



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Valószínűségszámítás és valószínűségi paradoxonok

Csató Lehel

Matematika és Informatika Tanszék,
Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár
<http://www.cs.ubbcluj.ro/~csatol>

2009 szeptember 2

*Klasszikus az, amit mindenki szeretett volna már
elolvasni, de amit olvasni senki sem szeretne.*



Az előadás céljai

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

- Alapfogalmak bemutatása;
- Alapfogalmak tisztázása;
- Érdekes feladatok felsorolása;
- Matlab illusztrációk (ahol szükséges);



Tartalom

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

1 Bevezető

2 Valószínűségi alapfogalmak

3 Paradoxonok



Tartalom

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

1 **Bevezető**

2 Valószínűségi alapfogalmak

3 Paradoxonok



Definíciók

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Paradoxon

Olyan meglepő állítás, mely a „**józan észnek**”
ellentmondani látszik.

Paradoxonok szerepe:

- Megvilágítanak egy problémát, melyre megoldást kell javasolni.

(tudománytörténet)

- Bemutatják „józan” (lásd fentebb) példákon keresztül a *formális gondolkodás* hasznát.

(oktatás)



Kérdések, melyekre keres~~het~~jük a választ

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

- Van nyerő kombináció a lottón?
- Jó, ha kölcsönös ajándékozásnál sorsoljuk az ajándékozó személyt?
- Ha ismételten játszunk egy játékot, hogyan kell azt „optimálisan játszani”?
- Helyes az a táblázat, melyben az átlagos életkor 26 év; ugyanakkor 50% a valószínűsége annak, hogy valaki a 8. évet *ne* érje meg?
- Véletlen a számsorozat, amit látunk?
- Mit jelent a val. változók függetlensége?
- Mekkora valószínűséggel lesz egy húr adott hossznál nagyobb?



A valószínűség nem garancia!

Dr. Tel

Betegvizsgálat után, hosszas fejrázás közben:

- Önnek nagyon súlyos betegsége van; tíz közül csak egy beteg éli túl.



A valószínűség nem garancia!

Dr. Tel

Betegvizsgálat után, hosszas fejrázás közben:

- Önnek nagyon súlyos betegsége van; tíz közül csak egy beteg éli túl.

majd nyugtatólag:

- De nagy szerencséje van, hogy hozzám fordult!
Eddig kilenc hasonló betegem volt és eddig **mindenki**
belehalt ...



A valószínűség nem garancia!

Dr. Tel

Betegvizsgálat után, hosszas fejrázás közben:

- Önnek nagyon súlyos betegsége van; tíz közül csak egy beteg éli túl.

majd nyugtatólag:

- De nagy szerencséje van, hogy hozzám fordult!
Eddig kilenc hasonló betegem volt és eddig mindenki belehalt ...

Nem biztos, hogy helyesen értelmezett a valószínűség!



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Váltsunk vagy ne?

Televízióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Váltsunk vagy ne?

Televízióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Váltsunk vagy ne?

Televízióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Váltsunk vagy ne?

Televízióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Váltsunk vagy ne?

Televízióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos **váltson vagy ne**.

Vélemények:

- úgysem tudja, hogy jó-e. Ne váltson!
- rosszabb nem lehet, tehát váltson!
- **meg tudjuk vizsgálni?**



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Váltsunk vagy ne?

Televízióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos **váltson vagy ne**.

Vélemények:

- úgysem tudja, hogy jó-e. Ne váltson!
- rosszabb nem lehet, tehát váltson!
- **meg tudjuk vizsgálni?**



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Váltsunk vagy ne?

Televízióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos **váltson vagy ne**.

Vélemények:

- úgysem tudja, hogy jó-e. Ne váltson!
- rosszabb nem lehet, tehát váltson!
- **meg tudjuk vizsgálni?**



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Váltsunk vagy ne?

Televízióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos **váltson vagy ne**.

Vélemények:

- úgysem tudja, hogy jó-e. Ne váltson!
- rosszabb nem lehet, tehát váltson!
- **meg tudjuk vizsgálni?**



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Váltunk vagy ne?

Televízióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos **váltson vagy ne**.

- Fontos a cselekvés sorrendje;
- A műsorvezető mindig tud választani;
- Az ajtó kinyitásával eggyel kevesebb lehetőség marad;
- Ha váltunk, az esélyünk $1/2$, ha nem, akkor marad az $1/3$.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Váltunk vagy ne?

Televízióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos **váltson vagy ne**.

- Fontos a cselekvés sorrendje;
- A műsorvezető mindig tud választani;
- Az ajtó kinyitásával eggyel kevesebb lehetőség marad;
- Ha váltunk, az esélyünk $1/2$, ha nem, akkor marad az $1/3$.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Váltunk vagy ne?

Televízióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos **váltson vagy ne**.

- Fontos a cselekvés sorrendje;
- A műsorvezető mindig tud választani;
- Az ajtó kinyitásával eggyel kevesebb lehetőség marad;
- Ha váltunk, az esélyünk $1/2$, ha nem, akkor marad az $1/3$.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Váltunk vagy ne?

Televízióban „játszik” a műsorvezető a „pácienssel”. Három ajtó van, az egyik mögött a nyeremény, a másik kettő mögött nincs semmi. Miután

- a játékos választott egy ajtót,
- a műsorvezető kinyit egy másikat, ahol nincs nyeremény,
- majd felajánlja a váltás lehetőségét.

Kérdés, hogy a játékos **váltson vagy ne**.

- Fontos a cselekvés sorrendje;
- A műsorvezető mindig tud választani;
- Az ajtó kinyitásával eggyel kevesebb lehetőség marad;
- **Ha váltunk, az esélyünk $1/2$, ha nem, akkor marad az $1/3$.**



Tartalom

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

1 Bevezető

2 Valószínűségi alapfogalmak

- Eseménytér, események
- Valószínűségi változó
- Várható érték
- Példák eloszlásokra
- Feladatok
- MATLAB

3 Paradoxonok



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Eseménytér Ω

Egy véletlen kísérlet lehetséges eseményeinek összessége.

Pl:

- érme dobásánál $\Omega = \{F, I\}$,
- kocka dobásánál az $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
- egy négyzetre leejtett tű hegyének a koordinátái esetén: $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Események \mathcal{F}

Az Ω eseménytér σ -algebráját eseményeknek nevezzük.
 σ -algebra:

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- ha $A \in \mathcal{F}$, akkor $\bar{A} \in \mathcal{F}$,
- ha $A, B \in \mathcal{F}$, akkor $A \cup B \in \mathcal{F}$,
- ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, akkor $A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{F}$,

Megj: a fenti tulajdonságok a konzisztenciát biztosítják.

- **biztos esemény:** az Ω összes lehetséges eseményt tartalmazó halmaz.
- **lehetetlen esemény:** az \emptyset üres halmaz.



Valószínűség P

A $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív függvény valószínűségi eloszlás, ha

- $P(\Omega) = 1$;
- ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- ha A_1, A_2, \dots egymást kölcsönösen kizáró események, akkor

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

Valószínűségi mező (Ω, \mathcal{F}, P)

Az (Ω, \mathcal{F}, P) hármast valószínűségi mezőnek nevezünk.



Valószínűségi változó

ξ

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Valószínűségi változó ξ

A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó, ha

$$\{\xi < x\} = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Eloszlásfüggvény F

Az

$$F(x) = P(\xi < x)$$

függvényt a ξ változó eloszlásfüggvényének nevezzük.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Várható érték $E[\xi]$

Ha a ξ valószínűségi változó értékeinek száma véges:
 $\{x_1, \dots, x_d\}$, és $p_i = P(\xi = x_i) \forall i$, akkor

$$E[\xi] = \sum_i x_i p_i.$$

Szórás $D(\xi)$

A

$$D(\xi) = \left((\xi - E[\xi])^2 \right)^{1/2}$$

mennyiség a ξ valószínűségi változó szórása.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Várható érték

Határozzuk meg az

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ \frac{x}{4} & \text{ha } 0 \leq x < 4 \\ 1 & \text{ha } x \geq 4 \end{cases}$$

valószínűségi változó várható értékét.

Megoldás:

Az eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{ha } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{másképp} \end{cases}$$

Az átlag tehát:

$$E[x] = \int_0^4 \frac{x}{4} dx = \frac{x^2}{8} \Big|_0^4 = 2$$



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Binomiális eloszlás $\xi \sim B(n, p)$

Legyen $A \in \mathcal{F}$. Végezzünk egy n hosszúságú Bernoulli kísérletsorozatot és legyen ξ az A esemény bekövetkeztének a száma.

Ha $p(A) = p$ és $q = 1 - p$, akkor

$$p(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Az eloszlás átlaga:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \sum_{k=0}^n k P(\xi = k) = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= np \end{aligned}$$

A szórás:

$$D(\xi) = \sqrt{npq}$$



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Poisson eloszlás $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$

A

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

eloszlással adott változót Poisson eloszlásnak nevezünk ($\lambda > 0$).

Az eloszlás átlaga:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \sum_{k=0}^{\infty} k P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

A szórás:

$$D(\xi) = E[\xi^2] - E^2[\xi] = \lambda$$



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Egyenletes eloszlás $\xi \sim U(a, b)$

A

$$P(\xi = k) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a < x < b \\ 0 & \text{másképp} \end{cases} \quad (1)$$

eloszlással adott változót egyenletes eloszlásnak nevezünk.

Az eloszlás átlaga:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

A szórása:

$$D(\xi) = E[\xi^2] - E^2[\xi] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Megj: az egyenletes eloszlás a véletlenszám-generátorok alapja.



Valószínűség és paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Normális eloszlás $\xi \sim N(m, \sigma)$

Legyen $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$. A ξ normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Az eloszlás átlaga:

$$E[\xi] = m \quad D(\xi) = \sigma$$

Az eloszlás centrális szerepet játszik a modern valószínűségben.

De Moivre (1738): „Merem állítani, hogy ez a legnehezebb probléma, amit fel lehet vetni a Véletlen Tudományában...

(Sz.04)”



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Kockázás

Két kocka esetén a 9 és a 10 is **ugyanannyiszor** írható fel.

$$9 = 6 + 3 = 4 + 5 \text{ illetve } 10 = 6 + 4 = 5 + 5$$

Miért van az, hogy a 9 valószínűsége mégis nagyobb, mint a tízé.

Fontos az eseménytér meghatározása!

Tévedtek:

- Leibnitz
- d'Alembert



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Osztokodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer 6 játszmát. A játék félbemarad, amikor az első 5, a második 3 játszmát nyert.

Mennyi a méltányos osztokodás aránya?

Modell



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függelenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Osztokodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer 6 játszmát. A játék félbemarad, amikor az első 5, a második 3 játszmát nyert.

Mennyi a méltányos osztokodás aránya?

Modell

- Arab eredetű, már 1380-ban megjelent Itáliában.
- Először 1497-ben jelent meg, a valószínűségi jelleget nem is ismerte fel;
- A helyes megoldás nagyon soká született meg.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Osztokodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer 6 játszmát. A játék félbemarad, amikor az első 5, a második 3 játszmát nyert.

Mennyi a méltányos osztokodás aránya?

Modell

- Mit vizsgálunk?
- 5 : 3 állásnál legtöbb 3 játszma lesz;
- 7 kedvező az első; 1 a második játékos számára;
- A méltányos arány tehát a $7/1$!



