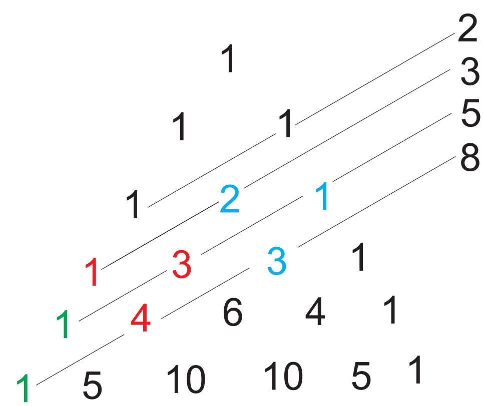
1.1. Alapfeladatok

1.1.1. Megoldás. *A kombináció értelmezése alapján felírhatjuk, hogy*

$$k \geq n-k, \quad k \geq \frac{n}{2}$$

Ha n páros, akkor k $\frac{n}{2}$ *és n között veszi fel értékeit. Ha n páratlan, akkor* $k \neq \frac{n}{2}$, *vagyis* $k > \frac{n}{2}$, *ami azt jelenti, hogy k* $\frac{n+1}{2}$ *és n között veszi fel értékeit. Vagyis*

$$S_n := \sum_{k\geq 0} C_k^{n-k} = \sum_{k=[\frac{n+1}{2}]}^{n} C_k^{n-k}.$$



1.1. ábra. Pascal háromszög

Vizsgáljuk meg ezeket az összegeket az 1.1 ábrán, vagyis a Pascal háromszögben. Tudjuk, hogy a második sorban talalható elemek felírhatóak kombinációkként: $C_1^0 = 1$ $C_1^1 = 1$; *a harmadik sor elemei pedig:* $C_2^0 = 1$ $C_2^1 = 2$ $C_2^2 = 1$. *Vagyis az* S_n *összeget úgy kaphatjuk, hogy az* $[\frac{n+1}{2}]$*-edik sor első elemétől indulva mindeg egy sorral fennebb és egyet jobbra lépve összeadom a háromszög elemeit (ahogyan ezt az (1.1)-es ábrán bejelölt vonalak mutatják). Az első pár összeg szintén az (1.1)-es ábrán látható. Vegyük észre, hogy ezek épp a Fibonacci számok. Ez indukcióval bizonyítható.*

$$S_1 = 1 = F_1$$

$$S_2 = C_1^1 + C_2^0 = 2 = F_2$$

Az ábra azt is mutatja, hogy egy ilyen egyenes menti számok összegét mindig a két fölötte levő egyenes menti számok adják, vagyis $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. *Az* $(S_n)_{n\geq 1}$ *sorozat és a Fibonacci sorozat első elemei megegyeznek és mindkét sorozatot ugyanazzal a rekurziós képlettel képezzük, tehát a két sorozat megegyezik.*

1.1.1. Megjegyzés. *Az $(S_n)_{n\geq 0}$ sorozathoz rendeljük hozzá a $F(x) = \sum\limits_{n\geq 0} S_n x^n$ generátorfüggvényt.*

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n\geq 0} S_n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} C_k^{n-k} x^n \\ &= \sum_{k\geq 0}\sum_{n=k}^{2k} C_k^{n-k} x^n \\ &= \sum_{k\geq 0} x^k \sum_{n=k}^{2k} C_k^{n-k} x^{n-k} \\ &= \sum_{k\geq 0} (x(x+1))^k \\ &= \frac{1}{1-x-x^2} \end{aligned}$$

Tehát az S_n meghatározása visszavezetődik az F függvény sorbafejtésének kiszámolására. Ennek érdekében felírhatjuk, hogy

$$F(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}\left[\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right] = \frac{1}{x_1 - x_2}\left[\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} - \frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right],$$

ahol x_1 és x_2 az $1 - x - x^2 = 0$ egyenlet gyökei, vagyis $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Ugyanakkor az $\frac{1}{1-x}$ sorbafejtése ismert ($\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$), tehát

$$F(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\left[\frac{1}{x_1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^k - \frac{1}{x_2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^k\right].$$

