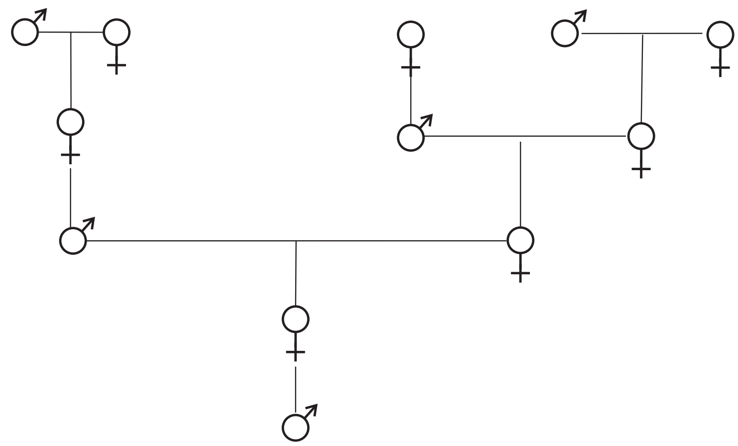
1.1. Alapfeladatok

1.1.1. Megoldás. *Jelöljük F_n-el az n-ed rendű nagyapák számát. Az ábra alapján látható, hogy $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ és általában $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (mert a jobboldali ág egy szinttel lennebb van, mint a baloldali).*



1.1. ábra. A méhek családfája

Hasonló módon, ha az n-ed rendű nagyanyák számát N_n-el jelöljük, akkor $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ és $N_{n+2} = N_{n+1} + N_n$, tehát $N_n = F_{n+1}$. A reprezentáció alapján látható, hogy

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

1.1.2. Megoldás. *Legyen a természetes számok halmazán n egy tízes számrendszerbeli szám. Ha számjegyei között az összes számjegy szerepelhet, akkor 2009 a a 2010. helyen található szám.*

Keressük a 6-ost és 7-est nem tartalmazó számok közül a 2010.-et. A feltételnek megfelelő számokban cseréljük ki a 8-as számjegyeket 6-osokra, a 9-eseket 7-esekre. A továbbiakban így a 2010., 8-as számrendszerbeli számot keressük.

A tízes számrendszerbeli 2010. számot (a 2009 -t) átalakítjuk 8-as számrendszerbe. Az így kapott szám a 3731. A kapott szám a 2010., 8-as számrendszerbeli szám lesz. Ha a szám tartalmaz 6-os, 7-es sz ámjegyet, akkor azt kicseréljuk 8-as, illetve 9-esre.

Az így kapott eredmény a 3931.

1.1.3. Megoldás. *Az 1 és 5 azonos paritású számok és adott paritású csúcsról csak ellentétesre léphetünk, ezért páratlanról páratlanra csak páros számú lépésben juthatunk el. Tehát $a_{2n-1} = 0$.*
Jelölje a_n az A_1-ből A_5-be tartó n ugrást tartalmazó útvonalak számát és b_n az A_3-ből A_5-be tartó n ugrást tartalmazó útvonalak számát, mely egyenlő az A_7-ből A_5-be tartó útvonalak számával. Jelöléseink alapján $a_{2n} = 2a_{2n-2} + 2b_{2n-2}$, mert A_1ről indulhatunk A_3 illetve A_7 felé, vagy visszatérhetünk A_1-be. Hasonlóan $b_{2n} = 2b_{2n-2} + a_{2n-2}$, tehát

$$\begin{cases} a_{2n} = 2a_{2n-2} + 2b_{2n-2} \\ b_{2n} = 2b_{2n-2} + a_{2n-2} \end{cases} \quad \forall n \geq 2,$$

ahol $b_2 = 1$, $a_2 = 0$. *Az* $a_{2n} = x_n$ *és* $b_{2n} = y_n$ *jelölésekkel*

$$\begin{cases} x_n = & 2x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = & x_{n-1} + 2y_{n-1} \end{cases}$$

