1.1. Alapfeladatok

1.1.1. Feladat. *Számítsd ki a*

$$\max_{0\le t\le 1}\left\{\min\left\{\frac{2-t}{2},\frac{t}{2-t}\right\}\right\}$$

kifejezés ért'ekét!

A.M. Ostrovski

1.1.2. Feladat. *Igazold, hogy tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\min\{\max\{a,b\},\max\{b,c\},\max\{c,a\}\} = \max\{\min\{a,b\},\min\{b,c\},\min\{c,a\}\}.$$

1.1.3. Feladat. *Számítsd ki a*

$$\min_x\{\max\{2|x|,|1+x|\}\}$$

kifejezés értékét!

H. Fatkić, B. Mesihović

1.1.4. Feladat. *Számítsd ki a a*

$$\min_{x,y,z\in\mathbb{R}}\left\{\max\left\{x^2+y+z,y^2+z+x,z^2+x+y\right\}\right\}$$

kifejezés értékét! Hogyan változik az előbbi kifejezés értéke ha teljesülnie kell az $x+y+z=1$ feltételnek is?

1.1.5. Feladat. *Számítsd ki a*

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}}\left\{\max\left\{(a+b+c)^2-9bc,(a+b+c)^2-9ca,(a+b+c)^2-9ab\right\}\right\}$$

kifejezés értékét!

E.A. Jasinovi, 1996, Matematika v škole

1.1.6. Feladat. *Számítsd ki a*

$$\max_{x,y>0}\left\{\min\left\{x,y+\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right\}\right\}$$

kifejezés értékét!

1.1.7. Feladat. *Számítsd ki a*

$$\min_{x,y,z>0}\left\{\max\left\{x^2+\frac{1}{y},y^2+\frac{1}{z},z^2+\frac{1}{x}\right\}\right\}$$

kifejezés értékét!

F. Zejnulahi, 1996

1.1.8. Feladat. *Az a, b és c pozitív számok összege 1. Számítsd ki a következő kifejezések értékét:*

a) $\min\limits_{a,b,c>0} \{\max\{a - bc, b - ca, c - ab\}\};$

b) $\min\limits_{a,b,c>0} \{\max\{a + bc, b + ca, c + ab\}\}.$

1.1.9. Feladat. *Az a, b, c, d, e, f és g nemnegatív számok összege 1. Határozd meg az $a+b+c$, $b+c+d$, $c+d+e$, $d+e+f$ és $e+f+g$ összegek legnagyobbikának legkisebb lehetséges értékét!*

NMO-ra javasolt feladat, 1981 (shortlist)

1.1.10. Feladat. *Számítsd ki a következő kifejezések értékét, ha $x, y, z \in [0,1]$:*

a) $\min\limits_{x,y,z}\left\{\max\left\{x + \sqrt{1-y^2}, y + \sqrt{1-z^2}, z + \sqrt{1-x^2}\right\}\right\};$

b) $\max\limits_{x,y,z}\left\{\min\left\{x + \sqrt{1-y^2}, y + \sqrt{1-z^2}, z + \sqrt{1-x^2}\right\}\right\}.$

Hogyan változik az előbbi kifejezések értéke ha $x + y + z = 1$?

1.1.11. Feladat. *Számítsd ki:*

a) $\min\limits_{a,b}\{\max\limits_{x\in[-1,1]} |x^2 + ax + b|\};$

b) $\min\limits_{a,b,c}\{\max\limits_{x\in[-1,1]} |x^3 + ax^2 + bx + c|\};$

b) $\min\limits_{a_i}\{\max\limits_{x\in[-1,1]} |x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0|\}.$

1.1.12. Feladat. *Számítsd ki:*

a) $\min\limits_{\alpha,\beta}\{\max\limits_{x} |\alpha \cdot \cos x + \cos 2x + \beta \cdot \cos 3x|\};$

b) $\min\limits_{\alpha,\beta}\{\max\limits_{x} |\cos x + \alpha \cdot \cos 2x + \beta \cdot \cos 4x|\};$

b) $\min\limits_{\alpha,\beta}\{\max\limits_{x} |\cos x + \alpha \cdot \cos 2x + \beta \cdot \cos 3x|\}.$