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Osztokodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer 6 játszmát. A játék félbemarad, amikor az első 5, a második 3 játszmát nyert.

Mennyi a méltányos osztokodás aránya?

Modell

- Mit vizsgálunk?
- 5 : 3 állásnál legtöbb 3 játszma lesz;
- 7 kedvező az első; 1 a második játékos számára;
- A méltányos arány tehát a $7/1$!



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Osztokodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer 6 játszmát. A játék félbemarad, amikor az első 5, a második 3 játszmát nyert.

Mennyi a méltányos osztokodás aránya?

Modell

- Mit vizsgálunk? A további lehetséges eseteket.
- 5 : 3 állásnál legtöbb 3 játszma lesz;
- 7 kedvező az első; 1 a második játékos számára;
- A méltányos arány tehát a $7/1$!



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Osztokodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer 6 játszmát. A játék félbemarad, amikor az első 5, a második 3 játszmát nyert.

Mennyi a méltányos osztokodás aránya?

Modell

- Mit vizsgálunk? A további lehetséges eseteket.
- 5 : 3 állásnál legtöbb 3 játszma lesz;
- 7 kedvező az első; 1 a második játékos számára;
- A méltányos arány tehát a $7/1$!



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Osztokodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer 6 játszmát. A játék félbemarad, amikor az első 5, a második 3 játszmát nyert.

Mennyi a méltányos osztokodás aránya?

Modell

- Mit vizsgálunk? A további lehetséges eseteket.
- 5 : 3 állásnál legtöbb 3 játszma lesz;
- 7 kedvező az első; 1 a második játékos számára;
- A méltányos arány tehát a $7/1$!



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Osztokodás

Két játékos játszik – ugyanolyan eséllyel. Az nyer, aki először nyer 6 játszmát. A játék félbemarad, amikor az első 5, a második 3 játszmát nyert.

Mennyi a méltányos osztokodás aránya?

Modell

- Mit vizsgálunk? A további lehetséges eseteket.
- 5 : 3 állásnál legtöbb 3 játszma lesz;
- 7 kedvező az első; 1 a második játékos számára;
- **A méltányos arány tehát a 7/1 !**

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Hatosok keresése $P(A_{\text{hatos}})$ Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy kocka kétszeri dobásánál *legalább* egy hatos van.**Megoldás:**Az elemi események az összes *rendezett páros*:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} (1, 1) & (1, 2) & \dots & (2, 1) & (2, 2) & \dots & \dots & (6, 6) \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \dots & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \dots & \dots & \frac{1}{36} \end{array} \right)$$

Ezek közül kedvező: $(1, 6), \dots, (5, 6)$, valamint az összes eset, ahol az első szám a hatos.

Azaz:

$$P(A_{\text{hatos}}) = 11 \cdot \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Adott összeg $P(A_{\text{össz9}})$, $P(B_{\text{össz10}})$

Mekkora a valószínűsége annak, hogy két kocka dobásakor a számok összege 9?

A számok összege 10?



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Adott összeg $P(A_{össz9})$, $P(B_{össz10})$

Mekkora a valószínűsége annak, hogy két kocka dobásakor a számok összege 9?

A számok összege 10?

Megoldás:

$$9 = 6 + 3 = 5 + 4 = 4 + 5 = 3 + 6 \Rightarrow P(A_{össz9}) = 4/36$$

$$10 = 6 + 4 = 5 + 5 = 4 + 6 \Rightarrow P(A_{össz10}) = 3/36$$



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Adott összeg $P(A_{össz9})$, $P(B_{össz10})$

Mekkora a valószínűsége annak, hogy két kocka dobásakor a számok összege 9?

A számok összege 10?

Megoldás:

$$9 = 6 + 3 = 5 + 4 = 4 + 5 = 3 + 6 \Rightarrow P(A_{össz9}) = 4/36$$

$$10 = 6 + 4 = 5 + 5 = 4 + 6 \Rightarrow P(A_{össz10}) = 3/36$$

Adott összeg $P(A_{össz9})$, $P(B_{össz10})$

Mekkora a valószínűsége annak, hogy **három** kocka dobásakor a számok összege 9?

És a számok összege 10?



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajánlkozózás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Adott összeg $P(A_{\text{össz9}})$, $P(B_{\text{össz10}})$

Mekkora a valószínűsége annak, hogy két kocka dobásakor a számok összege 9?

A számok összege 10?

Megoldás:

$$9 = 6 + 3 = 5 + 4 = 4 + 5 = 3 + 6 \Rightarrow P(A_{\text{össz9}}) = 4/36$$

$$10 = 6 + 4 = 5 + 5 = 4 + 6 \Rightarrow P(A_{\text{össz10}}) = 3/36$$

Adott összeg $P(A_{\text{össz9}})$, $P(B_{\text{össz10}})$

Mekkora a valószínűsége annak, hogy **három** kocka dobásakor a számok összege 9?

És a számok összege 10?

Megoldás:

$$9 = 6 + 2 + 1 = 6 + 1 + 2 = 5 + 3 + 1 = \dots \Rightarrow P(A_{\text{össz9}}) = 25/216$$

$$10 = 6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2 = 6 + 1 + 3 = \dots \Rightarrow P(A_{\text{össz9}}) = 27/216$$



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Valószínűségek becslése

Ádám és Éva azonos képességű játékosok. Mekkora a valószínűsége, hogy:

- Ádám négy meccsből **pontosan** hármat nyer?
- Éva nyolc meccsből **pontosan** ötöt nyer?



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Valószínűségek becslése

Ádám és Éva azonos képességű játékosok. Mekkora a valószínűsége, hogy:

- Ádám négy meccsből **pontosan** hármat nyer?
- Éva nyolc meccsből **pontosan** ötöt nyer?

Megoldás:

Ádám nyer (1) vagy veszít (0). Négy meccs $2^4 = 16$ módon végződhet.

Ebből 4 kedvező Ádámnak: $1/4$.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Valószínűségek becslése

Ádám és Éva azonos képességű játékosok. Mekkora a valószínűsége, hogy:

- Ádám négy meccsből **pontosan** hármat nyer?
- Éva nyolc meccsből **pontosan** ötöt nyer?

Megoldás:

Ádám nyer (1) vagy veszít (0). Négy meccs $2^4 = 16$ módon végződhet.

Ebből 4 kedvező Ádámnak: $1/4$.

Éva nyer (1) vagy veszít (0). Nyolc meccs 2^8 módon végződhet.

Ebből $V(8, 5) = 8 \cdot 7 \cdot 6 / (1 \cdot 2 \cdot 3)$ kedvező Évának: $7/32$



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Valószínűségek becslése

Balázs és Marci **négy** dobókocka feldobásával döntenek el, ki sétáltatja a kutyát. Az egyszerre dobott kockák között ha van hatos, akkor Balázs, különben Marci sétáltatja a kutyát. Igazságos a módszer?



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Valószínűségek becslése

Balázs és Marci **négy** dobókocka feldobásával döntenek el, ki sétáltatja a kutyát. Az egyszerre dobott kockák között ha van hatos, akkor Balázs, különben Marci sétáltatja a kutyát. Igazságos a módszer?

Megoldás:

Négy kockában **nincs** hatos:

$$\frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} = 0.4822$$



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Valószínűségek becslése

Balázs és Marci **négy** dobókocka feldobásával döntenek el, ki sétáltatja a kutyát. Az egyszerre dobott kockák között ha van hatos, akkor Balázs, különben Marci sétáltatja a kutyát. Igazságos a módszer?

Megoldás:

Négy kockában **nincs** hatos:

$$\frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} = 0.4822$$

Tehát a módszer nem igazságos!



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Urnafeladat

n golyót helyezünk véletlenszerűen n urnába.

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 1 marad üresen?



Urnafeladat

n golyót helyezünk véletlenszerűen n urnába.

Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 1 marad üresen?

Megoldás:

Minden urnába egy golyó: $p(A_{mind}) = \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{1}{n} = \frac{n!}{n^n}$

Kijelölünk egy **üres** urnát illetve egyet, melyben **két** golyó lesz: $n(n-1)$

Kiválasztunk két golyót az n közül $\binom{n}{2}$.

A maradék $n-2$ -t elhelyezzük az $n-2$ urnába: $(n-2)!$.

$$p(A_{mind-1}) = \frac{n(n-1) \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot (n-2)!}{n^n} = \frac{(n-1)! \cdot (n-1)}{2 \cdot n^{n-2}}$$



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Első előfordulás

Három játékos társasjátékot kezd. Egymás után dobnak egyet egy dobókockával. Az kezd, aki elsőként dob hatost.

- Mekkora valószínűséggel lesznek kezdők egy-egy dobás után az egyes résztvevők?
- Mekkora annak a valószínűsége, hogy nem tudják elkezdeni a játékot egy kör után?
- Számítsuk ki egyes résztvevőkre annak a valószínűségét, hogy éppen ő kezdhet!

Megoldás:

Az első kezd: $P(\text{első}) = 1/6$,

a második kezd $P(\text{masod}) = 5/6 \cdot 1/6 = 5/36$,

a harmadik kezd $P(\text{harmad}) = 5/6 \cdot 5/6 \cdot 1/6 = 25/216$.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megoldás: (folyt)

Egy kör után **nem kezdenek**:

$$P(\text{nemelso}) = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = 0.5787$$

Az **első játékos** kezdési valószínűsége:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 & \frac{1}{6} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^2 & \dots \end{pmatrix}$$

A teljes valószínűség:

$$\frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{5}{6} \right)^3 \right)^k = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5^3}{6^3}} = \frac{36}{91}$$

A második $\frac{30}{91}$, a harmadik $\frac{25}{91}$ valószínűséggel kezd.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Sakktábla

Helyezzünk el a sakktáblán taláalomra bástyákat ($2 \leq k \leq 8$).
Mekkora a valószínűsége annak, hogy a bástyák **nem** ütik egymást.

Könyvek

Egy könyvespolcra Pisti leszedte a könyveket, majd véletlenszerűen visszarakta mind a 25-öt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a köztük levő három idegen nyelvű könyv egymás mellé került?

Érmék

Öt pénzérme feldobásakor mennyi a valószínűsége, hogy pontosan három érmén a fej lesz felül?



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Négyesek és ötösök a lottón

Az ötös lottón 90 számból választanak 5-öt a szelvények kitöltői.
Hányszor nagyobb a valószínűsége egy négytalálatos szelvénynek, mint az öttalálatosnak?

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Négyesek és ötösök a lottón

Az ötös lottón 90 számból választanak 5-öt a szelvények kitöltői. Hányszor nagyobb a valószínűsége egy négytalálatos szelvénynek, mint az öttalálatosnak?

Megoldás:

Ötösünk van, ha a 90 szám közül pont azt az ötöt húzzák:

$$P(\text{otos}) = \frac{1}{\binom{90}{5}} = 0.00000022753 = 2.27 \cdot 10^{-8}$$

Négyesünk van, ha **egy szám hiányzik**, ez pedig a maradék 85 szám valamelyike:

$$P(\text{negyes}) = \frac{\binom{5}{1} \binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} = 0.00000967 = 0.96 \cdot 10^{-5}$$

A kettő aránya **425**.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Ropik

Három egyenlő hosszú ropiból véletlenszerűen kitörünk egy-egy darabot. A törési pontok kiválasztása egymástól független és egyenletes.