Az első egyenletből: $y_{n-1} = \frac{1}{2}(x_n - 2x_{n-1})$ *és* $y_n = \frac{1}{2}(x_{n+1} - 2x_n)$, *tehát behelyetesítve a másodikba az*

$$\frac{1}{2}(x_{n+1} - 2x_n) = 2\frac{1}{2}(x_n - 2x_{n-1} + x_{n-1})$$

azaz

$$x_{n+1} - 2x_n + 2x_{n-1} = 0, \quad x_1 = 0, x_2 = 2$$

rekurziót kapjuk. A karakterisztikus egyenlet $r^2 - 4r + 2 = 0$, *amelynek a gyökei* $r_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$, *tehát*

$$x_n = c_1(2+\sqrt{2})^n + c_2(2-\sqrt{2})^n.$$

Az $x_1 = 0$ *és* $x_2 = 2$ *feltételek alapján a konstansokra a*

$$c_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$c_2 = -\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

értékhez jutunk, tehát

$$x_n = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})^n - \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})^n$$

és így $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}]$.

1.1.4. Megoldás. *A rekurzió alapján a sorozat szigorúan növekvő és*

$$x_{n+2}^2 - 6x_n x_{n+2} + x_n^2 - 8x_{n+1}^2 = 0, \forall n \geq 0.$$

Ezt tekinthetjük másodfokú egyenletnek x_n*-ben is, tehát*

$$x_n = 3x_{n+2} \pm \sqrt{8\left(x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2\right)}, \forall n \geq 0.$$

Mivel a sorozat növekvő az előbbi egyenlőségben a gyök előtt nem lehet $+$ *előjel, vagyis*

$$x_n = 3x_{n+2} - \sqrt{8\left(x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2\right)}, \forall n \geq 0.$$

Ugyanakkor

$$x_{n+3} = 3x_{n+1} + \sqrt{8\left(x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2\right)}, \forall n \geq 0,$$

tehát

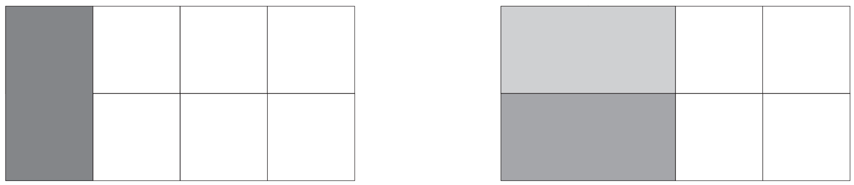
$$x_{n+3} + x_n = 3x_{n+1} + 3x_{n+2}, \ \forall n \geq 0,$$

és így a sorozat minden tagja természetes szám.

1.1.5. Megoldás. *Jelölje x_n a $2 \times n$-es tábla különböző lefödéseinek számát. A bal alsó sarkat kétféle módon fedhetjük le. Vagy levágunk egy 2×1-es részt (ebben az esetben a maradékot x_{n-1} különböző módon fedhetjük le - lásd a 1.2 első ábráját) vagy egy 1×2-es darabot fedünk le a sarokban. A második esetben a bal felső sarok csak egyféleképpen fedhető le és ezért egy $2 \times (n-2)$-es tábla marad (lásd a 1.2 ábrát). Ez alapján írhatjuk, hogy*

