Sok kicsi sokra mehet!

# Ajándékozási paradoxon

**Megfogalmazás:**
Egy társaság tagjai kölcsönösen meg akarják ajándékozni egymást. Az ajándékokat összegyűjtik majd kisorsolják.

**Paradoxon:**

Lényegesen nagyobb annak az esélye, hogy lesz valaki, aki visszakapja ajándékát, mint annak, hogy nem kapja senki a saját ajándékát vissza.

Összesen $n!$ eset van. Ebből kedvező

$$\binom{n}{0}n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \dots (-1)^n\binom{n}{n}0!,$$

ennek aránya

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots (-1)^n\frac{1}{n!} \to \frac{1}{e}$$

Sok kicsi sokra mehet!

# Pétervári paradoxon



**Megfogalmazás:**
Egy szabályos pénzérmével addig dobunk, amíg fejet nem kapunk. Ha az első fej, akkor kapunk $2$ forintot, ha a második, akkor $4$-et, $\ldots$, ha az $n$-edik, akkor $2^n$ forintot.
Mennyi a játék értéke?

$\infty$

Bármennyit fizetünk, várható értékben nyerünk!

Az ismételt játék várható értéke

$$\frac{1}{2}2 + \cdots + \frac{1}{2^n}2^n + \cdots$$

sok kicsi sokra megy! (nem kicsik a mennyiségek ...)

# Pétervári paradoxon

**Megfogalmazás:**
Egy szabályos pénzérmével addig dobunk, amíg fejet nem kapunk. Ha az első fej, akkor kapunk $2$ forintot, ha a második, akkor $4$-et, ..., ha az $n$-edik, akkor $2^n$ forintot.
Mennyi a játék értéke?

$\infty$

Bármennyit fizetünk, várható értékben nyerünk!

Az ismételt játék várható értéke

$$\frac{1}{2}2 + \cdots + \frac{1}{2^n}2^n + \cdots$$

sok kicsi sokra megy! (nem kicsik a mennyiségek ...)

# Pétervári paradoxon

**Megfogalmazás:**
Egy szabályos pénzérmével addig dobunk, amíg fejet nem kapunk. Ha az első fej, akkor kapunk $2$ forintot, ha a második, akkor $4$-et, ..., ha az $n$-edik, akkor $2^n$ forintot.
Mennyi a játék értéke?

$\infty$

Bármennyit fizetünk, várható értékben nyerünk!

Az ismételt játék várható értéke

$$\frac{1}{2}2 + \cdots + \frac{1}{2^n}2^n + \cdots$$

sok kicsi sokra megy! (nem kicsik a mennyiségek ...)

# MATLAB program I

**Modellezési kérdések:**

- milyen gyakran mekkorát nyerünk?
- felső korlát esetén mennyi a játék értéke?

Modellezés:

- kiválasztjuk a sorozat hosszát;
- a szimulációk számát;

```
% szentpetervari paradoxon
jHossz = 10000;
mSzam  = 10000;
nyerek = zeros(mSzam,1);
for ii=1:mSzam;
  % dobasok
  dobas = round(rand(jHossz,1));
  % FEJ keresese
  indF  = find(dobas==1);
  % NEM FEJ sorozatok hossza
  diff = [indF;1+jHossz]- [0;indF];
```

```
  nyer = 2.^diff;
  % szamitjuk a nyereseget
  nyerek(ii)=sum(nyer);
  end;
% hisztogramot iratunk
hist(log10(nyerek),200)
```

Valószínűség és paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi változó

Valószínűségi modell

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

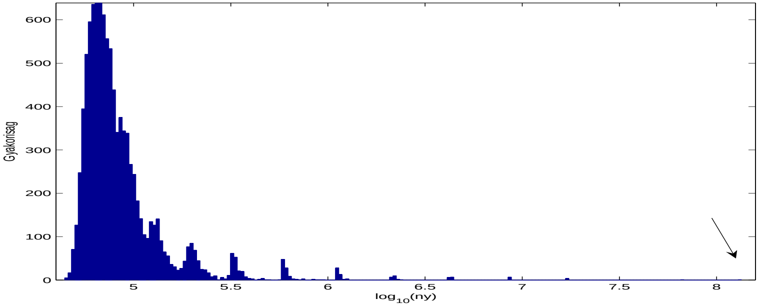
Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

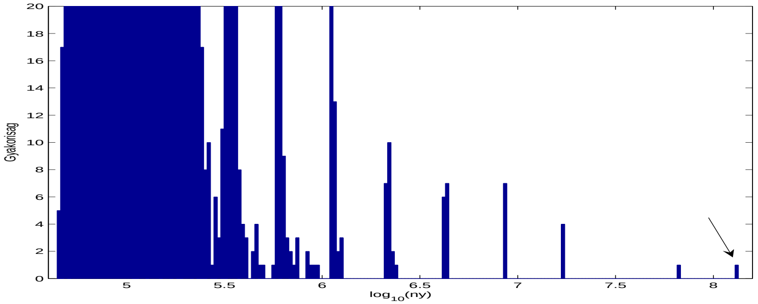
Első előfordulás

De Moivre


| Hossz | Átlag | Átlagnyereség (Ny/dobás) | Max |
|---|---:|---:|---:|
| 100 | 800 | 8 | 524.288 |
| 1.000 | 11.000 | 11 | 2.097.152 |
| 5.000 | 91.000 | 18.2 | 16.777.216 |
| $\Rightarrow$ 10.000 | 168.000 | 16.8 | 134.217.728 |
| 100.000 | 2.000.000 | 20.0 | 1.073.741.824 |
| 500.000 | 23.000.000 | 46.0 | 137.000.000.000 |

# Teszteredmények I




| Hossz | Átlag | Átlagnyereség (Ny/dobás) | Max |
|---|---|---|---|
| 100 | 800 | 8 | 524.288 |
| 1.000 | 11.000 | 11 | 2.097.152 |
| 5.000 | 91.000 | 18.2 | 16.777.216 |
| $\Rightarrow$ 10.000 | 168.000 | 16.8 | 134.217.728 |
| 100.000 | 2.000.000 | 20.0 | 1.073.741.824 |
| 500.000 | 23.000.000 | 46.0 | 137.000.000.000 |

# Teszteredmények II

**A gyakorlatban:** a nyereménynek van egy felső határa, ez maximálja a lehetséges nyereséget. (alább $2^{23} \approx 8m$ a felső határ).