- mekkora a valószínűsége annak, hogy a maradékokból háromszöglet lehet alkotni?
- mekkora a valószínűsége annak, hogy a maradékokból **hegyesszögű** háromszöglet lehet alkotni?



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Ropik

Három egyenlő hosszú ropiból véletlenszerűen kitörünk egy-egy darabot. A törési pontok kiválasztása egymástól független és egyenletes.

- mekkora a valószínűsége annak, hogy a maradékokból háromszöglet lehet alkotni?
- mekkora a valószínűsége annak, hogy a maradékokból **hegyesszögű** háromszöglet lehet alkotni?

Megoldás:

$l_1 \leq l_2 \leq l_3$. A gúla térfogata $1/6$.

Háromszög akkor, ha $l_3 < l_1 + l_2$.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Ropik

Három egyenlő hosszú ropiból véletlenszerűen kitörünk egy-egy darabot. A törési pontok kiválasztása egymástól független és egyenletes.

- mekkora a valószínűsége annak, hogy a maradékokból háromszöglet lehet alkotni?
- mekkora a valószínűsége annak, hogy a maradékokból **hegyesszögű** háromszöglet lehet alkotni?

Megoldás:

$l_1 \leq l_2 \leq l_3$. A gúla térfogata $1/6$.

Háromszöglet akkor, ha $l_3 < l_1 + l_2$.

Ki kell vonnunk egy gúlát, melynek térfogata $1/12$.

Az összes lehetséges eset és az elfogadható esetek aránya.

$$P(\Delta) = \frac{1}{2}$$



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

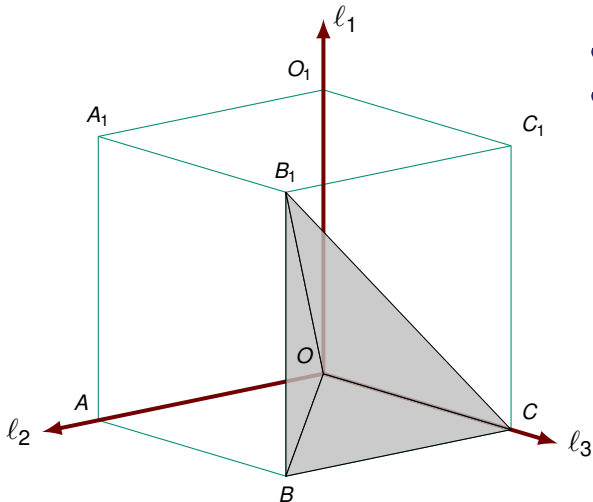
Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre



• $l_1 < l_2 < l_3$

• $l_1 + l_2 > l_3$



Valószínűség és paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

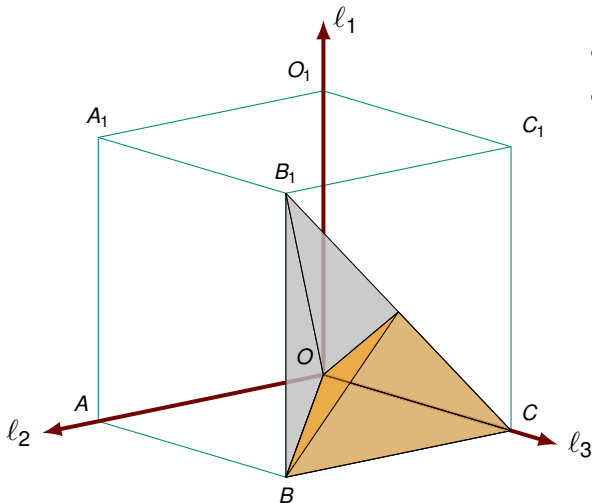
Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre



• $l_1 < l_2 < l_3$

• $l_1 + l_2 > l_3$



Matlab segédfüggvények

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függtelenség

Ajándékozás

Péttervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

A **MATLAB** programnyelv támogatja a

- mátrix-jelölést: ciklusok helyett „matematikusan”:

$$C = A * B$$

- gyors prototípusok készítését:
pl. nincsenek változó-kijelentések.
- numerikus szimulációk írását,

Valószínűségszámítási függvények:

- `rand(m, n)` egy $m \times n$ -es mátrixot feltölt pszeudorandom számokkal;
- `hist(X)` egy mátrix(vektor) értékeinek gyakoriságát rajzolja ki;



Szimulációk

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Egy szimuláció **teszteli** a kigondolt elmélet helyességét.

A szimulátor–program struktúrája a következő:

- 1 Változók meghatározása, a kísérletek számának a meghatározása.
- 2 **for** $i \leftarrow 1 \dots N$
 - szimuláld az i -edik kísérletet.
 - vizsgáld meg az eredményt.
- 3 **end for**
- 4 jelenítsd meg az eredményeket (elemzés).



Tartalom

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

1 Bevezető

2 Valószínűségi alapfogalmak

3 **Paradoxonok**

- Lottó paradoxona
- Függetlenség
- Ajándékozási paradoxon
- Pétervári paradoxon
- Játékelméleti paradoxon
- Halandósági paradoxon
- Bernoulli paradoxon
- Első előfordulás
- De Moivre paradoxona



Lottózás

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Felmerülő kérdések:

- létezik **nyerő** stratégia a lottón?
- létezik **jó** kombináció amit játszani érdemes?

*ha **igen**, melyek ezek*

- természetesen nincs nyerő stratégia,
- **Jó** kombináció \equiv ha nyerünk, mások ne legyenek a listán.

Túl szabályos tippek: pl. „két egymás utáni szám”, egy ötszámjegű egymásutáni számsorozat, ...



Lottózás

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Felmerülő kérdések:

- létezik **nyerő** stratégia a lottón?
- létezik **jó** kombináció amit játszani érdemes?

*ha **igen**, melyek ezek*

- **természetesen** nincs nyerő stratégia,
- **Jó** kombináció \equiv ha nyerünk, mások ne legyenek a listán.

Túl szabályos tippek: pl. „két egymás utáni szám”, egy ötszámjegű egymásutáni számsorozat, ...



Lottózás

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Felmerülő kérdések:

- létezik **nyerő** stratégia a lottón?
- létezik **jó** kombináció amit játszani érdemes?

*ha **igen**, melyek ezek*

- természetesen nincs nyerő stratégia,
- **Jó** kombináció \equiv **ha** nyerünk, mások ne legyenek a listán.

Túl szabályos tippek: pl. „két egymás utáni szám”, egy ötszámjegű egymásutáni számsorozat, ...



Lottózás

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Felmerülő kérdések:

- létezik **nyerő** stratégia a lottón?
- létezik **jó** kombináció amit játszani érdemes?

*ha **igen**, melyek ezek*

- természetesen nincs nyerő stratégia,
- **Jó** kombináció \equiv **ha** nyerünk, mások ne legyenek a listán.

Túl szabályos tippek: pl. „két egymás utáni szám”, egy ötszámjegű egymásutáni számsorozat, ...



Lottózás

	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001
Valószínűség	0000	0000	0000	0000	0000	0000	1010	0000	0000	0000	0101
és	0000	0100	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0000
paradoxonok	1100	0010	0000	0000	1000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
	0000	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0000	0000
Csató Lehel	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0000	0000	0000	0000
	0000	0000	0000	0000	0100	1000	0000	1000	0000	0000	0100
Bevezető	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0010	0000	0000
	0000	0000	1000	0100	0000	0000	0010	0000	0000	0000	0000
Valószínűség	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
Események	0000	0010	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
Valószínűségi	0000	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
változó	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0000	0000	0000	0100
Várható érték	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0010	0000	0001	0000	0000
Példák eloszlásokra	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
Feladatok	0000	0000	0000	0000	0000	0010	0000	0000	0001	0000	0000
MATLAB	0000	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0100	0001
	0001	1000	0000	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0100
Paradoxonok	0001	0000	0000	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
Lotto	0000	0000	0000	0000	0010	0000	0000	0000	0100	0000	0000
Függetlenség	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0100	0000	0000
Ajándékozás	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
Pétevár	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0010	1000	1000
Játékelmélet	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0000	0000	0000	0000	0000
Halandóság	0000	0000	0000	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001
Bernoulli	0000	0010	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
Első előfordulás	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0000	0000	0000
De Moivre	0000	0000	0000	0000	0000	1000	0000	0000	0000	0000	0000
	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	1000	0000	0000	0000
	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0100	0000	0000	0000	1001
	0000	0000	0000	0000	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000
	0000	0010	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
	0000	0010	0000	1000	0100	0000	0001	0000	0000	0000	1000



Lottózás

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajánldékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Egymásutáni számok ritkák:

- két egymásutáni szám:

$$P_{2eu} \approx 89 \cdot \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} = 0.2222$$

- három, négy egymásutáni szám:

$$P_{3eu} \approx 88 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{88 \cdot 89 \cdot 90} = 0.0075$$

$$P_{4eu} \approx 0.00017$$

Nagy nyereségre számíthatunk

ha nyerünk és „ritka” kombinációkat választunk.



Lottózás

- Valószínűség és paradoxonok
- Csató Lehel
- Bevezető
- Valószínűség
- Események
- Valószínűségi változó
- Várható érték
- Példák eloszlásokra
- Feladatok
- MATLAB
- Paradoxonok
- Lotto
- Függetlenség
- Ajánldékozás
- Pétevár
- Játékelmélet
- Halandóság
- Bernoulli
- Első előfordulás
- De Moivre

0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001
0000	0000	0000	0000	0000	0000	1010	0000	0000	0000	0101
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0000
1100	0010	0000	0000	1000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0000	0000
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0000	0000	0000	0000	0100	1000	0000	1000	0000	0000	0100
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0010	0000	0010	0000
0000	0000	1000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0000	0010	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0000	0000	0100
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0000	0000
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0000	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0000
0001	1000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0100
0001	0000	0000	0000	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0100	0000	0000
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0010	1000	1000
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0000	0000	0000	0000
0000	0000	0000	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001

Egymásutáni számok ritkák:

- két egymásutáni szám:

$$P_{2eu} \approx 89 \cdot \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} = 0.2222$$

- három, négy egymásutáni szám:

$$P_{3eu} \approx 88 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{88 \cdot 89 \cdot 90} = 0.0075$$

$$P_{4eu} \approx 0.00017$$

Nagy nyereségre számíthatunk
 ha **nyerünk** és „ritka” kombinációkat választunk.



MATLAB program

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függelenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

```
% lotto paradoxon szimulacio
% parameterek
nL = 90;           % az osszes szam
nO = 5;           % hanyat
nH = 100000;      % hany jatekot szimulalunk
% generaljuk
lOsszes = ceil(rand(nH,nO)*90);
% rendezzuk NOVEKVO sorrendbe
lOsszes = sort(lOsszes,2);
% keressuk az egymasutani szamokat
fMat = [1 -1];    % szuro matrix
lSucc = filter(fMat,1,lOsszes,-100,2);
lSucc = lSucc(:,2:end);
% keressuk azon elemeket, ahol 1 a kulonbseg
iTwo = find(lSucc==1);
fprintf('Ket elemhossz: %5.4f',length(iTwo)/nH);

% nullazunk minden indexet, ami NEM egy.
lInd=zeros(size(lSucc));
lInd(iTwo) = 1;
% ebben - mivel CSAK nulla es egy volt - az eredmény 0,1,2
fMat = [1 1];    % szuro matrix
lThree = filter(fMat,1,lInd,-100,2);
iThree = find(lThree==2);

fprintf('Harom elemhossz: %5.4f',length(iThree)/nH);
```

Eredmények (100e):

T#	Kettő	Három
1	0.2238	0.0077
2	0.2226	0.0075
3	0.2203	0.0073
4	0.2232	0.0074
...		