Ebből következik, hogy

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

1.1.2. Megoldás. *Első próbálkozásként felírhatjuk az első pár tagot:*

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = ay_0 + b^1 = a + b$$

$$y_2 = a(a+b) + b^2 = a^2 + ab + b^2$$

Azt sejtjük, hogy $y_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$. Ezt a sejtést indukvióval bizonyíthatjuk:

$$y_0 = \frac{a-b}{a-b} = 1;$$

Feltételezzük:

$$y_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b};$$

Kérdés:

$$y_{n+1} = \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a-b};$$

Bizonyítás:

$$y_{n+1} = a\left(\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}\right) + b^{n+1} = \frac{a^{n+2} - ab^{n+1} + ab^{n+1} - b^{n+2}}{a-b} = \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a-b}.$$

Tehát a sejtésünk igaznak bizonyult, a sorozat általános tagja:

$$y_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

1.1.2. Megjegyzés. *Tekintjük az* $F(x) = \sum_{n\geq 0} y_n x^n$ *generátorfüggvényt. A rekurzió alapján írhatjuk, hogy*

$$F(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} y_n x^n = 1 + \sum_{n\geq 1}(ay_{n-1} + b^n)x^n = 1 + ax\sum_{n\geq 1} y_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n\geq 0}(bx)^n$$

Másrészt $\sum_{n\geq 1} y_{n-1}x^{n-1} = F(x)$ *és* $\sum_{n\geq 1}(bx)^n = \frac{1}{1-bx} - 1$, *tehát* $F(x) = \frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$. *Akárcsak az előbbi feladat esetén (elemi törtekre bontunk és használjuk a mértani sor összegét) kapjuk az*

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} x^n$$

sorbafejtést, ahonnan ugyanazt az összefüggést kapjuk az általános tagra, mint a sejtés alapján.

1.1.3. Megjegyzés. *Látható, hogy az előbbi két feladat megoldásában a generátorfüggvény használata ugyan több számolást jelentett, de nem volt szükséges megsejteni az eredményt (ráadásul a számolások egy része azonos a két feladatban). Ez mutatja, hogy a generátorfüggvények használata (és a „snake oil” módszer) nagyon előnyös lehet bonyolultabb összegek kiszámítása során, amikor az eredményt nem sejthetjük meg.*

1.1.3. Megoldás. *Vizsgáljuk meg két polinom szorzatát:*

$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right) = \sum_{l=0}^{m+n}\left(\sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k}\right)x^l : \quad a_i = 0 \quad \forall i > m, \quad b_j = 0 \quad \forall j > n. \tag{1.1}$$

Az is ismert, hogy

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k x^k.$$

Ugyanakkor

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n = \Big(\sum_{i=0}^{m} C_i^m x^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} C_j^n x^j\Big)$$

Az 1.1 alapján

$$\sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k x^k = \Big(\sum_{i=0}^{m} C_i^m x^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} C_j^n x^j\Big) = \sum_{l=0}^{m+n}\Big(\sum_{k=0}^{l} C_k^m C_{l-k}^n\Big)x^l.$$

Mivel két azonos fokszámú polinom egyenlő, ezért a megfelelő fokszámú tagok együtthatói megegyeznek, vagyis a kért azonosságot kapjuk.

1.1.4. Megoldás. *Jelöljük a keresett elrendezések számát s_n-nel. Ugyanakkor jelölje a_n azt a számot, ahány féle képpen elrendezhetünk n almát, úgy, hogy a számuk páros legyen. Ez nyílván* $a_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$ *Ezek alapján az a_n sorozat generátorfüggvénye*

$$F_1(x) = \sum_{k\geq 0} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Hasonlóan, ha b_n-nel jelöljük n banán elrendezésének a számát, úgy, hogy a számuk 5-el osztható legyen, akkor ennek a sorozatnak a generétorfüggvénye