**Felső korlát esetén:**

| Hossz | Átlag | Ny/d. | Korláttal | Ny/d. | Vágás # |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 800 | 8 | 800 | 8 | 0 |
| 1.000 | 11.000 | 11 | 11.000 | 11 | 1 |
| 5.000 | 91.000 | 18.2 | 60.000 | 12 | 2 |
| 10.000 | 168.000 | 16.8 | 117.000 | 11.7 | 5 |
| 100.000 | 2.000.000 | 20 | 1.200.000 | 12 | 60 |
| 500.000 | 23.000.000 | 46 | 6.000.000 | 12 | 295 |

# Játékelméleti paradoxon I

Ketten játszanak: $Q$ és $R$.

- Egy vagy két ujjat mutatnak fel;
- Páros ujj-szám esetén $Q$ fizet $R$-nek, ellenkező esetben fordítva;
- annyit nyernek/veszítenek, ahány ujjat felmutattak.

**Van véletlennél jobb stratégia**

IGEN, egyik játékos veszít!

Melyik?

# Játékelméleti paradoxon I

Ketten játszanak: $Q$ és $R$.

- Egy vagy két ujjat mutatnak fel;
- Páros ujj-szám esetén $Q$ fizet $R$-nek, ellenkező esetben fordítva;
- annyit nyernek/veszítenek, ahány ujjat felmutattak.

**Van véletlennél jobb stratégia**

IGEN, egyik játékos veszít!

**Melyik?**

## Ismételt játékok esetén mi a nyerő stragégia?

Nyereség/veszteség mátrix:

| | Q.1 | Q.2 |
|---|---|---|
| $R.1$ | $2$ | $-3$ |
| $R.2$ | $-3$ | $4$ |

$$\mathbf{r}^T\ \mathbf{M}\ \mathbf{q} = 2r_1q_1 - 3r_1q_2 - 3r_2q_1 + 4r_2q_2$$

Mindegyik játékos úgy játszik, hogy az eredmény **ne** függjön a másik játékostól (és tudva, hogy $r_2 = 1 - r_1,\ q_2 = 1 - q_1$):

$$(12r_1 - 7)q_1 + (4 - 7r_1).$$

$R$ választása: $12r_1 - 7 = 0$.

A megoldás:

$$r_1 = 7/12,\ r_2 = 5/12,\ q_1 = 7/12,\ q_2 = 5/12$$

Átlegnyereség-veszteség: $-1/12$

# Halandósági paradoxon

- az élettartam matematikai vizsgálata *Halley 1693*;
- biztosításelmélet XVII. században indul jelentős fejlődésnek;
- életkor–táblázatok összeállítása;
- *d'Alembert* nevéhez kötődik:

**Életkor**

Az átlagos életkor $26$ év, mégis ugyanakkora az esélye annak, hogy valaki túléli a nyolc évet, mint annak, hogy nem.

- van az átlagon kívül más jellemző, ami hasznos?
- ha csak az átlagot ismerjük, mennyit tudunk az adatokról?

# Halandósági paradoxon

- az élettartam matematikai vizsgálata *Halley 1693*;
- biztosításelmélet XVII. században indul jelentős fejlődésnek;
- életkor–táblázatok összeállítása;
- *d'Alembert* nevéhez kötődik:

**Életkor**

Az átlagos életkor $26$ év, mégis ugyanakkora az esélye annak, hogy valaki túléli a nyolc évet, mint annak, hogy nem.

- van az átlagon kivül más jellemző, ami hasznos?
- ha **csak** az átlagot ismerjük, mennyit **tudunk** az adatokról?

# Halandósági paradoxon



- az élettartam matematikai vizsgálata *Halley 1693*;
- biztosításelmélet XVII. században indul jelentős fejlődésnek;
- életkor–táblázatok összeállítása;
- *d'Alembert* nevéhez kötődik:

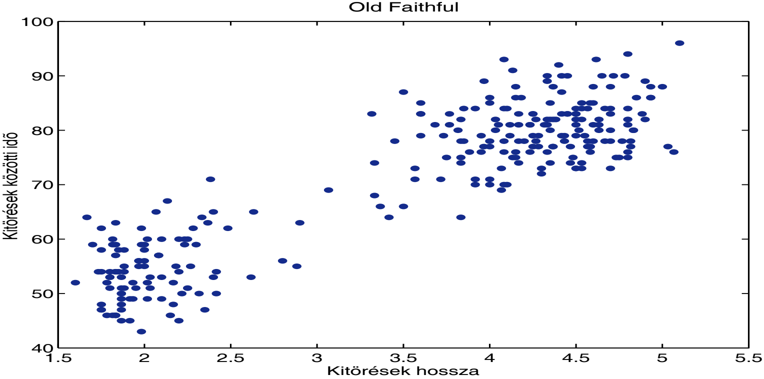
**Életkor**

Az átlagos életkor $26$ év, mégis ugyanakkora az esélye annak, hogy valaki túléli a nyolc évet, mint annak, hogy nem.

- van az átlagon kivül más jellemző, ami hasznos?
- ha **csak** az átlagot ismerjük, mennyit **tudunk** az adatokról?