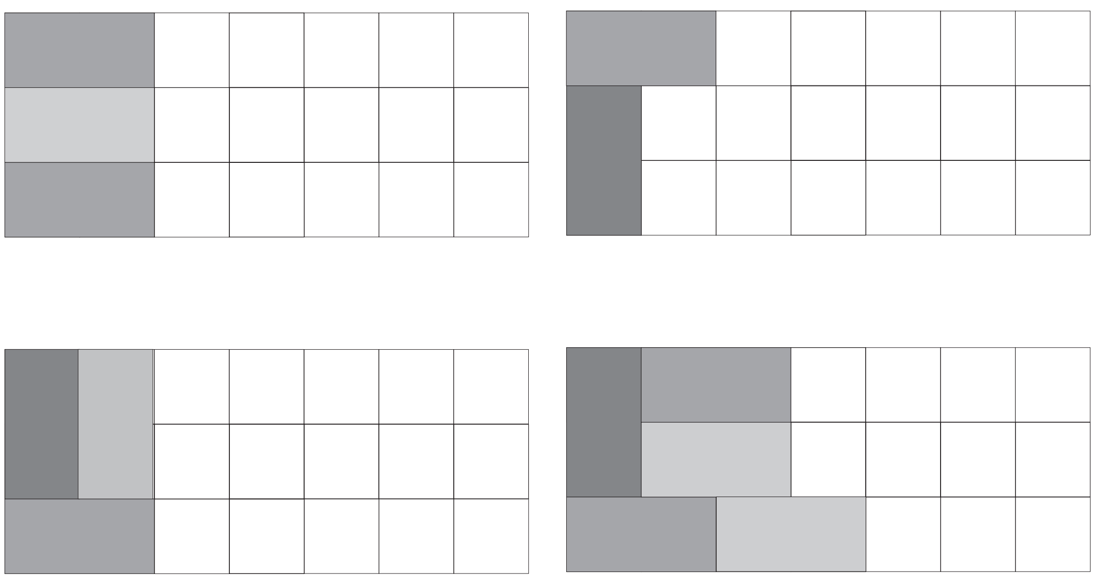
$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \geq 1.$$

Mivel $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$ állíthatjuk, hogy $x_n = F_n$, ahol F_n az n-edik Fibonacci szám ($F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + Fn$).



1.2. ábra. $2 \times n$-es tábla lefedése dominókkal

1.1.6. Megoldás. *Egy kis próbálkozás után rájöhetünk, hogy nem elégséges a $3 \times 2n$-es tábla lefödéseit vizsgálni, hanem azt is meg kell számlálnunk, hogy hány lefödése lehetséges egy olyan táblának, amit a $3 \times (2n-1)$-es táblából kapunk az egyik sarokmező eltávolításával.*



1.3. ábra. $3 \times n$-es tábla lefedése dominókkal

Ha x_n jelöli a $3 \times 2n$-es és y_n a csonka $3 \times (2n-1)$-es tábla lefödéseinek számát, akkor az 1.3 ábra alapján

$$x_n = 2x_{n-1} + y_n + y_{n-1}$$

és az 1.4 ábra alapján

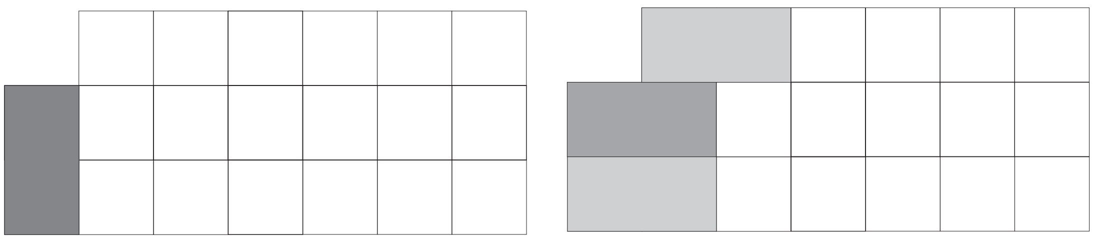
$$y_n = x_{n-1} + y_{n-1}.$$

Az előbbi két rekurzióból következik, hogy

$$x_n - 4x_{n-1} + x_{n-2} = 0$$

és így az $x_1 = 3$, $x_2 = 11$ *feltételek alapján*

$$x_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n.$$



1.4. ábra. $3 \times n$-es hiányos tábla lefedése dominókkal

1.2. Versenyfeladatok

1.2.1. Megoldás. *Tekitsük a* P *Pascal háromszöget. Az* n*-edik sor* k*-adik eleme pontosan* $P_n^k = C_n^k$, *ahol* $0 \le k \le n$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & \boldsymbol{2} & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \boldsymbol{3} & & \boldsymbol{3} & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \boldsymbol{4} & & \boldsymbol{6} & & \boldsymbol{4} & & 1 & & \\
 & 1 & & \boldsymbol{5} & & \boldsymbol{10} & & \boldsymbol{10} & & \boldsymbol{5} & & 1 & \\
1 & & \boldsymbol{6} & & \boldsymbol{15} & & \boldsymbol{20} & & \boldsymbol{15} & & \boldsymbol{6} & & 1
\end{array}$$