$$F_2(x) = \sum_{k\geq 0} x^{5k} = \frac{1}{1-x^5}.$$

Legyen c_n n narancs azon elrendezéseinek a száma, amikor legfeljebb 4 narancsunk van. Ilyen elrendezés csak az $n \in \{0,1,2,3,4\}$ esetekben van, tehát a c_n generátorfüggvénye

$$F_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$$

Végül ha d_n-nel jelöljük n körte azon elrendezéseinek a számát, amikor legfeljebb egy körte van, akkor ennek a generátor függvénye

$$F_4 = 1 + x.$$

Adott n esetén a keresett elrendezések a következőkből állnak elő: p alma, q banán, r narancs és $n-p-q-r$ körte. Ugyanakkor tudjuk, hogy p db almát a kért feltételek szerint pontosan a_p féle képpen lehet elrendezni, q banánt b_q képpen, stb. Innen kapjuk, hogy az összes elrendezések száma $s_n = \sum_{p,q,r\geq 0} a_p b_q c_r d_{n-p-q-r}$, vagyis pontosan az $F_1F_2F_3F_4$ szorzatban az x^n tag eggyütthatója. Tehát

$$F_1(x)F_2(x)F_3(x)F_4(x) = \sum_{n\geq 0} s_n x^n.$$

Eszerint

$$\sum_{k\geq 0} s_k x^k = \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}\frac{1-x^5}{1-x}(1+x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k\geq 0} C_{k+1}^k x^k$$

Tehát $s_n = C_{n+1}^n = n+1$.

1.1.5. Megoldás. *Rögzített* $a \in (0,\infty)$ *esetén tekintjük az* $x_n = (\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n})(a)$ *sorozatot (ahol* $x_0 = a$*). Az adott függvényegyenlet alapján írhatjuk, hogy*

$$x_{n+3} + x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0, \quad n \geq 0.$$

A konstans együtthatójú lineáris rekurziók megoldásának reprezentáció-tétele alapján

$$x_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot (-3)^n + c_3 \cdot (-2)^n, \quad \forall n \geq 0.$$

mivel a karakterisztikus egyenlet $r^3 + 4r^2 + r - 6 = 0$ *és ennek a gyökei* $1, -3, -2$*. Ha* c_2 *vagy* c_3 *nem nulla, akkor tetszőleges* c_1 *esetén létezik olyan* $n \in \mathbb{N}$*, amelyre* $c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot (-3)^n + c_3 \cdot (-2)^n < 0$ *és ez ellentmond az* f *értelmezésének, tehát* $c_2 = c_3 = 0$ *és így* $x_n = x_0$ *vagyis* $f(a) = a$*. Mivel* x_0 *tetszőleges lehet, a függvényegyenletet csak az* $f(x) = x, x > 0$ *függvény teljesítheti.*

1.1.6. Megoldás. *Kiszámítjuk az a*

$$S_n = \sum_{m\geq 0}(-1)^{n-m}C_n^m a_m = \sum_{m\geq 0}(-1)^{n-m}C_n^m \sum_{s\geq 0} C_m^s b_s$$

összeget n *függvényében. Mivel ebben az összegben* $s \leq m \leq n$ *az összegzési sorrend felcserélése után írhatjuk, hogy*

$$S_n = (-1)^n \sum_{s=0}^{n}\left(\sum_{m=s}^{n}(-1)^m C_n^m C_m^s\right) b_s. \tag{1.2}$$

Ugyanakkor

$$\sum_{m=s}^{n}(-1)^m C_n^m C_m^s = \sum_{k=0}^{n-s}(-1)^{k+s}C_n^{s+k}C_{s+k}^s = (-1)^s C_n^s \sum_{k=0}^{n-s}(-1)^k C_{n-s}^k$$

és ez 0 *ha* $n \neq s$ *valamint* $(-1)^n$ *ha* $s = n$*. Emiatt* (1.2) *jobb oldalán csak a* b_n *marad és ennek az együtthatója* 1*, tehát* $S_n = b_n$ *minden* $n \geq 0$ *esetén.*

