1.1. Alapfeladatok

1.1.1. Feladat. *Van két egyforma folyadékmennyiséget tartalmazó poharunk, az egyikben víz van, a másikban bor. Egy kanál bort áttöltünk a vízbe, összekeverjük, majd egy kanálnyi keveréket visszatöltünk a borba. A vízben van több bor, vagy a borban van több víz? Válaszodat indokold legalább két különböző módon, próbálkozz általánosításokkal!*

1.1.2. Feladat. *Határozd meg az* $x_{n+2} = \frac{x_{n+1}+x_n}{2}$, $n \geq 0$ *sorozat általános tagját és határértékét* x_0 *és* x_1 *függvényében.*

1.1.3. Feladat. *Igazold, hogy ha az* $(x_n)_{n\geq 0}$ *pozitív tagú sorozat teljesíti az*

$$x_{n+2} \leq \frac{x_{n+1}+x_n}{2}, \quad n \geq 0$$

rekurziót, akkor konvergens. Adjál felső korlátot a határértékére!

1.1.4. Feladat. *Igazold, hogy ha az* $(x_n)_{n\geq 0}$ *sorozatra az* $y_n = x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n$, $n \geq 0$ *sorozat konvergens, akkor az* $(x_n)_{n\geq 0}$ *sorozat is konvergens.*

1.2. Versenyfeladatok

1.2.1. Feladat. *Igazold, hogy ha az* $(x_n)_{n\geq 0}$ *pozitív tagú sorozat teljesíti az*

$$x_{n+2} \leq \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_0 x_n, \quad n \geq 0$$

rekurziót és $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$ *valamint* $\alpha_0, \alpha_1 > 0$, *akkor a sorozat konvergens. Adjál felső korlátot a határértékére!*

1.2.2. Feladat. *Igazold, hogy ha az* $(x_n)_{n\geq 0}$ *pozitív tagú sorozat teljesíti az*

$$x_{n+p} \leq \alpha_{p-1}x_{n+p-1} + \alpha_{p-2}x_{n+p-2} + \ldots \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_0 x_n, \quad n \geq 0$$

rekurziót és $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i = 1$, *valamint* $\alpha_i > 0$, $0 \leq i \leq p-1$, *akkor az* $(x_n)_{n\geq 0}$ *sorozat konvergens. Adjál felső korlátot a határértékére!*

1.2.3. Feladat. *Igazold, hogy ha az* $(x_n)_{n\geq 0}$ *sorozatra az*

$$y_n = x_{n+p-1} + \beta_1 x_{n+p-2} + \beta_2 x_{n+p-3} + \ldots + \beta_{p-1}x_n, \quad n \geq 0$$

sorozat konvergens és a

$$P(t) = t^{p-1} + \beta_1 t^{p-2} + \beta_2 t^{p-3} + \ldots + \beta_{p-2}t + \beta_{p-1},$$

polinom minden gyöke az egységsugarú, origóközéppontú kör belsejében van, akkor az $(x_n)_{n\geq 0}$ *sorozat is konvergens.*

1.2.4. Feladat. *Igazold, hogy ha*

$$1 > \beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_{p-1} > 0,$$

akkor a

$$P(t) = t^{p-1} + \beta_1 t^{p-2} + \beta_2 t^{p-3} + \ldots + \beta_{p-2}t + \beta_{p-1}$$

polinom minden gyöke az egységsugarú, origó középponttú kör belsejében van.