Szerkesszünk egy egy újabb B *háromszöget, melynek az elemei pontosan a fenti háromszög középső, megjelölt, elemeinek felelnek meg (levágjuk az oldalakon lévő* 1*-eseket). Ennek a háromszögenek az* n*-edik sorának a* k*-adik eleme pontosan*

$$B_n^k = C_{n+2}^{k+1},\ \forall n \ge 0,\ 0 \le k \le n,$$

mert az eredeti Pascal háromszöghöz képest mindig két sorral lennébb és egy oszloppal bennébb lépünk.

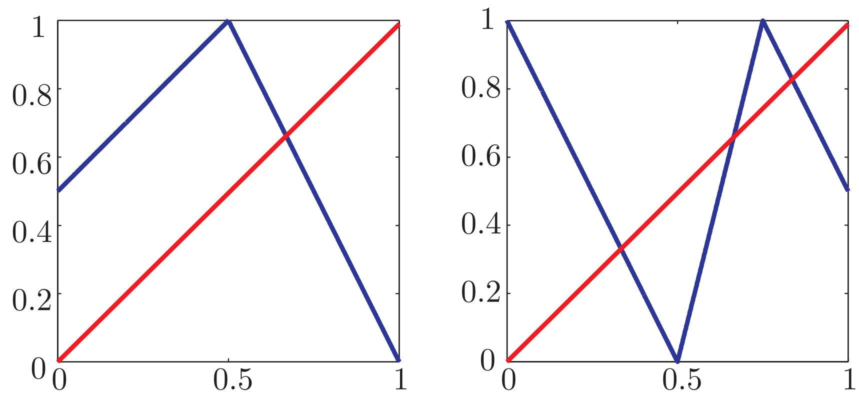
A feladat megoldása során figyelembe vesszük, hogy a keresett háromszöget csak az oldalakon lévő elemek határozzák meg, mert a képzési szabály pontosan megadja a többi elem értékét. Ha vizsgáljuk a B *háromszög és a* P *háromszög különbségéből származó újabb háromszöget, akkor észrevehetjük, hogy az oldalakon pontosan ugyanazok az elemek jelennek meg mint a keresett* A *háromszögünk oldalán. Mivel a képzési szabály azonos, ezért ez azt jelenti, hogy pontosan az* A *háromszöget kapjuk eredményül. Másszóval* $A = B - P$, *amiből, következik, hogy* $A_n^k = B_n^k - P_n^k$, *vagyis*

$$A_n^k = C_{n+2}^{k+1} - C_n^k,\ \forall n \ge 0, 0 \le k \le n.$$

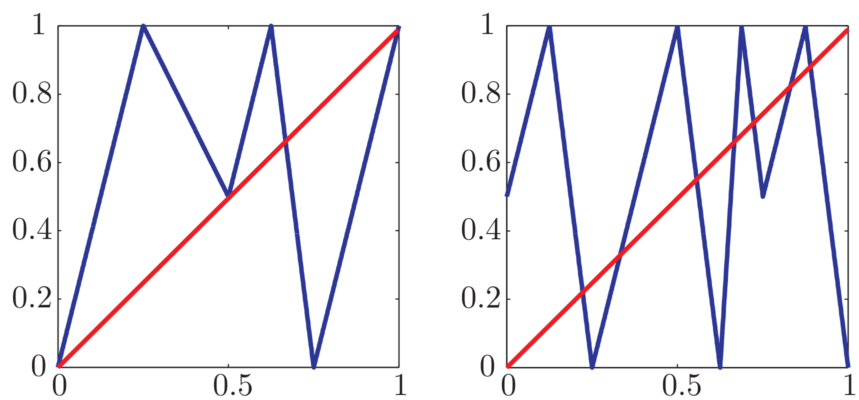
1.2.2. Megoldás. *Előbb ábrázoljuk az első néhány iteráltat. A grafikus képek alapján a fixpontok számára a következőket kapjuk:* $|F_f| = 1$, $|F_{f^2}| = 3$, $|F_{f^3}| = 4$, $|F_{f^4}| = 7$. *Ez alapján az sejthető, hogy az* $(|F_{f^n}|)_{n\geq 1}$ *sorozatban minden tag az előtte álló kettő összege. Igazoljuk ezt a tulajdonságot. Az*