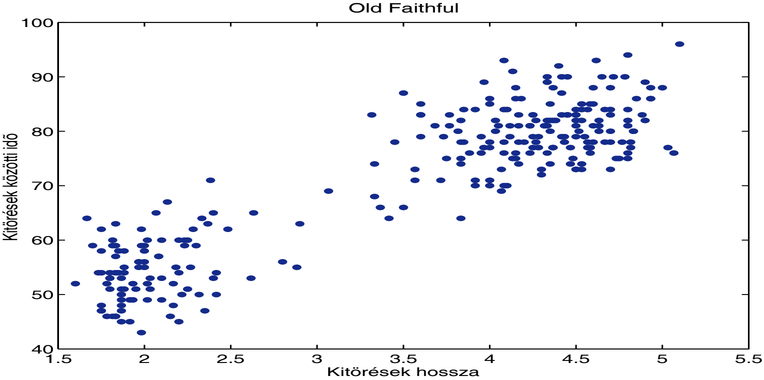
## Old Faithful gejzír

## Old Faithful gejzír



Valószínűség és paradoxonok
Csató Lehel
Bevezető
Valószínűség
Események
Valószínűségi változó
Valószínűségi modell
Várható érték
Példák eloszlásokra
Feladatok
MATLAB
Paradoxonok
Lotto
Függetlenség
Ajándékozás
Pétervár
Játékelmélet
Halandóság
Bernoulli
Első előfordulás
De Moivre

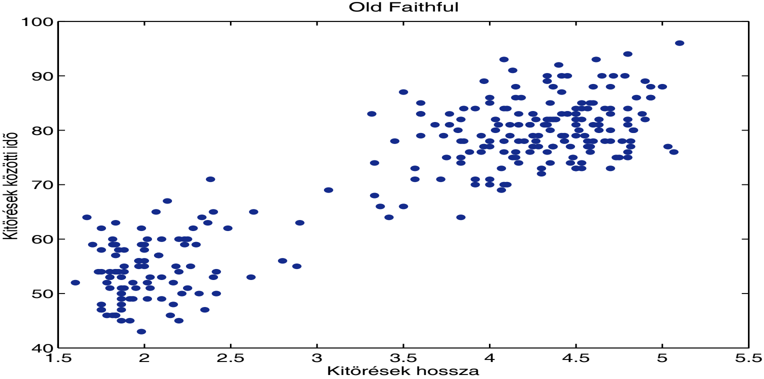
## Old Faithful gejzír




A grafikon leírására

- az átlag jó jellemző?
- más statisztika építése?

## Old Faithful gejzír




A grafikon leírására

- az átlag jó jellemző?
- más statisztika építése?

A következő modell:

$$p(x) = \pi_1 \mathcal{N}(x|m_1, \Sigma_1) + \pi_2 \mathcal{N}(x|m_2, \Sigma_2)$$

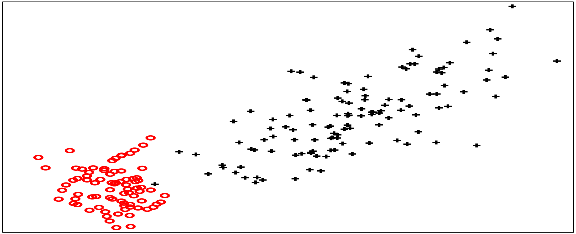
# Más statisztikai modell felállítása I



A következő modell:

$$p(x) = \pi_1 \mathcal{N}(x|m_1, \Sigma_1) + \pi_2 \mathcal{N}(x|m_2, \Sigma_2)$$

A modell **magyaráz** csoportosulást



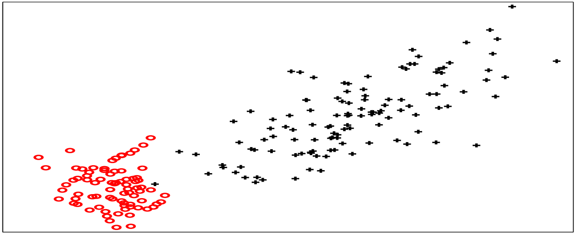
melyben

- a különböző csoportokhoz tartozó pontok arányai $\pi_1$ illetve $\pi_2$,
- a csoportok leírhatók egy-egy Gaussz-eloszlással,
- ellenben nem tudjuk, melyik csoportba is tartozik egy-egy pont.

A következő modell:

$$p(x) = \pi_1 \mathcal{N}(x|m_1, \Sigma_1) + \pi_2 \mathcal{N}(x|m_2, \Sigma_2)$$

A modell **magyaráz** csoportosulást



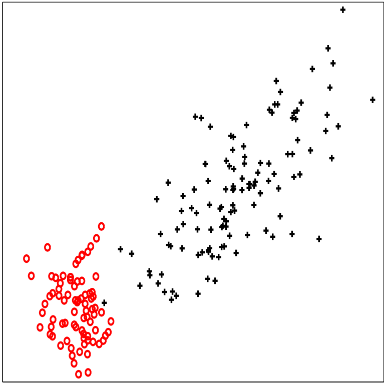
melyben

- a különböző csoportokhoz tartozó pontok arányai $\pi_1$ illetve $\pi_2$,
- a csoportok leírhatók egy-egy Gaussz-eloszlással,
- ellenben nem tudjuk, melyik csoportba is tartozik egy-egy pont.

# Más statisztika felállítása II

**Statisztikák:**

- $\pi_1, \pi_2$ a csoportok aránya;
- $m_1, m_2$ a csoportok középpontja;
- $\Sigma_1, \Sigma_2$ a csoportok szórásmátrixa;



**Nehéz feladat**

a pontok hovatartozásának a megállapítása.

**„Expectation-Maximisation”**

# Nagy számok paradoxona I



- *Bernoulli – Ars conjectandi, 1713*

- sokszori dobás esetén, az írás/fej arány egyhez tart szabályos érme esetén;
- a dobások függetlenek;

**$100$ „írás" dobása után is $50\%$ az írás valószínűsége**

Bármennyi sok „fej" dobás esetén, a következő dobás $1/2$ valószínűséggel lesz „fej".

# Nagy számok paradoxona I

- *Bernoulli – Ars conjectandi, 1713*

- sokszori dobás esetén, az írás/fej arány egyhez tart szabályos érme esetén;
- a dobások függetlenek;

**$100$ „írás” dobása után is $50\%$ az írás valószínűsége**

Bármennyi sok „fej” dobás esetén, a következő dobás $1/2$ valószínűséggel lesz „fej”.