1.1.4. Megjegyzés. *Az előbbi bizonyítás nem világít rá a feladat lényegére, nem mutatja meg, hogy esetleg hogyan lehetne rájönni hasonló inverziós formulákra. Ha rögzített* k*-ra felírjuk az adott egyenlőséget* $a_0, a_1, \ldots a_k$ *esetén, akkor egy háromszög alakú lineáris egyenletrendszert kapunk. A bizonyítandó összefüggés gyakorlatilag ennek a rendszernek a megoldásait adja meg és ez megkapható direkt számolással is.*

1.1.7. Megoldás. *Legyen* $S_n = \sum\limits_{k\geq 0} C_{n+k}^{2k} 2^{n-k}$ *és* $F(x) = \sum\limits_{n\geq 0} S_n x^n$ *a keresett sorozat* *generátorfüggvénye. Így*

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{k\geq 0} 2^{-k} \sum_{n\geq 0} C_{n+k}^{2k}(2x)^n \\
&= \sum_{k\geq 0} 2^{-k}(2x)^{-k} \sum_{n\geq 0} C_{n+k}^{2k}(2x)^{n+k} \\
&= \sum_{k\geq 0} 2^{-k}(2x)^{-k} \frac{(2x)^{2k}}{(1-2x)^{2k+1}} \\
&= \frac{1}{1-2x} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{x}{(1-2x)^2}\right)^k \\
&= \frac{1}{1-2x} \frac{1}{1-\frac{x}{(1-2x)^2}} \\
&= \frac{1-2x}{(1-4x)(1-x)} \\
&= \frac{2}{3(1-4x)} + \frac{1}{3(1-x).}
\end{aligned}$$

Az F sorbafejtése alapján tehát írhatjuk, hogy $\sum\limits_{k\geq 0} C_{n+k}^{2k} 2^{n-k} = \frac{2^{2n+1}+1}{3}$. *Az előbbi számolásban használtuk ($p = 2k$ és $x \to 2x$ esetén), hogy*

$$\sum_{k\geq 0} C_k^p x^k = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

1.1.8. Megoldás. *Jelölje T_n egy $n+2$ oldalú konvex sokszög lehetséges felbontásainak számát. Tekintsük az $A_1A_2...A_{n+2}$ sokszög egy háromszögekre bontását. Legyen az A_1A_{n+2} oldalú háromszög harmadik csúcsa A_k. Az A_1A_k és A_kA_{n+2} átlók az $(n+2)$-szöget az $A_1A_2...A_k$ k-szögre, az $A_1A_kA_{n+2}$ háromszögre és az $A_kA_{k+1}...A_{n+2}$ $(n-k+3)$-szögre bontják. Mivel a k-szöget T_{k-2} féleképpen, az $(n-k+3)$-szöget T_{n-k+1} féleképpen bonthatjuk fel háromszögekre ezért az $A_1A_kA_{n+1}$ háromszöget tartalmazó háromszögekre bontások száma $T_{k-2}T_{n-k+1}$, ahol $2 \leq k \leq n+1$. Ha az A_1A_{n+2} oldalt rögzítjük, akkor különböző k értékek esetén a megfelelő felbontások is különbözők lesznek és minden felbontásban kell léteznie olyan háromszögnek, amelynek egyik oldala A_1A_{n+2}, tehát írhatjuk, hogy*

$$T_n = \sum_{k=2}^{n+1} T_{k-2}T_{n-k+1}$$

vagyis

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} T_kT_{n-1-k}.$$

Ha $F(x) = \sum\limits_{k\geq 0} T_kx^k$ *a* $(T_k)_{k\geq 0}$ *sorozat generátorfüggvénye, akkor*

$$(T_0+T_1x+...)(T_0+T_1x+...) = T_0^2 + (T_0T_1+T_1T_0)x + (T_0T_2+T_1T_1+T_2T_1)x^2 + ...$$

vagyis a rekurzió alapján

$$F(x)^2 = \sum_{k\geq 0} T_{k+1}x^k \Rightarrow xF(x)^2 = \sum_{k\geq 0} T_k x^k - T_0.$$