Függetlenség paradoxona

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Két szabályos érme dobásánál jelölje A az „első dobás fej”; B a „második dobás fej”; C pedig azt, hogy a két dobás közül egy (és csak egy) fej.

Ekkor:

- bármely két esemény független, **ugyanakkor**
- bármely kettő meghatározza a harmadikat.

Megjegyzés: A és B függetlenek, ha $p(A, B) = p(A)p(B)$.



Függetlenség paradoxona

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajánldékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Két szabályos érme dobásánál jelölje A az „első dobás fej”; B a „második dobás fej”; C pedig azt, hogy a két dobás közül egy (és csak egy) fej.

Ekkor:

- bármely két esemény független, **ugyanakkor**
- bármely kettő meghatározza a harmadikat.

Megjegyzés: A és B függetlenek, ha $p(A, B) = p(A)p(B)$.



Ajándékozási paradoxon

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétertár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Egy társaság tagjai kölcsönösen meg akarják ajándékozni egymást. Az ajándékokat összegyűjtik majd **kisorsolják**.

Paradoxon:

Lényegesen nagyobb annak az esélye, hogy lesz valaki, aki visszakapja ajándékát, mint annak, hogy **nem kapja senki a saját ajándékát vissza**.

Összesen $n!$ eset van. Ebből kedvező

$$\binom{n}{0} n! - \binom{n}{1} (n-1)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!,$$

ennek aránya

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$$

Sok kitalál sokra lehet!



Ajándékozási paradoxon

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétertár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Egy társaság tagjai kölcsönösen meg akarják ajándékozni egymást. Az ajándékokat összegyűjtik majd **kisorsolják**.

Paradoxon:

Lényegesen nagyobb annak az esélye, hogy lesz valaki, aki visszakapja ajándékát, mint annak, hogy **nem kapja senki a saját ajándékát vissza**.

Összesen $n!$ eset van. Ebből kedvező

$$\binom{n}{0} n! - \binom{n}{1} (n-1)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!,$$

ennek aránya

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$$

Sok kicsi sokra mehet!



Ajándékozási paradoxon

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétertár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Egy társaság tagjai kölcsönösen meg akarják ajándékozni egymást. Az ajándékokat összegyűjtik majd **kisorsolják**.

Paradoxon:

Lényegesen nagyobb annak az esélye, hogy lesz valaki, aki visszakapja ajándékát, mint annak, hogy **nem kapja senki a saját ajándékát vissza**.

Összesen $n!$ eset van. Ebből kedvező

$$\binom{n}{0} n! - \binom{n}{1} (n-1)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!,$$

ennek aránya

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$$

Sok kicsi sokra mehet!



Pétervári paradoxon

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Egy szabályos pénzérmével addig dobunk, amíg fejet nem kapunk. Ha az első fej, akkor kapunk 2 forintot, ha a második, akkor 4-et, \dots , ha az n -edik, akkor 2^n forintot.

Mennyi a játék értéke?

∞

Bármennyit fizetünk, **várható értékben** nyerünk!

Az ismételt játék várható értéke

$$\frac{1}{2}2 + \dots + \frac{1}{2^n}2^n + \dots$$

sok kicsi sokra megy! (nem kicsik a mennyiségek...)



Péteervári paradoxon

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Péteervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Egy szabályos pénzérmével addig dobunk, amíg fejet nem kapunk. Ha az első fej, akkor kapunk 2 forintot, ha a második, akkor 4-et, . . . , ha az n -edik, akkor 2^n forintot.

Mennyi a játék értéke?

∞

Bármennyit fizetünk, **várható értékben** nyerünk!

Az ismételt játék várható értéke

$$\frac{1}{2}2 + \dots + \frac{1}{2^n}2^n + \dots$$

sok kicsi sokra megy! (nem kicsik a mennyiségek ...)



Pétervári paradoxon

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Egy szabályos pénzérmével addig dobunk, amíg fejet nem kapunk. Ha az első fej, akkor kapunk 2 forintot, ha a második, akkor 4-et, . . . , ha az n -edik, akkor 2^n forintot.

Mennyi a játék értéke?

∞

Bármennyit fizetünk, **várható értékben** nyerünk!

Az ismételt játék várható értéke

$$\frac{1}{2}2 + \dots + \frac{1}{2^n}2^n + \dots$$

sok kicsi sokra megy! (nem kicsik a mennyiségek ...)



MATLAB program

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Modellezési kérdések:

- milyen gyakran mekkorát nyerünk?
- felső korlát esetén mennyi a játék értéke?

Modellezés:

- kiválasztjuk a sorozat hosszát;
- a szimulációk számát;

```
% szentpetervari paradoxon
jHossz = 10000;
mSzam = 10000;
nyerek = zeros(mSzam,1);
for ii=1:mSzam;
    % dobasok
    dobas = round(rand(jHossz,1));
    % FEJ keresese
    indF = find(dobas==1);
    % NEM FEJ sorozatok hossza
    diff = [indF;1+jHossz]- [0;indF];
```

```
nyer = 2.^diff;
% szamitjuk a nyereseget
nyerek(ii)=sum(nyer);
end;
% hisztogramot iratunk
hist(log10(nyerek),200)
```



MATLAB program

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Modellezési kérdések:

- milyen gyakran mekkorát nyerünk?
- felső korlát esetén mennyi a játék értéke?

Modellezés:

- kiválasztjuk a sorozat hosszát;
- a szimulációk számát;

```
% szentpetervari paradoxon
jHossz = 10000;
mSzam = 10000;
nyerek = zeros(mSzam,1);
for ii=1:mSzam;
    % dobasok
    dobas = round(rand(jHossz,1));
    % FEJ keresese
    indF = find(dobas==1);
    % NEM FEJ sorozatok hossza
    diff = [indF;1+jHossz]- [0;indF];
```

```
nyer = 2.^diff;
% szamitjuk a nyereseget
nyerek(ii)=sum(nyer);
end;
% hisztogramot iratunk
hist(log10(nyerek),200)
```



MATLAB program

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Modellezési kérdések:

- milyen gyakran mekkorát nyerünk?
- felső korlát esetén mennyi a játék értéke?

Modellezés:

- kiválasztjuk a sorozat hosszát;
- a szimulációk számát;

```
% szentpetervari paradoxon
jHossz = 10000;
mSzam = 10000;
nyerek = zeros(mSzam,1);
for ii=1:mSzam;
    % dobasok
    dobas = round(rand(jHossz,1));
    % FEJ keresese
indF = find(dobas==1);
    % NEM FEJ sorozatok hossza
    diff = [indF;1+jHossz]- [0;indF];
```

```
nyer = 2.^diff;
% szamitjuk a nyereseget
nyerek(ii)=sum(nyer);
end;
% hisztogramot iratunk
hist(log10(nyerek),200)
```



MATLAB program

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Modellezési kérdések:

- milyen gyakran mekkorát nyerünk?
- felső korlát esetén mennyi a játék értéke?

Modellezés:

- kiválasztjuk a sorozat hosszát;
- a szimulációk számát;

```
% szentpetervari paradoxon
jHossz = 10000;
mSzam = 10000;
nyerek = zeros(mSzam,1);
for ii=1:mSzam;
    % dobasok
    dobas = round(rand(jHossz,1));
    % FEJ keresese
    indF = find(dobas==1);
    % NEM FEJ sorozatok hossza
    diff = [indF;1+jHossz]- [0;indF];
```

```
nyer = 2.^diff;
% szamitjuk a nyereseget
nyerek(ii)=sum(nyer);
end;
% hisztogramot iratunk
hist(log10(nyerek),200)
```



MATLAB program

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Modellezési kérdések:

- milyen gyakran mekkorát nyerünk?
- felső korlát esetén mennyi a játék értéke?

Modellezés:

- kiválasztjuk a sorozat hosszát;
- a szimulációk számát;

```
% szentpetervari paradoxon
jHossz = 10000;
mSzam = 10000;
nyerek = zeros(mSzam,1);
for ii=1:mSzam;
    % dobasok
    dobas = round(rand(jHossz,1));
    % FEJ keresese
    indF = find(dobas==1);
    % NEM FEJ sorozatok hossza
    diff = [indF;1+jHossz]- [0;indF];
```

```
nyer = 2.^diff;
% szamitjuk a nyereseget
nyerek(ii)=sum(nyer);
end;
% hisztogramot iratunk
hist(log10(nyerek),200)
```




Teszteredmények

Valószínűség és paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

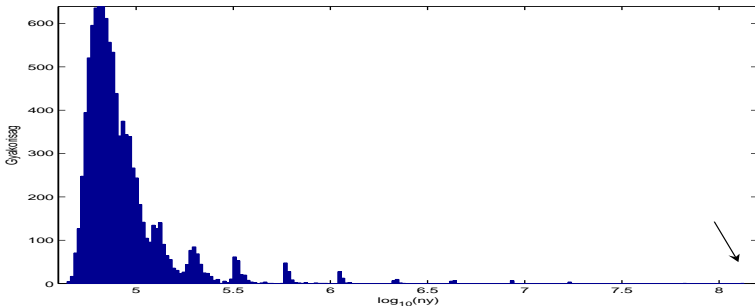
Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre



Hossz	Átlag	Átlagnyereség (Ny/dobás)	Max
100	800	8	524.288
1.000	11.000	11	2.097.152
5.000	91.000	18.2	16.777.216
⇒ 10.000	168.000	16.8	134.217.728
100.000	2.000.000	20.0	1.073.741.824
500.000	23.000.000	46.0	137.000.000.000



Teszteredmények

Valószínűség és paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségit változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

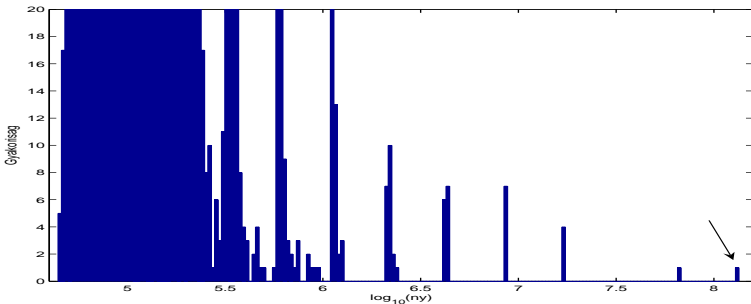
Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre



Hossz	Átlag	Átlagnyereség (Ny/dobás)	Max
100	800	8	524.288
1.000	11.000	11	2.097.152
5.000	91.000	18.2	16.777.216
⇒ 10.000	168.000	16.8	134.217.728
100.000	2.000.000	20.0	1.073.741.824
500.000	23.000.000	46.0	137.000.000.000



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

A gyakorlatban: a nyereménynek van egy felső határa, ez maximálja a lehetséges nyereséget. (alább $2^{23} \approx 8m$ a felső határ).

