1.1. Feladatok

1.1.1. Feladat. *Az* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *sorozatot a következőképpen értelmezzük:*

$$x_0 = 2,\ x_1 = 6 \text{ és } x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}.$$

Igazold, hogy

$$x_n = \left[(3+2\sqrt{2})^n\right] + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

és, hogy $x_n + 2(-1)^n$ *teljes négyzet!*

(III. Wildt József emlékverseny, 1993., Szász Róbert)

1.1.2. Feladat. *Adott az* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *sorozat, ahol*

$$x_0 = \frac{1}{2} \text{ és } 2x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} - \sqrt{1-x_n}.$$

Határozd meg a sorozat általános tagját!

(I. Bolyai Farkas emlékverseny, 1995., Bencze Mihály)

1.1.3. Feladat. *Jelöljük* $f(n)$*-nel annak a szorzatnak a legnagyobb lehetséges értékét, amelynek tényezői természetes számok és összegük* n*. Határozd meg* $f(n)$*-net ha* $n \geq 1$.

(V. NMMV., Székelyudvarhely, 1996., Urbán János)

1.1.4. Feladat. *Adott az*

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \frac{2}{n+1}$$

rekurziót teljesítő sorozat, ahol $\frac{3}{2} \leq u_1 \leq 2$*. Bizonyítsd be, hogy*

$$1 < u_n < 1 + \frac{1}{n-1},\ \ \forall n \geq 2.$$

(VI. NMMV, Kaposvár, 1997., András Szilárd)

1.1.5. Feladat. *Az* $f \in \mathbf{R}[X]$ $(2n-1)$*-ed fokú (*$n \in \mathbf{N}^*$*) polinom teljesíti a következő összefüggéseket:*

$$(f-a) \vdots (x+a)^n$$

és

$$(f+a) \vdots (x-a)^n$$

($a \in \mathbf{R}$ *rögzített). Bizonyítsd be, hogy* $f(x) \vdots x$.

(Iskolai olimpia, 1986., Konstanca, Constantin Caragea)

1.1.6. Feladat. *Az* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *sorozatra teljesülnek az*

$$x_1 = 3, x_2 = 7, x_{n+1} = |x_n| - x_{n-1}$$

egyenlőségek, $\forall\, n \in \mathbf{N}\setminus\{1\}$*. Bizonyítsd be, hogy a sorozat periodikus!*

1.1.7. Feladat. *Jelöljük $f(n)$-nel az*

$$\left[\frac{1^2}{n}\right], \left[\frac{2^2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n^2}{n}\right]$$

számok közt előforduló különböző értékek számát. Határozd meg $f(n)$-et!

1.1.8. Feladat. *Határozd meg az összes olyan $f : Z \to Z$ függvényt, amelyre*

$$3f\left(f\left(x\right)\right) = 2f\left(x\right) + x, \quad \forall\, x \in Z!$$

(IV. Nemzetközi Magyar Matematikai Verseny, 1995., András Szilárd)