- nem valószínű a hosszú sorozat, ellenben
- a pénzérmének nincs emlékezete, tehát nem a „múlt” alapján dönt.

# Nagy számok paradoxona I



- *Bernoulli – Ars conjectandi, 1713*

- sokszori dobás esetén, az írás/fej arány egyhez tart szabályos érme esetén;
- a dobások függetlenek;

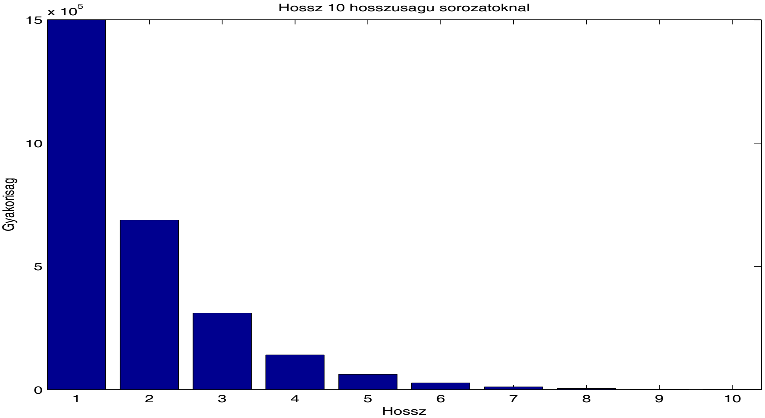
**$100$ „írás” dobása után is $50\%$ az írás valószínűsége**

Bármennyi sok „fej” dobás esetén, a következő dobás $1/2$ valószínűséggel lesz „fej”.

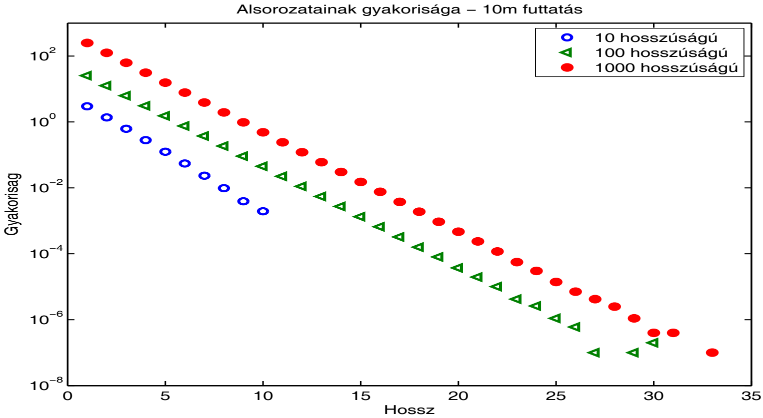
- nem (?) valószínű a hosszú sorozat, ellenben
- a pénzérmének nincs emlékezete, tehát nem a „múlt” alapján dönt.

```matlab
%% BINÁRIS SZÁMSOROZATOK HOSSZA
nRun = 500000;
nN   = [10 100 1000];
%% futási változók
nBin = floor(5+ 2.5*log2(nN(end)));
vBins = zeros(length(nN),nBin);
bins  = 1:nBin;
bb    = 1;
%% kísérletek
for iSize=nN;
 for ii=1:nRun;
  ossSor = 2*round(rand(1,iSize))-1;
  ossSor(:,iSize+1) = - ossSor(:,iSize);
  valt
= ossSor(:,2:end)-ossSor(:,1:(end-1));
  valt   = abs(valt)/2;
  indF     = find(valt==1);
  hossz    = indF - [0 indF(1:end-1)];
  [bBin,bins] = hist(hossz,bins);
  vBins(bb,:) = vBins(bb,:) + bBin;
 end;
 bb=bb+1;
end;
```

```matlab
%% kirajzolas
clf; hold on; box on;
semilogy(bins,vBins');
xlabel('Hossz');
ylabel('Hanyszor');
ylim([0 100]);
```

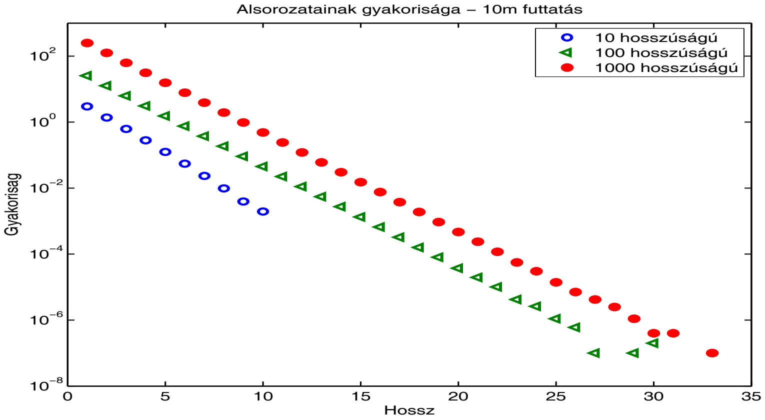



Gyakoriság és hossz közötti kapcsolat




## Gyakoriság és hossz közötti kapcsolat

Valószínűség és paradoxonok
Csató Lehel
Bevezető
Valószínűség
Események
Valószínűségi változó
Valószínűségi modell
Várható érték
Példák eloszlásokra
Feladatok
MATLAB
Paradoxonok
Lotto
Függetlenség
Ajándékozás
Pétervár
Játékelmélet
Halandóság
Bernoulli
Első előfordulás
De Moivre




## Gyakoriság és hossz közötti kapcsolat

Egy adott hossz valószínűsége: $p(h) \approx c \exp\left(-k\ h\right)$

**Megfogalmazás:**

- Szabályos pénzérmét addig dobunk, amíg $FF$ vagy $FI$ nem jön ki.
- A sorozatok ugyanolyan valószínűek.