Felső korlát esetén:

Hossz	Átlag	Ny/d.	Korláttal	Ny/d.	Vágás #
100	800	8	800	8	0
1.000	11.000	11	11.000	11	1
5.000	91.000	18.2	60.000	12	2
10.000	168.000	16.8	117.000	11.7	5
100.000	2.000.000	20	1.200.000	12	60
500.000	23.000.000	46	6.000.000	12	295



Játékelméleti paradoxon

1

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Ketten játszanak: Q és R .

- Egy vagy két ujjat mutatnak fel;
- Páros ujj-szám esetén Q fizet R -nek, ellenkező esetben fordítva;
- annyit nyernek/veszítanak, ahány ujjat felmutattak.

Van véletlenül jobb stratégia

IGEN, egyik játékos veszít!

Melyik?



Játékelméleti paradoxon

1

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Ketten játszanak: Q és R .

- Egy vagy két ujjat mutatnak fel;
- Páros ujj-szám esetén Q fizet R -nek, ellenkező esetben fordítva;
- annyit nyernek/veszítene, ahány ujjat felmutattak.

Van véletlenül jobb stratégia

IGEN, egyik játékos veszít!

Melyik?



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétertár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Ismételt játékok esetén mi a nyerő stratégia?

Nyereség/veszteség
mátrix:

	Q.1	Q.2
R.1	2	-3
R.2	-3	4

$$\mathbf{r}^T \mathbf{M} \mathbf{q} = 2r_1q_1 - 3r_1q_2 - 3r_2q_1 + 4r_2q_2$$

Mindegyik játékos úgy játszik, hogy az eredmény **ne** függjön a másik játékosról (és tudva, hogy $p_2 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - q_1$):

$$(12r_1 - 7)q_1 + (4 - 7r_1).$$

R választása: $12r_1 - 7 = 0$.

A megoldás:

$$r_1 = 7/12, r_2 = 5/12, q_1 = 7/12, q_2 = 5/12$$

Átlegnyereség-veszteség: $-1/12$



Halandósági paradoxon

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

- az élettartam matematikai vizsgálata *Halley 1693*;
- biztosításelmélet XVII. században indul jelentős fejlődésnek;
- életkor–táblázatok összeállítása;
- *d’Alembert* nevéhez kötődik:

Életkor

Az **átlagos életkor** 26 év, mégis ugyanakkora **az esélye** annak, hogy valaki túléli a nyolc évet, mint annak, hogy nem.

• van az átlagon kívül más jellemző, ami hasznos?

• ha csak az átlagot ismerjük, mennyit tudunk az adatokról?



Halandósági paradoxon

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

- az élettartam matematikai vizsgálata *Halley 1693*;
- biztosításelmélet XVII. században indul jelentős fejlődésnek;
- életkor–táblázatok összeállítása;
- *d'Alembert* nevéhez kötődik:

Életkor

Az **átlagos életkor** 26 év, mégis ugyanakkora **az esélye** annak, hogy valaki túléli a nyolc évet, mint annak, hogy nem.

- van az **átlagon** kívül más jellemző, ami hasznos?
- ha **csak** az átlagot ismerjük, mennyit **tudunk** az adatokról?



Halandósági paradoxon

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

- az élettartam matematikai vizsgálata *Halley 1693*;
- biztosításelmélet XVII. században indul jelentős fejlődésnek;
- életkor–táblázatok összeállítása;
- *d’Alembert* nevéhez kötődik:

Életkor

Az **átlagos életkor** 26 év, mégis ugyanakkora **az esélye** annak, hogy valaki túléli a nyolc évet, mint annak, hogy nem.

- van az átlagon kívül más jellemző, ami hasznos?
- ha **csak** az átlagot ismerjük, mennyit **tudunk** az adatokról?



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Old Faithful gejzír





Statisztikák

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi

változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

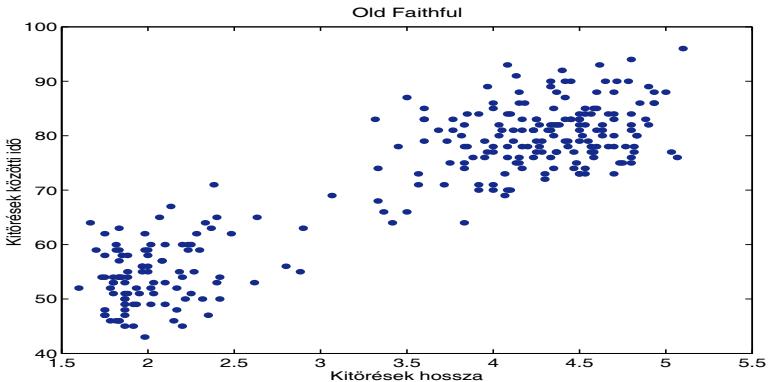
Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Old Faithful gejzír





Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajánldékozás

Pétevár

Játékelmélet

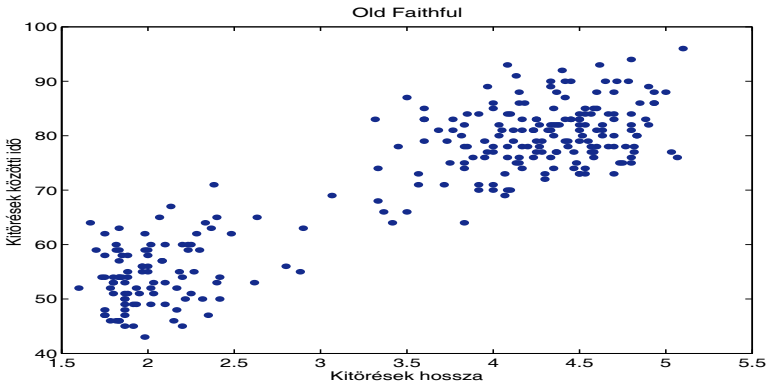
Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Old Faithful gejzír



A grafikon leírására

- az átlag **jó jellemző?**
- más statisztika építése?



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi

változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajánlékozás

Pétevár

Játékelmélet

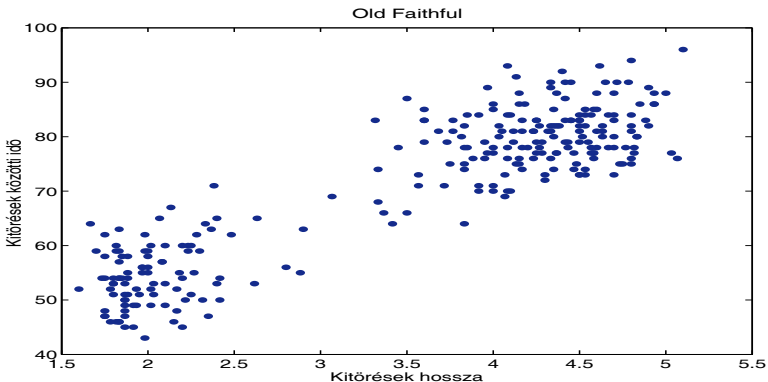
Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Old Faithful gejzír



A grafikon leírására

- az átlag jó jellemző?
- más **statisztika** építése?



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

A következő **modell**:

$$p(x) = \pi_1 \mathcal{N}(x|m_1, \Sigma_1) + \pi_2 \mathcal{N}(x|m_2, \Sigma_2)$$



Más statisztikai modell felállítása

I

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajánlékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

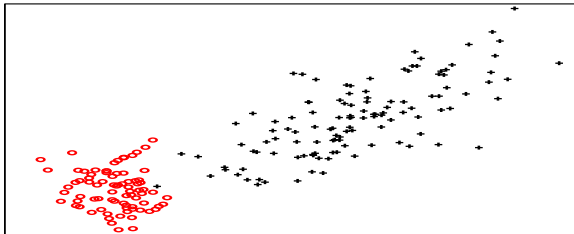
Első előfordulás

De Moivre

A következő modell:

$$p(x) = \pi_1 \mathcal{N}(x|m_1, \Sigma_1) + \pi_2 \mathcal{N}(x|m_2, \Sigma_2)$$

A modell **magyaráz** csoportosulást



melyben

- a különböző csoportokhoz tartozó pontok arányai π_1 illetve π_2 ,
- a csoportok leírhatók egy-egy Gauss-eloszlással,
- ellenben nem tudjuk, melyik csoportba is tartozik egy-egy pont.



Más statisztikai modell felállítása

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajánlékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

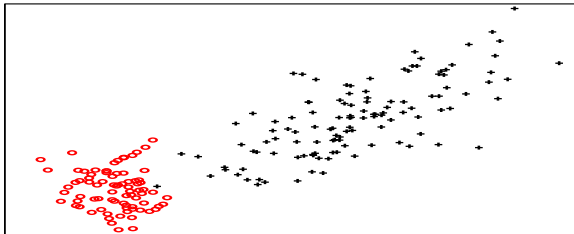
Első előfordulás

De Moivre

A következő modell:

$$p(x) = \pi_1 \mathcal{N}(x|m_1, \Sigma_1) + \pi_2 \mathcal{N}(x|m_2, \Sigma_2)$$

A modell **magyaráz** csoportosulást



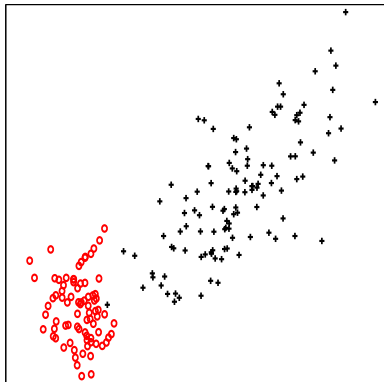
melyben

- a különböző csoportokhoz tartozó pontok arányai π_1 illetve π_2 ,
- a csoportok leírhatók egy-egy Gauss-eloszlással,
- ellenben nem tudjuk, **melyik** csoportba is tartozik egy-egy pont.



Statisztikák:

- π_1, π_2 a csoportok aránya;
- m_1, m_2 a csoportok középpontja;
- Σ_1, Σ_2 a csoportok szórásmátrixa;



Nehéz feladat

a pontok hovatartozásának a megállapítása.

„Expectation-Maximisation”



Nagy számok paradoxona

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

- *Bernoulli – Ars conjectandi, 1713*

- sokszori dobás esetén, az írás/fej arány egyhez tart szabályos érme esetén;
- a dobások függetlenek;

100 „írás” dobása után is 50% az írás valószínűsége

Bármennyi sok „fej” dobás esetén, a következő dobás $1/2$ valószínűséggel lesz „fej”.



Nagy számok paradoxona

1

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

- *Bernoulli – Ars conjectandi, 1713*

- sokszori dobás esetén, az írás/fej arány egyhez tart szabályos érme esetén;
- a dobások függetlenek;

100 „írás” dobása után is 50% az írás valószínűsége

Bármennyi sok „fej” dobás esetén, a következő dobás $1/2$ valószínűséggel lesz „fej”.

- nem valószínű a hosszú sorozat, ellenben
- a pénzérmének nincs emlékezete, tehát nem a „múlt” alapján dönt.