Tehát a következő függvény egyenlethez jutunk

$$xF(x)^2 - F(x) + 1 = 0,$$

ahonnan következik, hogy $F(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$. *Tehát a további feladatunk, hogy sorba fejtsük a kapott függvényt. Kezdjük az* $f(x) = \sqrt{1-4x}$ *Taylor sorba fejtésével a 0-körül.*

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = -2(1-4x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(0) = -2$$

$$f''(x) = -2^2(1-4x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0) = -2^2$$

$$f'''(x) = -2^3 3(1-4x)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(0) = -2^3 3$$

$$\vdots$$

$$f^k(x) = -2^k(1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-3))(1-4x)^{-\frac{2k-1}{2}} \Rightarrow f^k(0) = -2^k(1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-3))$$

Tehát az f *sorbafejtése*

$$\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{k\geq 1} \frac{2^k(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!k!}x^k = 1 - \sum_{k\geq 1} \frac{2}{2k-1}\frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}x^k = 1 - \sum_{k\geq 1} \frac{2}{2k-1}C_{2k-1}^{k}x^k$$

Innen következik, hogy

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2k+1}C_{2k+2}^{k+1}x^k$$

és

$$T_k = \frac{1}{2k+1}C_{2k+2}^{k+1}.$$

1.1.9. Megoldás. *a) Tekintsünk két gyufás skatulyát, amelyek egyenként* m *gyufát tartalmaznak. Jelöljük a dobozokat* J*-vel és* B*-vel és tegyük be a* J*-t a jobb zsebünkbe, a* B*-t a bal zsebünkbe. Tegyük fel, hogy ha szükségünk van egy gyufára, akkor annak a valószínűsége, hogy ezt* B*-ből vesszük* p *(és annak, hogy* J*-ből vesszük* $(1-p)$*). Tekintsük továbbá a következő valószínűségeket:*

1. B_k*: amikor észrevesszük, hogy a* J *dobozból az utolsó gyufát vesszük ki, akkor a* B *dobozban pontosan* k *gyufa van;*

2. J_k*: amikor észrevesszük, hogy a* B *dobozból az utolsó gyufát vesszük ki, akkor a* J *dobozban pontosan* k *gyufa van.*

Világos, hogy $B_i \cap B_j = \emptyset$, $J_i \cap J_j = \emptyset$ *ha* $i \neq j$ *és* $B_i \cap J_j = \emptyset$ *tetszőleges* i *és* j *esetén. Ugyanakkor*

$$\bigcup_{k=1}^{m}(J_k \cup B_k)$$

biztos esemény, tehát

$$\sum_{k=1}^{m}[P(B_k) + P(J_k)] = 1. \tag{1.3}$$

Másrészt

$$P(B_k) = (1-p)^{m-k}p^m C_{2m-k-1}^{m-1}$$

és

$$P(J_k) = p^{m-k}(1-p)^m C_{2m-k-1}^{m-1},$$

mivel mindkét esetben a $(2m-k)$*-adik gyufa kivételénél észleljük az eseményt és ez előtt* $(m-1)$*-szer húztunk az egyik dobozból és* $(m-k)$*-szor a másikból. Ha az előbbi két összefüggést és a 1.3 egyenlőséget használjuk, a bizonyítandó egyenlőséghez jutunk.*

b) Kiszámítjuk a következő összegeket:

$$S_1 = \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k}(\sqrt{1+x}-1)^k\left[\frac{1}{p^k} + \frac{1}{(2-p)^k}\right]$$

és

$$S_2 = \sum_{k\geq 1}\left[\sum_{m\geq k}\frac{(-1)^m}{2^{2m-k}}\cdot\frac{C_{2m-k}^{m}}{2m-k}\cdot x^m\right]\left[\frac{1}{p^k} + \frac{1}{(2-p)^k}\right].$$