**Megfogalmazás:**

- Szabályos pénzérmét addig dobunk, amíg $FF$ vagy $FI$ nem jön ki.
- A sorozatok ugyanolyan valószínűek.

Annak a valószínűsége, hogy az $FF$ hamarabb jön ki mint az $FI$ egyenlő $50\%$-kal, ugyanis

**ha fejet dobtunk**, akkor $50\%$ a valószínűsége annak, hogy a következő dobás fej lesz. Ez a valószínűség megegyezik az íráséval.

**Megfogalmazás:**

- Szabályos pénzérmét addig dobunk, amíg $FF$ vagy $FI$ nem jön ki.
- A sorozatok ugyanolyan valószínűek.

Annak a valószínűsége, hogy az $FF$ hamarabb jön ki mint az $FI$ egyenlő $50\%$-kal, ugyanis
**ha fejet dobtunk**, akkor $50\%$ a valószínűsége annak, hogy a következő dobás fej lesz. Ez a valószínűség megegyezik az írásével.

**Mégis**

Az **első előfordulás**ig tartó sorozat hossza nem ugyanaz.

**Megfogalmazás:**

- Szabályos pénzérmét addig dobunk, amíg $FF$ vagy $FI$ nem jön ki.
- A sorozatok ugyanolyan valószínűek.

Annak a valószínűsége, hogy az $FF$ hamarabb jön ki mint az $FI$ egyenlő $50\%$-kal, ugyanis

**ha fejet dobtunk**, akkor $50\%$ a valószínűsége annak, hogy a következő dobás fej lesz. Ez a valószínűség megegyezik az íráséval.

**Mégis**

Az **első előfordulás**ig tartó sorozat hossza nem ugyanaz.
Az $FF$-hez átlagosan $6$ dobás kell, az $FI$-hez $4$.

Hogyan?

# NEM azonos eseményeket keresünk:

**FI esetén**

$$\begin{pmatrix} +- & -+- & --+- & ---+- \\ & ++- & -++- & --++- \\ & & +++- & -+++- \\ & & & ++++- \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^4} & \frac{4}{2^5} \end{pmatrix}$$

**FF esetén**

$$\begin{pmatrix} ++ & -++ & --++ & ---++ & ----++ \\ & & +-++ & -+-++ & --+-++ \\ & & & +--++ & -+--++ \\ & & & & +---++ \\ & & & & +-+-++ \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{n-1}{2^n}$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)''_{xx} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$

# NEM azonos eseményeket keresünk:

**FI esetén**

$$\begin{pmatrix} +- & -+- & --+- & ---+- \\ & ++- & -++- & --++- \\ & & +++- & -+++- \\ & & & ++++- \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^4} & \frac{4}{2^5} \end{pmatrix}$$

**FF esetén**

$$\begin{pmatrix} ++ & -++ & --++ & ---++ & ----++ \\ & & +-++ & -+-++ & --+-++ \\ & & & +--++ & -+--++ \\ & & & & +---++ \\ & & & & +-+-++ \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Rekurrencia relációk felállítása:

$M_+$ – a fejjel kezdődő sorozatok átlaghossza

$M_-$ – az írással kezdődő sorozatok átlaghossza

$$M_- = 1 + \frac{M_- + M_+}{2}$$

$$M_+ = 1 + \frac{1 + M_-}{2}$$

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{n-1}{2^n} = 4$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)''_{xx} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$

# NEM azonos eseményeket keresünk:

**FI esetén**

$$\begin{pmatrix} +- & -+- & --+- & ---+- \\ & ++- & -++- & --++- \\ & & +++- & -+++- \\ & & & ++++- \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^4} & \frac{4}{2^5} \end{pmatrix}$$

**FF esetén**

$$\begin{pmatrix} ++ & -++ & --++ & ---++ & ----++ \\ & & +-++ & -+-++ & --+-++ \\ & & & +--++ & -+--++ \\ & & & & +---++ \\ & & & & +-+-++ \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,\frac{n-1}{2^n} = 4$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)''_{xx} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$

# NEM azonos eseményeket keresünk:

**FI esetén**

$$\begin{pmatrix} +- & -+- & --+- & ---+- \\ & ++- & -++- & --++- \\ & & +++- & -+++- \\ & & & ++++- \\ & & & \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & \\ \frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^4} & \frac{4}{2^5} \end{pmatrix}$$

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \, \frac{n-1}{2^n} = 4$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)''_{xx} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$

**FF esetén**

$$\begin{pmatrix} ++ & -++ & --++ & ---++ & ----++ \\ & & +-++ & -+-++ & --+-++ \\ & & & +--++ & -+--++ \\ & & & & +---++ \\ & & & & +-+-++ \\ & & & & \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

**Rekurrencia relációk felállítása:**

$M_+$ - a fejjel kezdődő sorozatok átlaghossza;

$M_-$ - az írással kezdődő sorozatok átlaghossza;

$$M_- = 1 + \frac{M_- + M_+}{2}$$

$$M_+ = 1 + \frac{1 + M_-}{2}$$

# NEM azonos eseményeket keresünk:

**FI esetén**

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}+-\\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix}-+-\\++-\\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix}--+-\\-++-\\+++-\\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix}---+-\\--++-\\-+++-\\++++-\end{matrix} \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^4} & \frac{4}{2^5} \end{pmatrix}$$

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \, \frac{n-1}{2^n} = 4$$

Kiszámítása:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \\ \left(\frac{1}{1-x}\right)''_{xx} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}} \end{aligned}$$

**FF esetén**

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}++\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix}-++\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix}--++\\+-++\\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix}---++\\-+-++\\+--++\\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix}----++\\--+-++\\-+--++\\+---++\\+-+-++\end{matrix} \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

**Rekurrencia relációk felállítása:**

$M_+$ - a fejjel kezdődő sorozatok átlaghossza;

$M_-$ - az írással kezdődő sorozatok átlaghossza;

$$\begin{aligned} M_- &= 1 + \frac{M_- + M_+}{2} \\ M_+ &= 1 + \frac{1 + M_-}{2} \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $M_+ = 5$ és $M_- = 7$.