Nagy számok paradoxona

1

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

- *Bernoulli – Ars conjectandi, 1713*

- sokszori dobás esetén, az írás/fej arány egyhez tart szabályos érme esetén;
- a dobások függetlenek;

100 „írás” dobása után is 50% az írás valószínűsége

Bármennyi sok „fej” dobás esetén, a következő dobás $1/2$ valószínűséggel lesz „fej”.

- nem (?) valószínű a hosszú sorozat, ellenben
- a pénzérmének nincs emlékezete, tehát nem a „múlt” alapján dönt.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajánlkozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

```
%% BINARIS SZAMSOROZATOK HOSSZA
nRun = 500000;
nN    = [10 100 1000];
%% futasi változók
nBin = floor(5 + 2.5*log2(nN(end)));
vBins = zeros(length(nN), nBin);
bins  = 1:nBin;
bb    = 1;
%% kiserletek
for iSize=nN;
    for ii=1:nRun;
        ossSor = 2*round(rand(1, iSize))-1;
        ossSor(:, iSize+1) = - ossSor(:, iSize);
        valt    = ossSor(:, 2:end)-ossSor(:, 1:(end-1));
        valt    = abs(valt)/2;
        indF    = find(valt==1);
        hossz   = indF - [0 indF(1:end-1)];
        [bBin, bins] = hist(hossz, bins);
        vBins(bb, :) = vBins(bb, :) + bBin;
    end;
    bb=bb+1;
end;
```



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

```
%% BINARIS SZAMSOROZATOK HOSSZA
nRun = 500000;
nN    = [10 100 1000];
%% futasi változók
nBin = floor(5 + 2.5*log2(nN(end)));
vBins = zeros(length(nN), nBin);
bins  = 1:nBin;
bb    = 1;
%% kiserletek
for iSize=nN;
    for ii=1:nRun;
        ossSor = 2*round(rand(1, iSize))-1;
        ossSor(:, iSize+1) = - ossSor(:, iSize);
        valt = ossSor(:,2:end)-ossSor(:,1:(end-1));
        valt      = abs(valt)/2;
        indF      = find(valt==1);
        hossz     = indF - [0 indF(1:end-1)];
        [bBin, bins] = hist(hossz, bins);
        vBins(bb, :) = vBins(bb, :) + bBin;
    end;
    bb=bb+1;
end;
```

```
%% kirajzolás
clf; hold on; box on;
semilogy(bins, vBins');
xlabel('Hossz');
ylabel('Hanszszor');
ylim([0 100]);
```



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajánldékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

```
%% BINARIS SZAMSOROZATOK HOSSZA
nRun = 500000;
nN    = [10 100 1000];
%% futasi változók
nBin = floor(5 + 2.5*log2(nN(end)));
vBins = zeros(length(nN), nBin);
bins   = 1:nBin;
bb     = 1;
%% kiserletek
for iSize=nN;
    for ii=1:nRun;
        ossSor = 2*round(rand(1, iSize))-1;
        ossSor(:, iSize+1) = - ossSor(:, iSize);
        valt    = ossSor(:, 2:end)-ossSor(:, 1:(end-1));
        valt    = abs(valt)/2;
        indF    = find(valt==1);
        hossz  = indF - [0 indF(1:end-1)];
        [bBin, bins] = hist(hossz, bins);
        vBins(bb, :) = vBins(bb, :) + bBin;
    end;
    bb=bb+1;
end;
```



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajánlkozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

```
%% BINARIS SZAMSOROZATOK HOSSZA
```

```
nRun = 500000;
```

```
nN = [10 100 1000];
```

```
%% futasi változók
```

```
nBin = floor(5 + 2.5*log2(nN(end)));
```

```
vBins = zeros(length(nN), nBin);
```

```
bins = 1:nBin;
```

```
bb = 1;
```

```
%% kiserletek
```

```
for iSize=nN;
```

```
    for ii=1:nRun;
```

```
        ossSor = 2*round(rand(1, iSize))-1;
```

```
        ossSor(:, iSize+1) = - ossSor(:, iSize);
```

```
        valt = ossSor(:, 2:end)-ossSor(:, 1:(end-1));
```

```
        valt = abs(valt)/2;
```

```
        indF = find(valt==1);
```

```
        hossz = indF - [0 indF(1:end-1)];
```

```
[bBin, bins] = hist(hossz, bins);
```

```
vBins(bb,:) = vBins(bb,:) + bBin;
```

```
end;
```

```
bb=bb+1;
```

```
end;
```

```
%% kirajzolás
```

```
clf; hold on; box on;
```

```
semilogy(bins, vBins');
```

```
xlabel('Hossz');
```

```
ylabel('Hanszszor');
```

```
ylim([0 100]);
```




Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

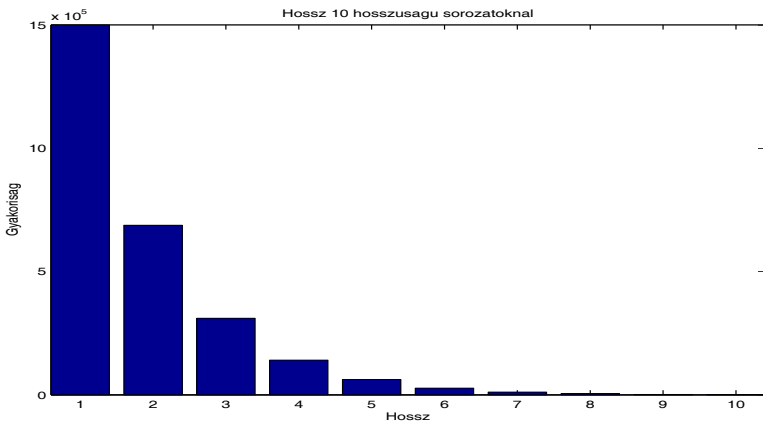
Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre



Gyakoriság és hossz közötti kapcsolat



Valószínűség és paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

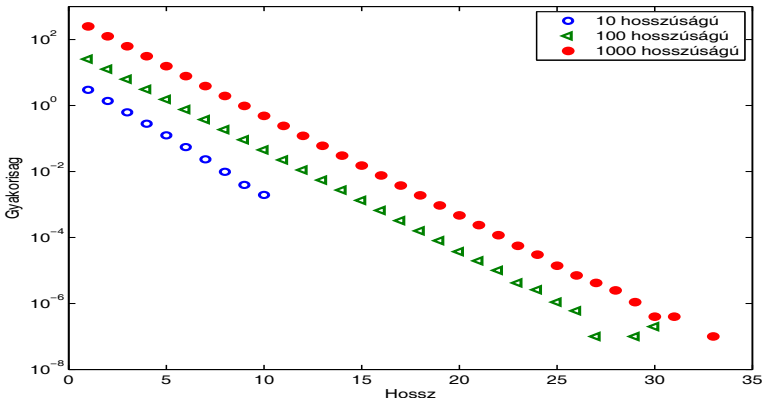
Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Alsorozatainak gyakorisága – 10m futtatás



Gyakoriság és hossz közötti kapcsolat



Valószínűség és paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

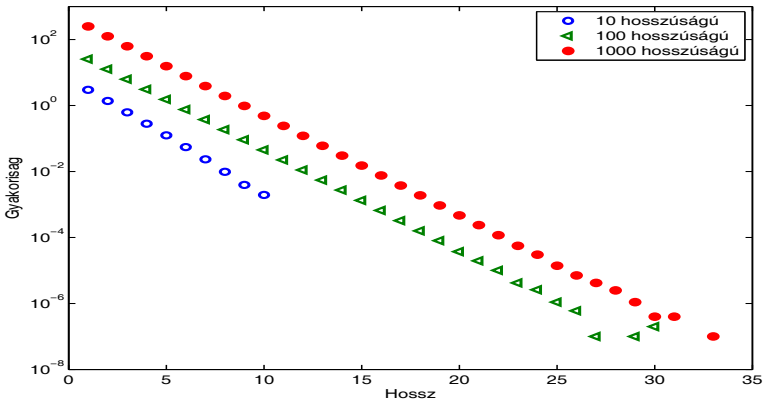
Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Alsorozatainak gyakorisága – 10m futtatás



Gyakoriság és hossz közötti kapcsolat

Egy adott hossz valószínűsége: $p(h) \approx c \exp(-k h)$



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

- Szabályos pénzérmét addig dobunk, amíg FF vagy FI nem jön ki.
- A sorozatok ugyanolyan valószínűek.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi

változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

- Szabályos pénzérmét addig dobunk, amíg FF vagy FI nem jön ki.
- A sorozatok ugyanolyan valószínűek.

Annak a valószínűsége, hogy az FF hamarabb jön ki mint az FI egyenlő 50%-kal, ugyanis

ha fejet dobtunk, akkor 50% a valószínűsége annak, hogy a következő dobás fej lesz. Ez a valószínűség megegyezik az írásával.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajánldékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

- Szabályos pénzérmét addig dobunk, amíg FF vagy FI nem jön ki.
- A sorozatok ugyanolyan valószínűek.

Annak a valószínűsége, hogy az FF hamarabb jön ki mint az FI egyenlő 50%-kal, ugyanis

ha fejet dobtunk, akkor 50% a valószínűsége annak, hogy a következő dobás fej lesz. Ez a valószínűség megegyezik az írásával.

Mégis

Az **első előfordulás**ig tartó sorozat hossza nem ugyanaz.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi

változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajánlkozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

- Szabályos pénzérmét addig dobunk, amíg FF vagy FI nem jön ki.
- A sorozatok ugyanolyan valószínűek.

Annak a valószínűsége, hogy az FF hamarabb jön ki mint az FI egyenlő 50%-kal, ugyanis

ha fejet dobtunk, akkor 50% a valószínűsége annak, hogy a következő dobás fej lesz. Ez a valószínűség megegyezik az írásával.

Mégis

Az **első előfordulás**ig tartó sorozat hossza nem ugyanaz. Az FF -hez átlagosan 6 dobás kell, az FI -hez 4.

Hogyan?