$$f^{n+1}(x) = f^n(f(x)) = \begin{cases} f^n\left(x+\frac{1}{2}\right), & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f^n(2-2x), & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

egyenlőség alapján az f^{n+1} *függvénynek a* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ *intervallumhoz tartozó grafikus képe ugyanaz, mint az* f^n*-nek az* $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$*-hez tartozó grafikus képe az* Ox *irányban a felére kicsinyítve, és az* f^{n+1}*-nek az* $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$*-hez tartozó grafikus képe az* f^n*-nek a* $[0,1]$*-hez tartozó grafikus képéből kapható meg egy tükrözéssel és egy* Ox *menti* $\frac{1}{2}$ *arányú kicsinyítéssel. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az* f^{n+1} *grafikus képe megkapható az* f^{n-1} *és az* f^n *grafikus képéből, ha mindkettőt tükrözzük, egymás mellé illesztjük, és az* Ox *irányban a felére csökkentjük (*f^{n-1} *grafikus képéből kapjuk az* f^n *grafikus képének az* $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$*-hez tartozó részét, és ez éppen az* f^{n+1} *grafikus képében a* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$*-hez tartozó rész).*



1.5. ábra. Az aszimmetrikus sátorfüggvény és 2. iteráltja



1.6. ábra. Az aszimmetrikus sátorfüggvény 3. és 4. iteráltja

Ugyanakkor a grafikus képek csak két típusú szakaszt tartalmaznak: olyanokat, amelyek 0 *és* 1 *ordinátájú pontokat kötnek össze (nevezzük ezeket* H *típusúaknak) és olyanokat, amelyek* $\frac{1}{2}$ *és* 1 *ordinátájú pontokat kötnek össze (ezeket nevezzük* R *típusúaknak). Az* *első szögfelező a grafikus kép minden H típusú szakaszát elmetszi, de az R típusúak közül csak azokat, amelyek az $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ intervallumhoz tartoznak. Így érdemes bevezetni a következő sorozatokat:*

- a_n *az* f^n *grafikus képében a* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$*-hez tartozó* H *típusú szakaszok száma;*
- b_n *az* f^n *grafikus képében a* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$*-hez tartozó* R *típusú szakaszok száma;*
- c_n *az* f^n *grafikus képében a* $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *intervallumhoz tartozó* H *típusú szakaszok száma;*
- d_n *az* f^n *grafikus képében a* $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *intervallumhoz tartozó* R *típusú szakaszok száma.*

Az előbbi észrevételek alapján felírhatjuk a következő rekurziókat:

$$a_{n+1} = c_n = a_{n-1} + c_{n-1} \tag{1.1}$$
$$b_{n+1} = d_n = b_{n-1} + d_{n-1} \tag{1.2}$$
$$c_{n+1} = a_n + c_n \tag{1.3}$$
$$d_{n+1} = b_n + d_n \tag{1.4}$$