# NEM azonos eseményeket keresünk:

**FI esetén**

$$\begin{pmatrix}
\begin{matrix}+-\\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix}-+-\\++-\\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix}--+-\\-++-\\+++-\\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix}---+-\\--++-\\-+++-\\++++-\end{matrix}\\
2 & 3 & 4 & 5\\
\frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^4} & \frac{4}{2^5}
\end{pmatrix}$$

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,\frac{n-1}{2^n} = 4$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)''_{xx} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$

**FF esetén**

$$\begin{pmatrix}
\begin{matrix}++\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix}-++\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix}--++\\+-++\\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix}---++\\-+-++\\+--++\\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix}----++\\--+-++\\-+--++\\+---++\\+-+-++\end{matrix}\\
2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{pmatrix}$$

**Rekurrencia relációk felállítása:**

$M_+$ - a fejjel kezdődő sorozatok átlaghossza;

$M_-$ - az írással kezdődő sorozatok átlaghossza;

$$\begin{aligned}
M_- &= 1 + \frac{M_- + M_+}{2}\\
M_+ &= 1 + \frac{1 + M_-}{2}
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $M_+ = 5$ és $M_- = 7$. Ahonnan:

$$\frac{M_+ + M_-}{2} = 6$$

# NEM azonos eseményeket keresünk:

**FI esetén**

$$\begin{pmatrix} +- & -+- & --+- & ---+- \\ & ++- & -++- & --++- \\ & & +++- & -+++- \\ & & & ++++- \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^4} & \frac{4}{2^5} \end{pmatrix}$$

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,\frac{n-1}{2^n} = 4$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)''_{xx} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$

**FF esetén**

$$\begin{pmatrix} ++ & -++ & --++ & ---++ & ----++ \\ & & +-++ & -+-++ & --+-++ \\ & & & +--++ & -+--++ \\ & & & & +---++ \\ & & & & +-+-++ \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

**Rekurrencia relációk felállítása:**

$M_+$ - a fejjel kezdődő sorozatok átlaghossza;

$M_-$ - az írással kezdődő sorozatok átlaghossza;

$$\begin{aligned} M_- &= 1 + \frac{M_- + M_+}{2} \\ M_+ &= 1 + \frac{1 + M_-}{2} \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $M_+ = 5$ és $M_- = 7$. Ahonnan:

$$\frac{M_+ + M_-}{2} = 6$$

# NEM azonos eseményeket keresünk:

**FI esetén**

$$\left(\begin{array}{cccc} +- & -+- & --+- & ---+- \\ & ++- & -++- & --++- \\ & & +++- & -+++- \\ & & & ++++- \\ & & & \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & \\ \frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^4} & \frac{4}{2^5} \end{array}\right)$$

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \, \frac{n-1}{2^n} = 4$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)''_{xx} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$

**FF esetén**

$$\left(\begin{array}{ccccc} ++ & -++ & --++ & ---++ & ----++ \\ & & +-++ & -+-++ & --+-++ \\ & & & +--++ & -+--++ \\ & & & & +---++ \\ & & & & +-+-++ \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

**Rekurrencia relációk felállítása:**

$M_+$ - a fejjel kezdődő sorozatok átlaghossza;

$M_-$ - az írással kezdődő sorozatok átlaghossza;

$$\begin{aligned} M_- &= 1 + \frac{M_- + M_+}{2} \\ M_+ &= 1 + \frac{1 + M_-}{2} \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $M_+ = 5$ és $M_- = 7$. Ahonnan:

$$\frac{M_+ + M_-}{2} = 6$$

**Megfogalmazás:**
Szabályos pénzérmét átlagosan legalább $8$-szor dobunk ahhoz, hogy az $+,-$ sorozat valamely háromtagú permutációját kapjuk.

**Az egyéni valószínűségek nem egyformák**

Az $++-$, $-++$, $--+$, $+--$ kombinációk a legkedvezőbbek.

**Megfogalmazás:**
Szabályos pénzérmét átlagosan legalább $8$-szor dobunk ahhoz, hogy az $+,-$ sorozat valamely háromtagú permutációját kapjuk.

**Az egyéni valószínűségek nem egyformák**

Az $++-$, $-++$, $--+$, $+--$ kombinációk a legkedvezőbbek.

**Példa:** vizsgáljuk meg, hogy az $++-$ és az $-++$ sorozatok közül melyik előfordulása valószínűbb korábban.

**Megfogalmazás:**
Szabályos pénzérmét átlagosan legalább $8$-szor dobunk ahhoz, hogy az $+,-$ sorozat valamely háromtagú permutációját kapjuk.

**Az egyéni valószínűségek nem egyformák**

Az $++-$, $-++$, $--+$, $+--$ kombinációk a legkedvezőbbek.

**Példa:** vizsgáljuk meg, hogy az $++-$ és az $-++$ sorozatok közül melyik előfordulása valószínűbb korábban. Mi az eseménytér?

**Megfogalmazás:**
Szabályos pénzérmét átlagosan legalább $8$-szor dobunk ahhoz, hogy az $+,-$ sorozat valamely háromtagú permutációját kapjuk.

**Az egyéni valószínűségek nem egyformák**

Az $++-,\ -++,\ --+,\ +--$ kombinációk a legkedvezőbbek.

**Példa:** vizsgáljuk meg, hogy az $++-$ és az $-++$ sorozatok közül melyik előfordulása valószínűbb korábban. Mi az eseménytér?

$$\begin{pmatrix} ++- & +++- & ++++- & +++++- & \dots \\ \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \frac{1}{2^6} & \dots \end{pmatrix}$$

Az összes többi esetben a $-++$ fordul elő előbb (egy $-$ mindig van; a $++-$-t pedig mindenképp megelőzi egy $-++$).

**Megfogalmazás:**
Szabályos pénzérmét átlagosan legalább $8$-szor dobunk ahhoz, hogy az $+,-$ sorozat valamely háromtagú permutációját kapjuk.