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

NEM azonos eseményeket keresünk:

FI esetén

$\left(\begin{array}{cccc} +- & -+- & ---+ & ----+ \\ & ++- & -++- & -+++- \\ & & +++- & -++++ \\ & & & +++++ \end{array} \right)$			
2	3	4	5
$\frac{1}{2^2}$	$\frac{2}{2^3}$	$\frac{3}{2^4}$	$\frac{4}{2^5}$

FF esetén

$\left(\begin{array}{cccccc} ++ & -++ & --++ & ---++ & ----+ & ----- \\ & & +--++ & -+--- & -+--- & -+--- \\ & & & +---+ & -+--- & -+--- \\ & & & & +---+ & -+--- \\ & & & & & +---+ \\ & & & & & & +---+ \end{array} \right)$				
2	3	4	5	6

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{n-1}{2^n}$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$
$$\left(\frac{1}{1-x} \right)''_{xx} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$



Valószínűség és paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

NEM azonos eseményeket keresünk:

FI esetén

$$\left(\begin{array}{cccc} +- & -+- & --+- & ---+- \\ & ++- & -++- & --++- \\ & & +++- & -++++ \\ & & & +++++- \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^4} & \frac{4}{2^5} \end{array} \right)$$

FF esetén

$$\left(\begin{array}{cccccc} ++ & -++ & --++ & ---++ & ----+ & ----- \\ & +++ & -+++ & --+++ & ---+++ & ----+++ \\ & & ++++ & -++++ & -++++ & ----- \\ & & & +++++ & +++++ & +++++ \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^4} & \frac{4}{2^5} & \frac{5}{2^6} \end{array} \right)$$

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{n-1}{2^n} = 4$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$



NEM azonos eseményeket keresünk:

FI esetén

$$\left(\begin{array}{cccc} +- & -+- & ---+ & ----+ \\ & ++- & -++- & - -++- \\ & & +++- & -+++ \\ & & & +++++ \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^4} & \frac{4}{2^5} \end{array} \right)$$

FF esetén

$$\left(\begin{array}{cccccc} ++ & -++ & ---++ & ----++ & -----++ \\ & + +- & - -+- & - - -+- & - - - -+- \\ & & + -++ & - + -++ & - + - -++ \\ & & & + - -++ & - + - - -++ \\ & & & & + - - - -++ \\ & & & & + - - - - -++ \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{n-1}{2^n} = 4$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$
$$\left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$



NEM azonos eseményeket keresünk:

FI esetén

$\begin{pmatrix} +- & -+- & ---+ & ----+ \\ & ++- & -++- & - - -+ \\ & & + +- & - - -+ \\ & & & + + + - \\ & & & & + + + + \end{pmatrix}$
2 3 4 5
$\frac{1}{2^2}$ $\frac{2}{2^3}$ $\frac{3}{2^4}$ $\frac{4}{2^5}$

FF esetén

$\begin{pmatrix} ++ & -++ & ---++ & ----++ & -----+ \\ & + +- & - ++ & - - -+ & - - - -+ \\ & & + +- & - - -+ & - - - -+ \\ & & & + - - + & - - - -+ \\ & & & & + - - -+ \\ & & & & & + - - -+ \\ & & & & & & + - - -+ \end{pmatrix}$
2 3 4 5 6

Rekurzív relációk felírása:

M_n – a legelső kezdődő sorozatok átlaghossza;

M'_n – az n-edik kezdődő sorozatok átlaghossza;

$$M_n = 1 + \frac{M_{n-1} + M'_n}{2}$$

$$M'_n = 1 + \frac{1 + M'_n}{2}$$

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{n-1}{2^n} = 4$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$



Érem-paradoxon

Első előfordulás II

NEM azonos eseményeket keresünk:

FI esetén

$$\left(\begin{array}{cccc} +- & -+- & --+- & ---+- \\ & ++- & -++- & ----+- \\ & & +++- & -++++ \\ & & & +++++- \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^4} & \frac{4}{2^5} \end{array} \right)$$

FF esetén

$$\left(\begin{array}{ccccc} ++ & -++ & --++ & ---++ & ----++ \\ & +-+ & -++- & ----++ & - - - - ++ \\ & & +--+ & -+--+ & - - - - ++ \\ & & & +---+ & - - - - ++ \\ & & & & + - - - ++ \\ & & & & + - - - ++ \\ & & & & + - - - ++ \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

Rekurrenca relációk felállításása:

M_+ - a fejjel kezdődő sorozatok átlaghossza;

M_- - az írással kezdődő sorozatok átlaghossza;

$$M_- = 1 + \frac{M_- + M_+}{2}$$

$$M_+ = 1 + \frac{1 + M_-}{2}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $M_+ = 5$ és $M_- = 7$.

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{n-1}{2^n} = 4$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)''_{xx} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$



Érem-paradoxon

Első előfordulás II

NEM azonos eseményeket keresünk:

FI esetén

$\begin{pmatrix} + - & - + - & - - + - & - - - + - \\ & + + - & - + + - & - - + + - \\ & & + + + - & - + + + - \\ & & & + + + + - \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^4} & \frac{4}{2^5} \end{pmatrix}$

FF esetén

$\begin{pmatrix} ++ & - ++ & - - ++ & - - - ++ & - - - - ++ \\ & & + - ++ & - + - ++ & - - + - ++ \\ & & & + - - ++ & - + - - ++ \\ & & & & + - - - ++ \\ & & & & + - - - - ++ \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Rekurrenca relációk felállítása:

M_+ - a fejjel kezdődő sorozatok átlaghossza;

M_- - az írással kezdődő sorozatok átlaghossza;

$$M_- = 1 + \frac{M_- + M_+}{2}$$

$$M_+ = 1 + \frac{1 + M_-}{2}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $M_+ = 5$ és $M_- = 7$. Ahonnan:

$$\frac{M_+ + M_-}{2} = 6$$

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{n-1}{2^n} = 4$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$

- Valószínűség és paradoxonok
- Csató Lehel
- Bevezető
- Valószínűség
- Események
- Valószínűségi változó
- Várható érték
- Példák elosztásokra
- Feladatok
- MATLAB
- Paradoxonok
- Lotto
- Függetlenség
- Ajándékozás
- Pétervár
- Játékelmélet
- Halandóság
- Bernoulli
- Első előfordulás
- De Moivre



NEM azonos eseményeket keresünk:

FI esetén

$\begin{pmatrix} +- \\ ++- \\ +++- \\ ++++- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -+- \\ +-+ \\ +++- \\ ++++- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} --+- \\ -++- \\ -+++ \\ -++++ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ---+- \\ ---++- \\ ---+++ \\ ---++++ \end{pmatrix}$
2	3	4	5
$\frac{1}{2^2}$	$\frac{2}{2^3}$	$\frac{3}{2^4}$	$\frac{4}{2^5}$

FF esetén

$\begin{pmatrix} ++ \\ -++ \\ --++ \\ ---++ \\ ----++ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -+- \\ +-+ \\ +++- \\ ++++- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} --+- \\ -++- \\ -+++ \\ -++++ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ---+- \\ ---++- \\ ---+++ \\ ---++++ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ----+- \\ ----++- \\ ----+++ \\ ----++++ \end{pmatrix}$
2	3	4	5	6

Rekurrenca relációk felállítása:

M_+ - a fejjel kezdődő sorozatok átlaghossza;

M_- - az írással kezdődő sorozatok átlaghossza;

$$M_- = 1 + \frac{M_- + M_+}{2}$$

$$M_+ = 1 + \frac{1 + M_-}{2}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $M_+ = 5$ és $M_- = 7$. Ahonnan:

$$\frac{M_+ + M_-}{2} = 6$$

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{n-1}{2^n} = 4$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$



Érem-paradoxon

Első előfordulás II

NEM azonos eseményeket keresünk:

FI esetén

$\left(\begin{array}{cccc} +- & -+- & --+- & ---+- \\ & ++- & -++- & --++- \\ & & +++- & -++++ \\ & & & +++++- \end{array} \right)$
$\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right)$
$\left(\begin{array}{cccc} \frac{1}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{3}{2^4} & \frac{4}{2^5} \end{array} \right)$

FF esetén

$\left(\begin{array}{ccccc} ++ & -++ & --++ & ---++ & ----++ \\ & +-- & -+-- & --+-- & ---+-- \\ & & ++-- & -++-- & -+++-- \\ & & & +++-- & ++++-- \end{array} \right)$
$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right)$

Rekurrenca relációk felállítása:

M_+ - a fejjel kezdődő sorozatok átlaghossza;

M_- - az írással kezdődő sorozatok átlaghossza;

$$M_- = 1 + \frac{M_- + M_+}{2}$$

$$M_+ = 1 + \frac{1 + M_-}{2}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $M_+ = 5$ és $M_- = 7$. Ahonnan:

$$\frac{M_+ + M_-}{2} = 6$$

Az első előfordulás átlagos hossza:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{n-1}{2^n} = 4$$

Kiszámítása:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)''_{xx} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{x^{n-2}}$$

- Valószínűség és paradoxonok
- Csató Lehel
- Bevezető
- Valószínűség
- Események
- Valószínűségi változó
- Várható érték
- Példák elosztásokra
- Feladatok
- MATLAB
- Paradoxonok
- Lotto
- Függetlenség
- Ajándékozás
- Pétervár
- Játékelmélet
- Halandóság
- Bernoulli
- Első előfordulás
- De Moivre



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Szabályos pénzérmét átlagosan legalább 8-szor dobunk ahhoz, hogy az $+, -$ sorozat valamely háromtagú permutációját kapjuk.

Az egyéni valószínűségek nem egyformák

Az $++-, -++, --+, +- -$ kombinációk a legkedvezőbbek.



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Szabályos pénzérmét átlagosan legalább 8-szor dobunk ahhoz, hogy az $+, -$ sorozat valamely háromtagú permutációját kapjuk.

Az egyéni valószínűségek nem egyformák

Az $++-, -++$, $---$, $+- -$ kombinációk a legkedvezőbbek.

Példa: vizsgáljuk meg, hogy az $++-$ és az $-++$ sorozatok közül melyik előfordulása valószínűbb **korábban**.

$(++- \quad +++- \quad ++++- \quad ++++-- \quad \dots)$



Valószínűség és paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Szabályos pénzérmét átlagosan legalább 8-szor dobunk ahhoz, hogy az $+, -$ sorozat valamely háromtagú permutációját kapjuk.

Az egyéni valószínűségek nem egyformák

Az $++-, -++$, $---$ kombinációk a legkedvezőbbek.

Példa: vizsgáljuk meg, hogy az $++-$ és az $-++$ sorozatok közül melyik előfordulása valószínűbb **korábban**. **Mi az eseménytér?**

$$\left(\begin{array}{cccc} ++- & +++- & ++++- & ++++-- & \dots \\ \left(\frac{1}{2} \right)^3 & \left(\frac{1}{2} \right)^4 & \left(\frac{1}{2} \right)^5 & \left(\frac{1}{2} \right)^6 & \dots \end{array} \right)$$



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Szabályos pénzérmét átlagosan legalább 8-szor dobunk ahhoz, hogy az $+, -$ sorozat valamely háromtagú permutációját kapjuk.

Az egyéni valószínűségek nem egyformák

Az $++-, -++, --+, +- -$ kombinációk a legkedvezőbbek.

Példa: vizsgáljuk meg, hogy az $++-$ és az $-++$ sorozatok közül melyik előfordulása valószínűbb **korábban**. **Mi az eseménytér?**

$$\left(\begin{array}{cccc} ++- & +++- & ++++- & ++++-- & \dots \\ \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \frac{1}{2^6} & \dots \end{array} \right)$$

Az összes többi esetben a $-++$ fordul elő előbb (egy $-$ mindig van; a $++-$ -t pedig mindenképp megelőzi egy $-++$).



Valószínűség és paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Szabályos pénzérmét átlagosan legalább 8-szor dobunk ahhoz, hogy az $+, -$ sorozat valamely háromtagú permutációját kapjuk.

Az egyéni valószínűségek nem egyformák

Az $++-, -++$, $---$, $+-+$ kombinációk a legkedvezőbbek.

Példa: vizsgáljuk meg, hogy az $++-$ és az $-++$ sorozatok közül melyik előfordulása valószínűbb **korábban**. **Mi az eseménytér?**

$$\left(\begin{array}{cccc} ++- & +++- & ++++- & ++++-- & \dots \\ \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \frac{1}{2^6} & \dots \end{array} \right)$$

Az összes többi esetben a $-++$ fordul elő előbb (egy $-$ mindig van; a $++-$ -t pedig mindenképp megelőzi egy $-++$).



Valószínűség és paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétertár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Szabályos pénzérmét átlagosan legalább 8-szor dobunk ahhoz, hogy az $+, -$ sorozat valamely háromtagú permutációját kapjuk.