A $\varphi_1 : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = (\sqrt{1+x}-1)^k$ *függvény Taylor sora a* 0 *körül*

$$\sum_{m\geq k} c_{m,k}\cdot x^m$$

alakú, tehát ha az S_1 *és* S_2 *egyenlők, akkor azonosítva az* x *megfelelő hatványainak együtthatóit a két oldalon a*

$$\sum_{k=1}^{m} c_{m,k}\left[\frac{1}{p^k} + \frac{1}{(2-p)^k}\right] = \sum_{k=1}^{m}(-1)^m\frac{1}{2^{2m-k}}\frac{1}{m}C_{2m-k-1}^{m-1}\left[\frac{1}{p^k} + \frac{1}{(2-p)^k}\right]. \tag{1.4}$$

egyenlőséghez jutunk. Ha (1.4) *mindkét oldalát szorozzuk* p^m*-nel és aztán* p*-vel tartunk* 0*-hoz, akkor megkapjuk* $c_{m,m}$*-et, tehát az előbbi összegekben csak* $(m-1)$ *tag marad. Ezután* p^{m-1}*-nel szorozzuk a*

$$\sum_{k=1}^{m-1} c_{m,k}\left[\frac{1}{p^k} + \frac{1}{(2-p)^k}\right] = \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^m\frac{1}{2^{2m-k}}\frac{1}{m}C_{2m-k-1}^{m-1}\left[\frac{1}{p^k} + \frac{1}{(2-p)^k}\right]$$

egyenlőség mindkét oldalát és p*-vel tartunk* 0*-hoz. Így megkapjuk a* $c_{m,m-1}$*-et stb. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az* $\{f_k(p)\}_{1\leq k\leq m}$, $f_k : (0,1) \to \mathbb{R}$,

$$f_k(p) = \frac{1}{p^k} + \frac{1}{(2-p)^k}$$

függvények lineárisan független rendszert alkotnak és a (1.4) egyenlőségben is azonosíthatjuk a megfelelő együtthatókat. Eszerint a b) összefüggés bizonyítása teljes, ha igazoljuk, hogy $S_1 = S_2$. Másrészt a $\varphi_2 : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $\varphi_2(x) = \ln(1+x)$ függvény sorbafejtése alapján

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k} \left[\left(\frac{\sqrt{1+x}-1)}{p} \right)^k + \left(\frac{\sqrt{1+x}-1)}{2-p} \right)^k \right] \\ &= -\ln\left(1 + \frac{\sqrt{1+x}-1}{p}\right) - \ln\left(1 + \frac{\sqrt{1+x}-1}{2-p}\right) \\ &= -\ln\left[1 + \frac{x}{p(2-p)}\right]. \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \frac{x^m}{m} \sum_{m\geq k} C_{2m-k-1}^{m-1} \left[\left(\frac{2}{p}\right)^k + \left(\frac{2}{2-p}\right)^k \right] \\ &= \sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \frac{x^m}{m} \frac{2^{2m}}{p^m(2-p)^m} \\ &= \sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^m}{m} \left[\frac{x}{p(2-p)}\right]^m = -\ln\left[1 + \frac{x}{p(2-p)}\right], \end{aligned}$$

ahol használtuk az a) alpontot p helyett $p/2$-re.

c) A bizonyítandó összefüggés bal oldalát jelöljük β_k-val. A b) alpont alapján

$$\varphi_1^{(m)}(0) = \frac{(-1)^{m-k}}{2^{2m-k}} \frac{k\cdot(2m-k-1)!}{(m-k)!}.$$

Másrészt a Newton-féle binomiális tétel alapján

$$\left[(\sqrt{1+x}-1)^k\right]^{(m)} = \sum_{j=0}^{k} \left[(-1)^{k-j} \frac{j(j-2)\dots(j-2m+2)}{(k-j)!j!}\right] \cdot \frac{k!}{2^m}(x+1)^{j/2-m},$$

vagyis $k!\beta_k = 2^m \varphi_1^{(m)}(0)$. A bizonyítás teljességéhez elégséges észrevenni, hogy

$$\beta_k = \frac{(-1/2)^{m-k}(2m-k-1)!}{(k-1)!(m-k)!} = (-1)^{m-k} \frac{(2m-k-1)!}{(2m-2k)!!(k-1)!}. \tag{1.5}$$

