1.1. Feladatok

1.1.1. Feladat. *Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény folytonos és periodikus. Bizonyítsd be, hogy a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*

$$g(x)=\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) , & x\neq 0 \\ c\,, & x=0 \end{cases}$$

függvénynek pontosan akkor létezik primitív függvénye ha

$$c=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx,$$

ahol T az f egy periódusa!

1.1.2. Feladat. *Határozd meg az $a\in\mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,*

$$f(x)=\begin{cases} \left|\sin\frac{1}{x}\right| , & x\neq 0 \\ a\,, & x=0 \end{cases}$$

függvénynek létezzen primitív függvénye!

1.1.3. Feladat. *Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deriválható függvény teljesíti a*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

egyenlőségeket. Bizonyítsd be, hogy a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases} f'\left(\frac{1}{x}\right) , & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

függvénynek létezik primitív függvénye!

1.1.4. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy egy alulról (vagy felülről) korlátos és primitívvel rendelkező függvény és egy folytonos függvény szorzatának létezik primitív függvénye!*

1.1.5. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy ha az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ függvénynek létezik primitív függvénye és a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor az fg függvénynek is létezik primitív függvénye!*

1.1.6. Feladat. *Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvényre*

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{1}{y}\int_0^y f(x)dx=M(f)$$

Bizonyítsd be, hogy a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) , & ha\ x\neq 0 \\ M(f)\,, & ha\ x=0 \end{cases}$$

függvénynek létezik primitív függvénye!

1.1.7. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy ha az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény minden primitívje korlátos $\mathbb{R}$-en, akkor a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,*

$$g(x)=\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) , & ha\ x\neq 0 \\ 0, & ha\ x=0 \end{cases}$$

függvénynek is létezik primitívje!