1.1. Alapfeladatok

1.1.1. Feladat. *Ha ψ konstans, akkor az*

$$x(t) \leq \psi + \int_a^t \chi(s)x(s)ds \tag{1.1}$$

egyenlőtlenségből következik, hogy $\forall\, t \in [a,b]$ esetén

$$x(t) \leq \psi e^{\displaystyle\int_a^t \chi(u)du} \tag{1.2}$$

1.1.2. Feladat. *Ha x,ψ és χ $[a,b]$-n értelmezett folytonos függvények, $\chi(t) \geq 0$, $\forall t \in [a,b]$ és*

$$x(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)x(s)ds, \quad \forall\, t \in [a,b], \tag{1.3}$$

akkor

$$x(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\psi(s)e^{\displaystyle\int_s^t \chi(u)duds} \tag{1.4}$$

1.1.3. Feladat. *Ha $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor az (1.3)-ból következik, hogy*

$$x(t) \leq e^{\psi(a)\left(\displaystyle\int_a^t \chi(u)du\right)} + \int_a^t e^{\displaystyle\int_a^t \chi(u)du} \psi'(s)ds, \forall t \in [a,b] \tag{1.5}$$

1.1.4. Feladat. *(Bihari lemma) Legyen $x : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ egy folytonos függvény, amely teljesíti a következő egyenlőtlenséget:*

$$x(t) \leq M + \int_a^t \psi(s)\omega(x(s))ds, t \in [a,b], \tag{1.6}$$

ahol $M \geq 0, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ folytonos valamint $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ folytonos és szigorúan monoton.

Ekkor érvényes az

$$x(t) \leq \phi^{-1}\left(\phi(M) + \int_a^t \psi(s)x(s)ds\right), t \in [a,b] \tag{1.7}$$

egyenlőtlenség, ahol $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ függvény a következő összefüggéssel adott:

$$\phi(u) := \int_a^u \frac{ds}{\omega(s)}, u \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

1.1.5. Feladat. *Ha $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, amely teljesíti a következő összefüggést:*

$$\frac{1}{2}x^2(t) \leq \frac{1}{2}x_0^2 + \int_a^t \psi(s)x(s)ds, t \in [a,b], \tag{1.9}$$

ahol $x_0 \in \mathbb{R}$ *és* ψ *nemnegatív folytonos függvény az* $[a, b]$ *intervallumon, akkor a*

$$|x(t)| \leq |x_0| + \int_a^t \psi(s)ds, t \in [a, b] \tag{1.10}$$

egyenlőtlenség is érvényes.

1.1.6. Feladat. *(A. Filatov)Ha* $x : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ *egy folytonos, nemnegatív függvény úgy, hogy:*

$$x(t) \leq a + \int_{t_0}^t [b + cx(s)]ds, \quad t \geq t_0,$$

ahol $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c > 0$*, akkor,* $t \geq t_0$*-ra* x *teljesíti a következő összefüggést:*

$$x(t) \leq \left(\frac{b}{c}\right)(e^{c(t-t_0)} - 1) + ae^c(t - t_0).$$

1.1.7. Feladat. *(K.V. Zadiraka) Ha az* x *függvény egy olyan függvény, amely teljesíti a következő feltételt:*

$$x(t) \leq x(\tau) + \int_\tau^t a(s)x(s)ds,$$

bármely t *és* τ*-ra az* (a, b)*-ből, ahol* $a(t) \geq 0$ *és folytonos, akkor*

$$x(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} \leq x(t) \leq x(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$$

bármely $t \geq t_0$*.*

1.1.8. Feladat. *(G.I. Candirov) Ha* x *a* $[0, h]$ *intervalumon folytonos és nemnegatív függvény, amely teljesíti a következő összefüggést:*

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t [a_1(s)x(s) + b(s)]ds,$$

ahol $a_1(t)$ *és* $b(t)$ *nemnegatív integrálható függvények a* $[0, h]$ *intervallumon, akkor:*

$$x(t) \leq \int_0^t b(s)ds + \sup_{0 \leq t \leq h} |a(t)| e^{\int_0^t a_1(s)ds}$$

1.1.9. Feladat. x *a* $[0, \infty)$ *intervallumon nemnegatív, folytonos függvény úgy, hogy:*

$$x(t) \leq ct^\alpha + mt^\beta \int_0^t \frac{x(s)}{s} ds,$$

ahol $c > 0,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$*. Ekkor*

$$x(t) \leq ct^\alpha \left(1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{m^n n^{n\beta}}{\alpha(\alpha + \beta) + ... + (\alpha + (n-1)\beta)}\right)$$