**Az egyéni valószínűségek nem egyformák**

Az $++-, -++, --+, +--$ kombinációk a legkedvezőbbek.

**Példa:** vizsgáljuk meg, hogy az $++-$ és az $-++$ sorozatok közül melyik előfordulása valószínűbb korábban. Mi az eseménytér?

$$\begin{pmatrix} ++- & +++- & ++++- & +++++- & \dots \\ \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \frac{1}{2^6} & \dots \end{pmatrix}$$

Az összes többi esetben a $-++$ fordul elő előbb (egy $-$ mindig van; a $++-$-t pedig mindenképp megelőzi egy $-++$).

**Megfogalmazás:**
Szabályos pénzérmét átlagosan legalább $8$-szor dobunk ahhoz, hogy az $+,-$ sorozat valamely háromtagú permutációját kapjuk.

**Az egyéni valószínűségek nem egyformák**

Az $++-$, $-++$, $--+$, $+--$ kombinációk a legkedvezőbbek.

**Példa:** vizsgáljuk meg, hogy az $++-$ és az $-++$ sorozatok közül melyik előfordulása valószínűbb korábban. Mi az eseménytér?

$$\begin{pmatrix} ++- & +++- & ++++- & +++++- & \dots \\ \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \frac{1}{2^6} & \dots \end{pmatrix}$$

Az összes többi esetben a $-++$ fordul elő előbb (egy $-$ mindig van; a $++-$-t pedig mindenképp megelőzi egy $-++$).

**Megfogalmazás:**
Szabályos pénzérmét átlagosan legalább $8$-szor dobunk ahhoz, hogy az $+,-$ sorozat valamely háromtagú permutációját kapjuk.

### Az egyéni valószínűségek nem egyformák

Az $++-$, $-++$, $--+$, $+--$ kombinációk a legkedvezőbbek.

**Példa:** vizsgáljuk meg, hogy az $++-$ és az $-++$ sorozatok közül melyik előfordulása valószínűbb korábban. Mi az eseménytér?

$$\begin{pmatrix} ++- & +++- & ++++- & +++++- & \cdots \\ \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \frac{1}{2^6} & \cdots \end{pmatrix}$$

Az összes többi esetben a $-++$ fordul elő előbb (egy $-$ mindig van; a $++-$-t pedig mindenképp megelőzi egy $-++$).
A valószínűség:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{8}\, 2 = \frac{1}{4}$$

# Normális eloszlás I



- **De Moivre** *1718: The doctrine of chances.*

**Nagy számok ellentmondása**

- a fej/írás arány konvergál $1$-hez – a közelítő egyenlőség;
- a „fej”=”írás” esemény valószínűsége konvergál nullához – a pontos egyenlőség.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\frac{n_{Fej}}{n_{Iras}} - 1\right\| < \epsilon\right) = 1$$

illetve

$$\lim_{n\to\infty} P\left(n_{Fej} = n_{Iras}\right) = 0$$

- **De Moivre** *1718: The doctrine of chances.*

### Nagy számok ellentmondása

- a fej/írás arány konvergál $1$-hez – a közelítő egyenlőség;
- a „fej”=”írás” esemény valószínűsége konvergál nullához – a pontos egyenlőség.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\|\frac{n_{Fej}}{n_{Iras}} - 1\| < \epsilon\right) = 1$$

illetve

$$\lim_{n\to\infty} P\left(n_{Fej} = n_{Iras}\right) = 0$$

# Normális eloszlás II

**De Moivre** (1738): „Merem állítani, hogy ez a legnehezebb probléma, amit fel lehet vetni a Véletlen Tudományában...”

Legyen az érme: $x_n \in \{-1, 1\}$ úgy, hogy

$$p(x_n = 1) = p(x_n = -1) = 0.5.$$

Ekkor a dobás-sorozatok átlaga $0$ és szórása:

$$\sigma_B = E\left[(x_n - \bar{x}_n)^2\right] = 1$$

Ha $6$ dobás esetét vizsgáljuk, a lehetséges (fej,érme) párok, illetve összeg:

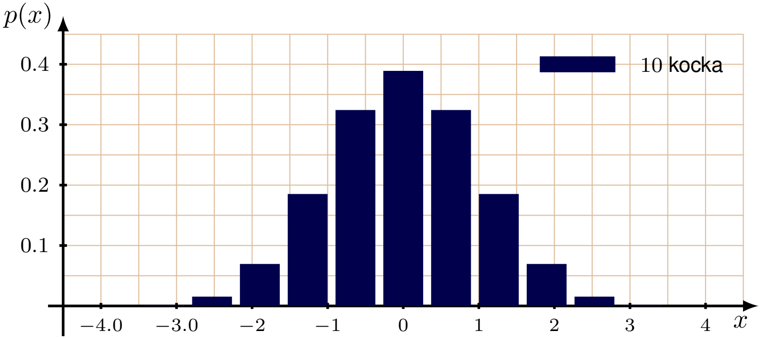
$$\begin{bmatrix} (6,0) & (5,1) & \dots & (0,6) \\ -6 & -4 & \dots & 6 \end{bmatrix}$$

# Normális eloszlás III



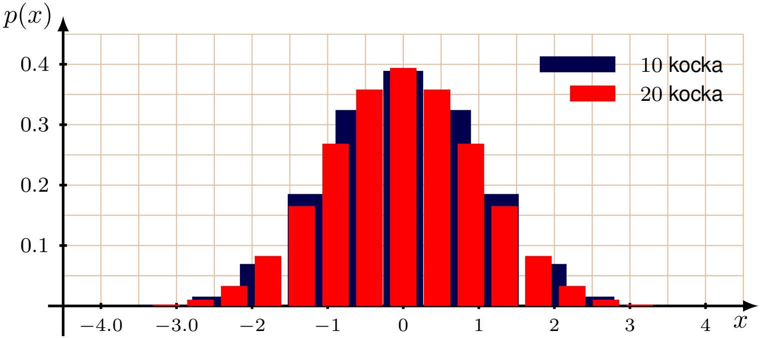
A dobások összege és azok valószínűsége:

$$\begin{bmatrix} -10 & -8 & -6 & \cdots & 10 \\ \frac{\binom{10}{0}}{2^{10}} & \frac{\binom{10}{1}}{2^{10}} & \frac{\binom{10}{2}}{2^{10}} & \cdots & \frac{\binom{10}{10}}{2^{10}} \end{bmatrix}$$



