

## 1.1. Alapfeladatok

**1.1.1. Feladat.** *Igazold, hogy a  $\frac{21n+4}{14n+3}$  tört irreducibilis, ha  $n \in \mathbb{Z}$ .*

**1.1.2. Feladat.** *Határozd meg az összes olyan háromjegyű számot, amelyet 11-gyel osztva a hányados a számjegyeinek négyzetösszege!*

**1.1.3. Feladat.** *Határozd meg a*

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9$$

*egyenlőtlenséget teljesítő valós számokat!*

**1.1.4. Feladat.** *Igazold, hogy ha  $ABCD$  körbeírható négyszög, akkor az  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$  és  $DAB$  háromszögek súlypontjai egy körre illeszkednek! Általánosítás!*

**1.1.5. Feladat.** *Tekintjük azokat a köröket, amelyek áthaladnak az  $ABCDE$  konvex ötszög legalább csúcsán (legfeljebb 10 kört). Igaz-e, hogy a körök által származtatott körlapok lefedik az ötszöget?*

**1.1.6. Feladat.** *Adott 100 pont a síkban úgy, hogy közülük semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre. Igazold, hogy az általuk meghatározott háromszögeknek legalább a 30%-a nem hegyesszögű!*

**1.1.7. Feladat.** *Adott  $n$ -re határozd meg azokat a  $p$  értékeket, amelyekre igaz a következő tulajdonság:*

*Minden  $n$  oldalú konvex sokszög feldarabolható  $p$  darab egyenlő szárú háromszögre.*

**1.1.8. Feladat.** *Egy  $50 \times 50$ -es négyzet belsejébe egy olyan  $A_1A_2 \dots A_n$  törtvonalat írunk, amely a négyzet belsejének egyetlen pontjától sincs 1 egységnél nagyobb távolságra. Igazold, hogy a törtvonal hossza legalább 1248 egység!*

**1.1.9. Feladat.** *99 darab kártya mindegyikére felírunk egy természetes számot az  $[1, 99]$  intervallumból (különböző kártyákra írhatunk különböző számokat). Igazold, hogy ha a kártyák halmazának egyetlen részalmazában sem osztható 100-zal a kártyákra írt számok összege, akkor minden kártyára ugyanaz a szám van írva!*

**1.1.10. Feladat.** *Adott a síkon  $3n$  különböző pont. Igazold, hogy megszerkeszthető  $n$  páronként diszjunkt háromszög, amelyeknek a csúcsai az adott pontok közt vannak!*

## 1.2. Versenyfeladatok

**1.2.1. Feladat.** *17 kutató mindegyike levelezik egymással (mindenki mindenkivel) három különböző témakörben, de bármely két kutató pontosan egy témában levelezik. Igazold, hogy van 3 olyan kutató, amelyek páronként ugyanabban a témában leveleznek! Általánosítás!*

**1.2.2. Feladat.** *Az  $ABC$  egyenlő oldalú háromszög  $O$  pontját vetítjük az oldalakra. Igazold, hogy a vetületek által meghatározott háromszög súlypontja az  $OG$  szakasz felezőpontja, ahol  $G$  az eredeti háromszög súlypontja!*

**1.2.3. Feladat.** *Egy fakockán (vagyis a kocka felszínén) megjelölünk 100 pontot. Lehetséges-e, hogy az így kapott ponthalmaz a kocka minden forgatására nézve invariáns?*

**1.2.4. Feladat.** *Egy csoportban 24-en beszélnek japánul, 24-en maláj nyelven és 24-en perzsául (fárszi). Igazold, hogy a csoportból kiválasztható olyan társaság, amelyben mindhárom nyelvet pontosan 12 ember beszél!*

**1.2.5. Feladat.** *Igazold, hogy négy különböző párhuzamos síkhoz mindig szerkeszthető egy szabályos tetraéder, amelynek mind a négy síkra pontosan egy csúcsa illeszkedik!*