1.1.13. Feladat. *Az α és β számokra teljesülnek a $0 < \beta - \alpha < \pi$ egyenlőtlenségek. Igazold, hogy*

$$\min_{a,b}\{\max_{x\in[\alpha,\beta]} |1 + a \cdot \cos x + b \cdot \sin x|\} = \mathrm{tg}\ ^2\frac{\alpha - \beta}{4}.$$

V.L. Goncarov

1.1.14. Feladat. *Számítsd ki a*

$$\max_{\alpha,\beta,\gamma}\{\min\{\sin\alpha\cdot\cos\beta, \sin\beta\cdot\cos\gamma, \sin\gamma\cdot\cos\alpha\}\}$$

kifejezés értékét!

1.1.15. Feladat. *Számítsd ki a*

$$\min_{A,B}\left\{\max_{0\le x\le\frac{3\pi}{2}}|\cos^2 x + 2\sin x\cdot\cos x - \sin^2 x + Ax + B|\right\}$$

kifejezés értékét!

1.1.16. Feladat. *Az* $x, y, z \in [0,1]$ *számokra jelöljük* $m(x,y,z)$*-vel illetve* $M(x,y,z)$*-vel az* $x\sqrt{1-z^2}$, $y\sqrt{1-x^2}$ *és* $z\sqrt{1-y^2}$ *számok közül a legkisebbet illetve legnagyobbat. Határozd meg a* $\min\limits_{x,y,z} M(x,y,z)$ *és a* $\max\limits_{x,y,z} m(x,y,z)$ *értékeket. Határozd meg az előbbi kifejezések értékét, ha* $x+y+z=1$.

1.1.17. Feladat. *Számítsd ki:* $\min\limits_{z\in\mathbb{C}}\max\left\{|1+z|, |1+z^2|\right\}$.

Schweitzer Miklós Verseny, 1956

1.2. Versenyfeladatok

1.2.1. Feladat. *Az* a_1, a_2, a_3, a_4 *és* a_5 *számok teljesítik az* $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 1$ *összefüggést. Határozd meg a*

$$\max\{\min_{1\le i<j\le 5}|a_i - a_j|\}$$

kifejezés értékét! Ugyanaz a feladat, ha a_1, a_2, a_3, a_4 *és* a_5 *nem lehet negatív.*

NMO-ra javasolt feladat, 1974 (shortlist)

1.2.2. Feladat. *Az* x_1, x_2, x_3 *és* x_4 *pozitív számok összege* 1. *Számítsd ki a*

$$\min\left\{\max\left\{\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \frac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3}, \frac{x_4}{1+x_1+x_2+x_3+x_4}\right\}\right\}.$$

kifejezés értékét!

1.2.3. Feladat. *Az* $x_1, x_2, \ldots, x_{10} \in [0,1]$ *számokra legyen* $s_j = \frac{1}{j}\cdot\sum\limits_{k=1}^{j} x_k$. *Határozd meg a következő kifejezések értékét:*

a) $\max\limits_{x_j}\{\min\limits_{i,j}|s_i - s_j|\}$;

b) $\min\limits_{x_j}\{\max\limits_{i,j}|s_i - s_j|\}$.

F. Zejnulahi

1.2.4. Feladat. *Egy pontszerű test nyugalmi helyzetből indul és* $1s$ *alatt* $1m$ *távolságot tesz meg. Igazoljuk, hogy ha az* $1s$ *végén a test ismét nyugalmi helyzetben van, akkor létezett olyan pillanat, amikor a gyorsulásának abszolút értéke legalább* $4m/s^2$.

1.2.5. Feladat. *Egy tényérra homokot öntünk. Igazold, hogy a homok legnagyobb meredekségének pontosan akkor a legkisebb az értéke, ha a homokkupac körkúp alakú!*

1.2.6. Feladat. *Legyen* $\mathcal{P}_n$ *azoknak a legfeljebb* n*-ed fokú* $P = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ *polinomoknak a halmaza, amelyekhez rendelt polinomiális függvény a* $[-1, 1]$ *intervallumot a* $[-1, 1]$ *intervallumba képezi. Bizonyítsd be, hogy* $\max_{P \in \mathcal{P}_n} \sum_{j=0}^{n} a_j^2$.

András Szilárd, 1998