1.1.10. Feladat. *(Willett) Az x és k folytonos, a és b Riemann integrálható függvények a $J = [\alpha, \beta]$ intervallumon, ahol b és k nemnegatívak. (i) Ha*

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_\alpha^t k(s)x(s)ds, \quad t \in J \tag{1.11}$$

Ekkor

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_\alpha^t a(s)k(s)e^{\int_s^t b(r)k(r)dr} ds, \quad t \in J \tag{1.12}$$

(ii) Az összefüggés fennáll akkor is, ha $\leq$-t $\geq$-vel helyettesítjük (iii) Az (i) és (ii) érvényes marad akkor is, ha $\int_\alpha^t$-t $\int_t^\beta$-vel és $\int_s^t$-t $\int_t^s$-vel helyettesíjük.

1.2. Versenyfeladatok

1.2.1. Feladat. *(Gamidov)*

$$x(t) \leq a(t) + a_1(t) \int_{t_1}^t b_1(s)x(s)ds + a_2(t) \sum_{i=2}^n c_i \int_{t_1}^{t_i} b_i(s)x(s)ds,$$

$t \in [a, b]$, ahol $a = t_0 < \ldots < t_n = b$, c_i konstans és a megjelenő függvények valós, folytonos, nemnegatív fügvények. Ha

$$\sum_{i=2}^n c_i \int_{t_1}^{t_i} b_i(t) \left[a_2(t) + a_1(t) \int_{t_1}^t b_1(s)a_2(s) \left(\int_{t_1}^t a_1(r)b_1(r)dr \right) ds \right] dt < 1,$$

ekkor

$$x(t) \leq K_1(t) + MK_2(t),$$

ahol

$$K_1(t) = a(t) + a_1(t) \int_{t_1}^t b_i(s)a(s)e^{\int_s^t a_1(r)b_1(r)dr} ds$$

$$K_2(t) = a_2(t) + a_1(t) \int_{t_1}^t b_1(s)a_2(s)e^{\int_s^t a_1(r)b_1(r)dr} ds$$

és

$$M = \left(\sum_{i=2}^n c_i \int_{t_1}^{t_i} b_i(s)K_1(s)ds \right) \left(1 - \sum_{i=2}^n c_i \int_{t_1}^{t_i} b_i(s)K_2(s)ds \right)^{-1}.$$

1.2.2. Feladat. *(H.Movljankulov és A. Filatov) x(t) egy valós, folytonos, nemnegatív függvény, úgy, hogy: $t > t_0$-ra*

$$x(t) \leq c + \int_{t_0}^t k(t, s)x(s)ds, \quad c > 0,$$

ahol k(t,s) t-ben folytonosan differenciálható, s-ben pedig folytonos függvény, $k(t,s) \geq 0, \;\; t \geq s \geq t_0$*.Ekkor*

$$x(t) \leq c\, e^{\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left(k(s,s)+\int_{t_0}^{s}\frac{\partial k}{\partial s}(s,r)dr\right)ds}.$$

1.2.3. Feladat. *Ha x(t) valós, folytonos, nemnegatív függvény a [c,d] intervallumon úgy, hogy:*

$$x(t) \leq a(t) + b(t)\int_{e}^{t} k(t,s)x(s)ds,$$

ahol $a(t) \geq 0, \;\; b(t) \geq 0, \;\; k(t,s) \geq 0$ *és folytonos függvények, bármely* $c \leq s \leq t \leq d$*, akkor*

$$x(t) \leq A(t)e^{B(t)\displaystyle\int_{c}^{t} K(t's)ds}$$

ahol $A(t) = \sup\limits_{c\leq s\leq t} a(s), \;\; B(t) = \sup\limits_{c\leq s\leq t} b(s), \;\; K(t,s) = \sup\limits_{s\leq\sigma\leq t} k(\sigma,s).$

1.2.4. Feladat. *(S. Chu és F. Metcalf) x és a a* $J = [\alpha, \beta]$ *intervallumon valós folytonos függvények és k folytonos, nemnegatív függv'eny a* $T : \alpha \leq s \leq t \leq \beta$*-n.Ha*

$$x(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^{t} k(t,s)x(s)ds, \;\; t \in J, \tag{1.13}$$

akkor

$$x(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^{t} R(t,s)a(s)ds, \;\; t \in J, \tag{1.14}$$

ahol $R(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} K_i(t,s),$ *ahol* $(t,s) \in T$