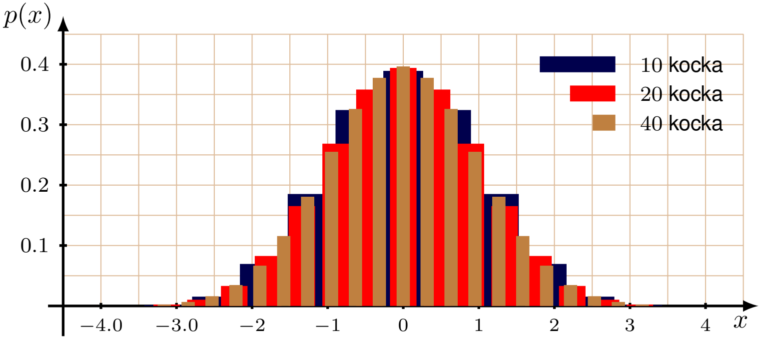
A dobások összege és azok valószínűsége:

$$\begin{bmatrix} -10 & -8 & -6 & \dots & 10 \\ \frac{\binom{10}{0}}{2^{10}} & \frac{\binom{10}{1}}{2^{10}} & \frac{\binom{10}{2}}{2^{10}} & \dots & \frac{\binom{10}{10}}{2^{10}} \end{bmatrix}$$



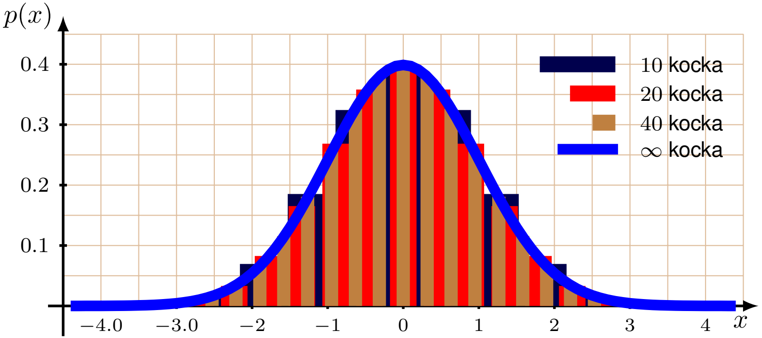
A dobások összege és azok valószínűsége:

$$\begin{bmatrix} -10 & -8 & -6 & \dots & 10 \\ \frac{\binom{10}{0}}{2^{10}} & \frac{\binom{10}{1}}{2^{10}} & \frac{\binom{10}{2}}{2^{10}} & \dots & \frac{\binom{10}{10}}{2^{10}} \end{bmatrix}$$



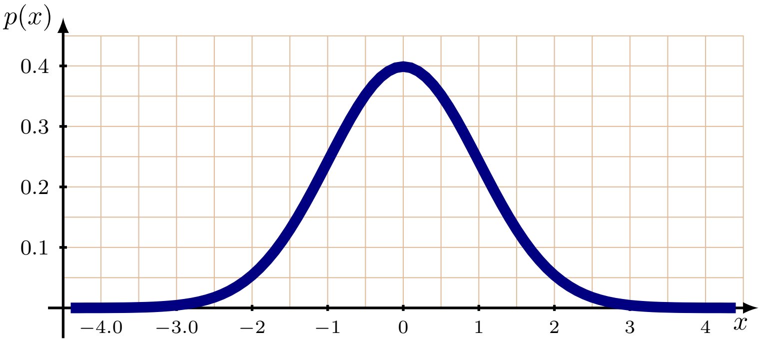
A dobások összege és azok valószínűsége:

$$\begin{bmatrix} -10 & -8 & -6 & \dots & 10 \\ \frac{\binom{10}{0}}{2^{10}} & \frac{\binom{10}{1}}{2^{10}} & \frac{\binom{10}{2}}{2^{10}} & \dots & \frac{\binom{10}{10}}{2^{10}} \end{bmatrix}$$



Az eloszlás képlete:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$



# Normális eloszlás

## Matlab

```
function [x,y] = moivre(N,style)
%% valasztunk parametereket
if nargin==0;
  N = 6;
elseif nargin==1;
  style='k';
end;
%% X- es Y- tengely
x = 0:N;
y = zeros(size(x));
for ii=x;
  y(ii+1) = nchoosek(N,ii);
end;
y = y ./ (2^N);
x = 2*x - N;
%% normalissa valtoztatni
x = x/sqrt(N);
y = y/2*sqrt(N);
```

```
%% kirajzolni
box on; hold on;
bar(x,y,style);
xlim([-4.5,4.5]);
%% tul kicsi ertekek
ii = find(y>0.001);
x  = x(ii);
y  = y(ii);

% a függvény hívása
[x,y]=moivre(40,'k');
h = fopen('moivre_40.dat','wt');
fprintf(h,'%5.4f %5.4f/n',[x' y']');
fclose(h);
```

# Irodalom



- Székely J. Gábor
  *Paradoxonok a véletlen matematikájában.*
  Typotex, 2004.
- Fegyverneki Sándor
  *Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika*
  Miskolci Egyetem, Alkalmazott Matematikai Tanszék, 2007.
- Frederick Mosteller
  *Fifty Challenging problems in Probability with Solutions*
  Dover Publications, 1965.
- Csatár Katalin,Harró Ágota, Hegyi Györgyné, Lövey Éva, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Ratkó Éva
  *Valószínűségszámítás feladatok kezdőknek*
  Középiskolai Matematikai Lapok, 2004.