1.1. Feladatok

1.1.1. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy ha az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *és* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sorozatokra*

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_{n+k} = b$;
- $b_k > 0$, *ha* $k \geq 1$,

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{n+k} b_{n+k} = ab.$$

1.1.2. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy ha az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *és* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sorozatok esetén*

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} b_k = ab.$$

1.1.3. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy ha az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *és* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sorozatok esetén*

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = b$,

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} b_k = ab.$$

1.1.4. Feladat. *Igazold, hogy ha az* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *függvényre* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x} = a$ *és az* $(x_{n,k})_{n\geq 1, 1\leq k\leq n}$ *sorozatra teljesülnek a következő feltételek:*

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *úgy, hogy* $|x_{n,k}| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall\, 1 \leq k \leq n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_{n,k} = b$,

akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{n,k}) = ab$.

1.1.5. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2$.

1.1.6. Feladat. *Bizonyítsd be két különböző módszerrel, hogy* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \frac{1}{n+k} = \ln 2$.