1.2.5. Feladat. *(Perov) Ha* $u(t)$ *nemnegatív függvény, amely teljesíti a következő integrálegyenlőtlen-*
-séget:

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t}(a(s)u(s) + b(s)u^{\alpha}(s))ds, \;\; c \geq 0, \;\; \alpha \geq 0, \tag{1.15}$$

ahol a(t) és b(t) folytonos, nemnegatív függvények $t \geq t_0$*-ra és ha* $0 \leq \alpha < 1$*, akkor*

$$u(t) \leq \left\{ c^{1-\alpha}e^{(1-\alpha)\displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + (1-\alpha)\int_{t_0}^{t} b(s)e^{(1-\alpha)\displaystyle\int_{s}^{t} a(r)dr} ds \right\}^{\dfrac{1}{1-\alpha}}; \tag{1.16}$$

$\alpha = 1$*-re:*

$$u(t) \leq c\, e^{\displaystyle\int_{t_0}^{t}[a(s)+b(s)]ds}; \tag{1.17}$$

és $\alpha > 1$*-re:*

$$c < \left\{ e^{(1-\alpha)\int_{t_0}^{t_0+h} a(s)ds} \right\}^{\frac{1}{\alpha-1}} + \left\{ (\alpha-1)\int_{t_0}^{t_0+h} b(s)ds \right\}^{-\frac{1}{\alpha-1}} \text{ esetén} \tag{1.18}$$

$t_0 \leq t \leq t_0 + h, \quad h > 0$*-ra kapjuk, hogy:*

$$u(t) \leq c \left\{ e^{(1-\alpha)\int_{t_0}^{t} a(s)ds} - c^{-1}(\alpha-1)\int_{t_0}^{t} b(s)e\left[(1-\alpha)\int_s^t a(r)dr\right] ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}; \tag{1.19}$$

1.2.6. Feladat. *(Gamidov) Ha*

$$u(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \Phi(s)u^\alpha(s)ds + c_3 \int_0^h \xi(s)u^\alpha(s)ds,$$

$c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, c_3 > 0$ *és az u(t) és* $\Phi(t)$ *függvények folytonos és nemnegatív függvények a [0,h] intervallumon. Ekkor* $0 < \alpha < 1$*-re kapjuk a következőket:*

$$u(t) \leq \left(\xi_0^{1-\alpha} + c_2(1-\alpha)\int_0^t \Phi(s)ds \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

ahol ξ_0 *a*

$$\left[\frac{c_2+c_3}{c_3} \cdot \xi + \frac{c_1 c_2}{c_3} \right]^{(1-\alpha)} - \xi^{1-\alpha} + c_2(1-\alpha)\int_0^h \Phi(s)ds = 0$$

egyenlet egyetlen megoldása.

Ha $\alpha > 1$ *és* $c_2(\alpha-1)\int_0^t \Phi(s)ds < c_1^{1-\alpha}$*, akkor létezik egy olyan* $[0,\delta] \subset [0,h]$ *intervallum, ahol*

$$u(t) \leq \left(c_1^{1-\alpha} - c_2(\alpha-1)\int_0^t \Phi(s)ds \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

1.2.7. Feladat. *(B. Sachurska) Legyenek x,a,b és k a* $J = [\alpha, \beta]$ *intervallumon folytonos, nemnegatív függvények és n egy pozitív valós szám* $(n \geq 2)$*. Ha*

$$x(t) \leq a(t) + b(t)\int_\alpha^t k(s)x^n(s)ds, \quad t \in J \tag{1.20}$$

akkor

$$x(t) \leq a(t)\left\{ 1 - (n-1)\int_\alpha^t k(s)b(s)a^(n-1)(s)ds \right\}^{\frac{1}{1-n}}, \quad \alpha \leq t \leq \beta_n \tag{1.21}$$

ahol

$$\beta_n = sup\left\{ t \in J : (n-1)\int_\alpha^t kba^{n-1}ds < 1 \right\}.$$

1.2.8. Feladat. *(Sz. András) Ha az* $(a_k)_{k\geq 1}$ *és a* $(b_k)_{k\geq 1}$ *sorozatok tagjai pozitív számok és teljesítik az*

$$a_n \leq \alpha + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} b_j a_j + \frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{n-1} b_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k}^{n-1} b_j b_k a_k,$$

egyenlőtlenséget, akkor az

$$a_n \leq \alpha \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + b_k + \frac{b_k^2}{2}\right).$$