1.1.10. Megoldás. *Jelöljük s_n-nel az $\{1,2,3,\dots,p\}$ halmaz azon részhalmazainak a számát, amelyben az elemek összege pontosan n és tekintsük az $G(x) = \sum_{n\geq 0} s_n x^n$ függvényt. Ëszrevehető, hogy*

$$G(x) = (1+x)(1+x^2)\dots(1+x^p).$$

A G függvény $G(x) = \sum_{k\geq 0} s_k x^k$ alakja alapján a $\xi = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$ egységgyökre

$$\sum_{j=1}^{p} G(\xi^j) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k\geq 0} s_k (\xi^j)^k = \sum_{k\geq 0} s_k \Big(\sum_{j=1}^{p} (\xi^j)^k\Big) = \begin{cases} 0, & p \nmid k \\ p, & p|k \end{cases}$$

Tehát ilyen értelemben azt kaptuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{p} G(\xi^j) = p \sum_{p|k} s_k.$$

Vagyis

$$\sum_{p|k} s_k = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} G(\xi^j),$$

ami pontosan a feladatban kért szám, vagyis azon részhalmazok száma, amelyekben az elemek összege osztható p-vel. Másrészt $G(\xi^p) = 2^p$ *és* $1 \leq j \leq p-1$ *esetén*

$$G(\xi^j) = \prod_{v=1}^{p}(1+\xi^{jv}) = \prod_{v=1}^{p}(1+\xi^{v}) = (-1)^p\left((-1)^p - 1\right) = 2,$$

tehát $\sum_{p|k} s_k = \frac{2^p+2(p-1)}{p} = \frac{2^p-2}{p} + 2.$

1.2. Versenyfeladatok

1.2.1. Megoldás. *Tekintsük a következő generátorfüggvényeket:*

$$F(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots + x^{a_n}$$

valamint

$$G(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + \cdots + x^{b_n}.$$

Ekkor

$$F^2(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + \sum_{i\neq j} x^{a_i+a_j} = F(x^2) + \sum_{i\neq j} x^{a_i+a_j}$$

és hasonlóan számolható ki a $G^2(x)$*. Ezekből az összefüggésekből azt kapjuk, hogy*

$$F^2(x) - F(x^2) = \sum_{i\neq j} x^{a_i+a_j}; \quad G^2(x) - G(x^2) = \sum_{i\neq j} x^{b_i+b_j}$$

Mivel az $a_i + a_j$, $1 \leq i,j \leq n$ *és* $b_i + b_j$, $1 \leq i,j \leq n$ *összegek a feladat szövege szerint ugyanazok írhatjuk, hogy*

$$F^2(x) - F(x^2) = G^2(x) - G(x^2).$$

Az egyenlőséget átcsoportosítjuk:

$$(F(x) - G(x))(F(x) + G(x)) = F(x^2) - G(x^2)$$

$$h(x) := F(x) - G(x); \quad p(x) := F(x) + G(x)$$

$$\Longrightarrow h(x)p(x) = h(x^2) \tag{1.6}$$

Az nyilvánvaló, hogy $p(1) = 2n \neq 0$ *és onnan, hogy* $h(1)p(1) = h(1)$ *természetesen következik, hogy* $h(1) = 0$.

Ha deriváljuk az (1.6) összefüggést, majd $x = 1$*-et helyettesítünk és figyelembe vesszük, hogy* $h(1) = 0$*, azt kapjuk, hogy*

$$h'(1)p(1) = 2h'(1).$$

Ebből ismét következik, hogy $h'(1) = 0$*. Már az előbb láttuk, hogy* $p(1) = 2n$*, de ha* $n \neq 2^k$*, akkor biztos a* $2n$ *soha nem lesz kettőhatvány. Másrészt még egyszer deriválva az (1.6) összefüggést és* $x = 1$*-ben vizsgálva, valamint figyelembe véve, hogy* $h(1) = 0, h'(1) = 0$ *következik, hogy* $h''(1) = 0$.