Az egyéni valószínűségek nem egyformák

Az $++-, -++-, --+, +- -$ kombinációk a legkedvezőbbek.

Példa: vizsgáljuk meg, hogy az $++-$ és az $-++$ sorozatok közül melyik előfordulása valószínűbb **korábban**. **Mi az eseménytér?**

$$\left(\begin{array}{cccc} ++- & +++- & ++++- & ++++-- & \dots \\ \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \frac{1}{2^6} & \dots \end{array} \right)$$

Az összes többi esetben a $-++$ fordul elő előbb (egy $-$ mindig van; a $++-$ -t pedig mindenképp megelőzi egy $-++$).



Valószínűség és paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi változó

Várható érték

Példák elosztásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajánldékozás

Pétertár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Megfogalmazás:

Szabályos pénzérmét átlagosan legalább 8-szor dobunk ahhoz, hogy az $+, -$ sorozat valamely háromtagú permutációját kapjuk.

Az egyéni valószínűségek nem egyformák

Az $++-, -++,-+-, +--$ kombinációk a legkedvezőbbek.

Példa: vizsgáljuk meg, hogy az $++-$ és az $-++$ sorozatok közül melyik előfordulása valószínűbb **korábban**. **Mi az eseménytér?**

$$\left(\begin{array}{cccc} ++- & +++- & ++++- & ++++-- & \dots \\ \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \frac{1}{2^6} & \dots \end{array} \right)$$

Az összes többi esetben a $-++$ fordul elő előbb (egy $-$ mindig van; a $++-$ -t pedig mindenképp megelőzi egy $-++$).

A valószínűség:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$$



Normális eloszlás

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Malandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

- **De Moivre 1718: *The doctrine of chances.***

Nagy számok ellentmondása

- a fej/írás arány konvergál 1-hez
– a **közelítő egyenlőség**;
- a „fej”=„írás” esemény valószínűsége konvergál nullához
– a **pontos egyenlőség**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\| \frac{n_{Fej}}{n_{Iras}} - 1 \right\| < \epsilon \right) = 1$$

illetve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n_{Fej} = n_{Iras}) = 0$$



Normális eloszlás

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Beható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

- **De Moivre 1718: *The doctrine of chances.***

Nagy számok ellentmondása

- a fej/írás arány konvergál 1-hez
– a **közelítő egyenlőség**;
- a „fej”=„írás” esemény valószínűsége konvergál nullához
– a **pontos egyenlőség**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\| \frac{n_{Fej}}{n_{Iras}} - 1 \right\| < \epsilon \right) = 1$$

illetve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P (n_{Fej} = n_{Iras}) = 0$$



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Malandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

De Moivre (1738): „Merem állítani, hogy ez a legnehezebb probléma, amit fel lehet vetni a Véletlen Tudományában...”

Legyen az érme: $x_n \in \{-1, 1\}$ úgy, hogy

$$p(x_n = 1) = p(x_n = -1) = 0.5.$$

Ekkor a dobás-sorozatok átlaga 0 és szórása:

$$\sigma_B = E \left[(x_n - \bar{x}_n)^2 \right] = 1$$

Ha 6 dobás esetét vizsgáljuk, a lehetséges (fej,érme) párok, illetve összeg:

$$\begin{bmatrix} (6, 0) & (5, 1) & \dots & (0, 6) \\ -6 & -4 & \dots & 6 \end{bmatrix}$$



Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

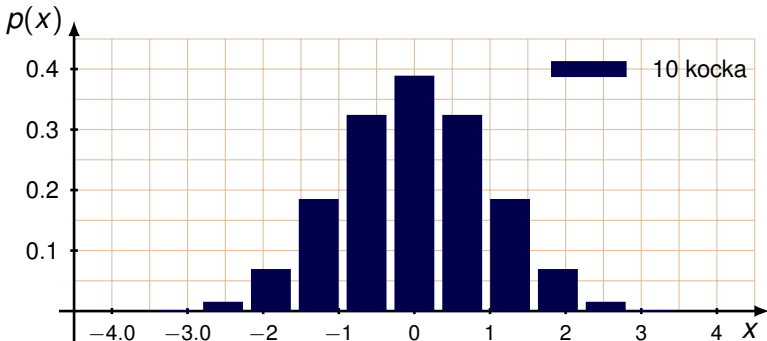
Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

A dobások összege és azok valószínűsége:

$$\left[\begin{array}{cccccc} -10 & -8 & -6 & \dots & 10 \\ \binom{10}{0} & \binom{10}{1} & \binom{10}{2} & \dots & \binom{10}{10} \\ \hline 2^{10} & 2^{10} & 2^{10} & \dots & 2^{10} \end{array} \right]$$





Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajánlékozás

Pétevár

Játékemléet

Halandóság

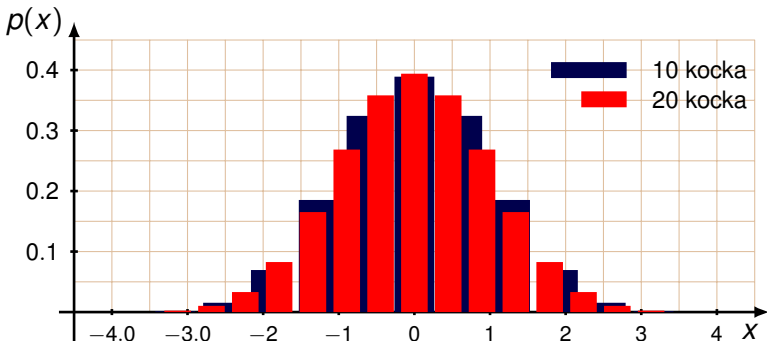
Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

A dobások összege és azok valószínűsége:

$$\left[\begin{array}{cccccc} -10 & -8 & -6 & \dots & 10 \\ \binom{10}{0} & \binom{10}{1} & \binom{10}{2} & \dots & \binom{10}{10} \\ \hline 2^{10} & 2^{10} & 2^{10} & \dots & 2^{10} \end{array} \right]$$





Valószínűség és paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

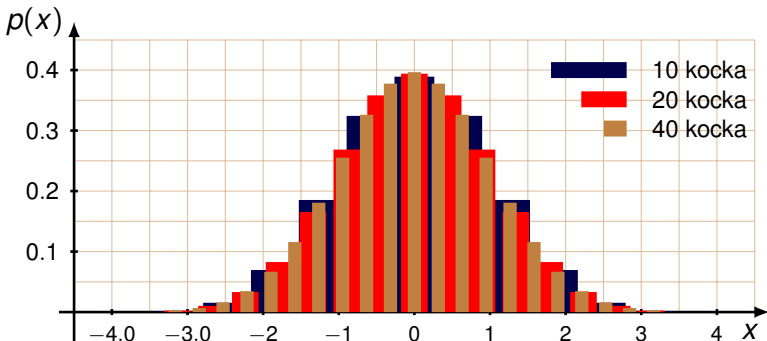
Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

A dobások összege és azok valószínűsége:

$$\left[\begin{array}{cccccc} -10 & -8 & -6 & \dots & 10 \\ \binom{10}{0} & \binom{10}{1} & \binom{10}{2} & \dots & \binom{10}{10} \\ \hline 2^{10} & 2^{10} & 2^{10} & \dots & 2^{10} \end{array} \right]$$





Valószínűség és paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

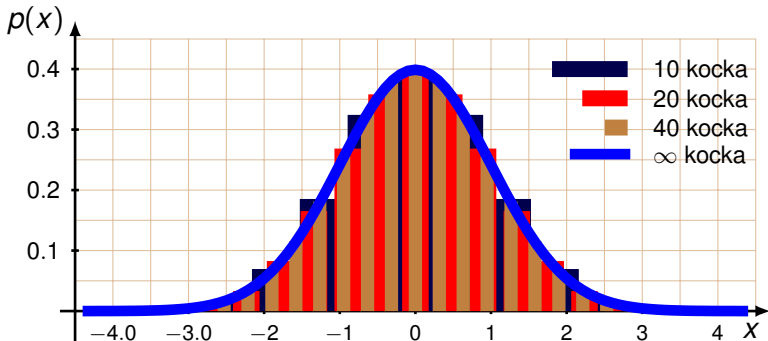
Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

A dobások összege és azok valószínűsége:

$$\left[\begin{array}{cccc} -10 & -8 & -6 & \dots & 10 \\ \binom{10}{0} & \binom{10}{1} & \binom{10}{2} & \dots & \binom{10}{10} \\ \hline 2^{10} & 2^{10} & 2^{10} & \dots & 2^{10} \end{array} \right]$$





Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétervár

Játékelmélet

Halandóság

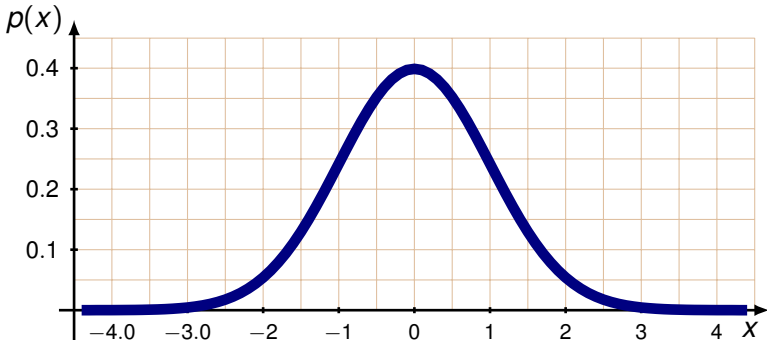
Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

Az eloszlás képlete:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right]$$





Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Bevezető

Valószínűség

Események

Valószínűségi
változó

Várható érték

Példák eloszlásokra

Feladatok

MATLAB

Paradoxonok

Lotto

Függetlenség

Ajándékozás

Pétevár

Játékelmélet

Halandóság

Bernoulli

Első előfordulás

De Moivre

```
function [x,y] = moivre(N,style) %% kirajzolni
%% választunk parametereket      box on; hold on;
if nargin==0;                    bar(x,y,style);
    N = 6;                       xlim([-4.5,4.5]);
elseif nargin==1;                %% túl kicsi értékek
    style='k';                    ii = find(y>0.001);
end;                               x = x(ii);
%% X- es Y- tengely              y = y(ii);
x = 0:N;
y = zeros(size(x));
for ii=x;
    y(ii+1) = nchoosek(N,ii);
end;
y = y ./ (2^N);
x = 2*x - N;
%% normalissa változtatni
x = x/sqrt(N);
y = y/2*sqrt(N);

[x,y]=moivre(40,'k');
h = fopen('moivre_40.dat','wt');
fprintf(h,'%5.4f %5.4f/n', [x' y']');
fclose(h);
```



Irodalom

Valószínűség
és
paradoxonok

Csató Lehel

Irodalom



Székely J. Gábor

Paradoxonok a véletlen matematikájában.

Typotex, 2004.



Fegyverneki Sándor

Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika

Miskolci Egyetem, Alkalmazott Matematikai Tanszék,
2007.



Csatár Katalin, Harró Ágota, Hegyi Györgyné, Lövey

Éva, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Ratkó Éva

Valószínűségszámítás feladatok kezdőknek

Középiskolai Matematikai Lapok, 2004.