A fixpontok száma viszont $|F_{f^n}| = a_n + c_n + d_n$*, tehát*

$$|F_{f^{n+1}}| = a_{n+1} + c_{n+1} + d_{n+1} = a_{n-1} + c_{n-1} + a_n + c_n + b_n + d_n =$$
$$= (a_n + c_n + d_n) + (a_{n-1} + c_{n-1} + b_n) = |F_{f^n}| + |F_{f^{n-1}}|,$$

vagyis a fixpontok számára észlelt rekurzió valóban érvényes. Az $L_0 = 2$*,* $L_1 = 1$ *és* $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ *összefüggéseket teljesítő sorozatot Lucas-sorozatnak nevezzük. Gyakorlatilag azt igazoltuk, hogy* $|F_{f^n}| = L_n$*,* $\forall n \geq 1$*. Ebből azonnal következik, hogy*

$$|F_{f^n}| = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

1.2.3. Megoldás. *Az 1.1.4 feladat megoldásához hasonlóan járunk el. Egy kis számolással beláthatjuk, hogy a sorozat minden tagja nagyobb mint* $\frac{1}{3}$ *és a sorozat szigorúan csökkenő. A számolások egyszerűsítésének céljából a* $b_n = 4a_n$ *sorozattal dolgozunk. A rekurzió alapján*

$$b_n^2 - 4b_n(2b_n + 1) + 8b_{n+1}(2b_{n+1} - 1) = 0,$$

tehát b_n*-re megoldva*

$$b_n = 4b_{n+1} + 2 \pm 2\sqrt{6b_{n+1} + 1}.$$

Mivel $b_n \leq 4$ *az előbbi egyenlőségben minden* $n \geq 1$ *esetén a negatív előjelt kell választanunk és így az eredeti rekurziót* $n+1$*-re felírva következik, hogy*

$$8b_{n+2} - 6b_{n+1} + b_n = 4, \quad n \geq 1.$$

Ez alapján

$$b_n = \frac{4}{3} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

és így

$$a_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

1.2.4. Megoldás. *A* $2\cos(x)\cos(nx) = \cos(n+1)x + \cos(n-1)x$ *trigonometriai összefüggés alapján a* P_n *polinomokra teljesül a*

$$P_{n+1}(y) = 2yP_n(y) - P_{n-1}(y) \quad \forall y \in [-1, 1]$$

rekurzió. Ez csak akkor lehetséges, ha az előbbi egyenlőség minden $y \in \mathbb{R}$ *esetén teljesül. Így*

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$P_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad P_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Az együtthatók abszolút értékéből elkészíthetjük a következő táblázatot:

x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	n
						1	$n=0$
					1	0	$n=1$
				2	0	1	$n=2$
			4	0	3	0	$n=3$
		8	0	8	0	1	$n=4$
	16	0	20	0	5	0	$n=5$
32	0	48	0	18	0	1	$n=6$

Ennek a táblázatnak a generálása a következő séma szerint is lehetséges:

a	0
0	b
$a+2b$	0

Ez belátható a rekurzió alapján. Így viszont ha S_n *a* P_n *együtthatóinak abszolút értékéből képezett összeg, akkor teljesül az*

$$S_{n+2} = 2S_{n+1} + S_n, \quad n \geq 0$$

rekurzió is, tehát

$$S_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right), \quad n \geq 0.$$

1.2.5. Megoldás. *Ha az alsó sor* n *korongból áll és a következő sor* j *korongból, akkor a az alsó két sor egymáshoz viszonyítva* $n-j$ *különböző pozicióban lehet* $j \neq 0$ *esetén. Ennek következtében felírhatjuk a*

$$K_n = K_{n-1} + 2K_{n-2} + 3K_{n-3} + \ldots + (n-1)K_1 + 1 = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} jK_{n-j}$$

rekurziót. Ez azt mutatja, hogy az $f(x) = \sum_{n\geq 0} nx^n$ *és* $g(x) = \sum_{n\geq 0} K_n x^n$ *generátorfüggvényekre teljesül az*

$$f(x)g(x) + \frac{x}{1-x} = f(x)$$

egyenlőség. Mivel $g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$*, írhatjuk, hogy*

$$f(x) = \frac{x - x^2}{1 - 3x + x^2}.$$

Ebből következik, hogy $K_n = F_{2n-1}, \quad n \geq 1.$