Ezt a gondolatmenetet folytatva induktíven igazolhatjuk, hogy

$$h^{(r)}(1)p(1) = 2^r h^{(r)}(1); \quad h^{(i)}(1) = 0, i = \overline{0, r-1}.$$

Vagyis

$$h^{(r)}(1)2n = 2^r h^{(r)}(1); \quad h^{(i)}(1) = 0, i = \overline{0, r-1}.$$

De feltételeztük, hogy az n *nem kettőhatvány, így azt kapjuk, hogy* $h^{(i)}(1) = 0, \forall i \in \mathbb{N}$*, innen következik, hogy* $h \equiv 0$*, ami ellentmond annak, hogy az* $\{a1, a_2, \ldots, a_n\}$ *és* $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ *halmazok különbözők.*

Tehát a feltételezésünk rossz volt, vagyis az n *kettőnek hatványa kell legyen.*

1.2.2. Megoldás. *Ugyanazt a módszert használjuk, mint az 1.1.6 feladat esetén esetén.*

1.2.3. Megoldás. *Tekintsük a* $F_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{a_n^{(j)}}$, $1 \leq j \leq k$ *generátorfüggvényeket (ezek gyakorlatilag a haladványok tagjaiból alkotott halmazok karakterisztikus függvényének a generátorfüggvényei). A feltétel alapján*

$$F_j(x) = \frac{x^{a_0^{(j)}}}{1 - x^{r_j}}, \quad 1 \leq j \leq k \quad \textit{és}$$

$$F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_k(x) = \frac{1}{1-x}$$

vagyis

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{x^{a_0^{(j)}}}{1 - x^{r_j}} = \frac{1}{1-x}. \tag{1.7}$$

Ez alapján

$$\lim_{x \to 1} \sum_{j=1}^{k} \frac{(1-x)x^{a_0^{(j)}}}{1 - x^{r_j}} = 1$$

azaz

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{r_j} = 1.$$

Ugyanakkor ha $r_1, r_2, \ldots, r_k$ *páronként különböznek, akkor a legnagyobb* r_j*-hez tartozó* r_j*-ed rendű* ξ_j *primitív egységgyök esetén az*

$$\lim_{x \to \xi_j} \sum_{j=1}^{k} \frac{x^{a_0^{(j)}}}{1 - x^{r_j}} = \frac{1}{1 - \xi_j}$$

egyenlőséghez jutnánk. Ez viszont lehetetlen, mert a bal oldalon egy tagnak végtelen lenne a határértéke és az összes többi tagnak (beleértve a jobb oldalt is) véges.

1.2.4. Megoldás. *A Snake oil módszert használjuk az*

$$S_n = \sum_{k\geq 0} C_{n+k}^{m+2k} C_{2k}^{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

sorozatra, vagyis tekintjük a $F_m(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n x^n$ *generátorfüggvényt és az összegzési sorrend felcserélésével megpróbáljuk kiszámolni* $F_m(x)$*-et.*

$$\begin{aligned}
F_m(x) &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k\geq 0} C_{n+k}^{m+2k} C_{2k}^{k} \frac{(-1)^k}{k+1}\right) x^n \\
&= \sum_{k\geq 0} C_{2k}^{k} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{-k} \left(\sum_{n\geq 0} C_{n+k}^{m+2k} x^{n+k}\right) \\
&= \sum_{k\geq 0} C_{2k}^{k} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{-k} \left(\sum_{r\geq k} C_{r}^{m+2k} x^{r}\right) \\
&= \sum_{k\geq 0} C_{2k}^{k} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{-k} \frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}} \\
&= \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \sum_{k\geq 0} C_{2k}^{k} \frac{1}{k+1} \left(\frac{-x}{(1-x)^2}\right)^k \\
&= \frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m+1}} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4x}{(1-x)^2}}\right) \\
&= \frac{x^m}{(1-x)^m}.
\end{aligned}$$

Ez alapján x^n *együtthatója az* $F_m(x)$ *sorbafejtésében* C_{n-1}^{m-1}*, tehát a keresett összeg* $S_n = C_{n-1}^{m-1}$*.*