1.1. Alapfeladatok

1.1.1. Feladat. *Az* $N = a_0a_1a_2\dots a_9$ *(tízes számrendszerbeli) számot önleírónak nevezzük, ha minden* $0 \le i \le 9$ *esetén* a_i *az* N *szám* i*-vel egyenlő számjegyeinek száma. Határozd meg az összes önleíró számot a tízes számrendszerben!*

1.1.2. Feladat. *Igazold, hogy* 18 *egymást követő háromjegyű szám közt van olyan, amely osztható a számjegyei összegével!*

1.1.3. Feladat. *Igazold, hogy* $\sqrt[n]{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt[n]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ *irracionális, ha* $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

1.1.4. Feladat. *Határozd meg a következő egyenletrendszer valós megoldásait:*

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{x_1} &= 2x_2 \\ x_2 - \frac{1}{x_2} &= 2x_3 \\ x_3 - \frac{1}{x_3} &= 2x_4 \\ x_4 - \frac{1}{x_4} &= 2x_1 \end{cases}$$

1.1.5. Feladat. *Határozd meg a következő egyenletrendszer valós megoldásait:*

$$\begin{cases} x^2 - yz &= a \\ y^2 - zx &= b \\ z^2 - xy &= c \end{cases}$$

1.1.6. Feladat. *Határozd meg az* ABC *háromszög belsejében azt a* T *pontot, amelyre a* $TA + TB + TC$ *összeg minimális!*

1.1.7. Feladat. *Tervezzél minimális összhosszúságú útvonalrendszert egy négyzet belsejében, amely lehetővé teszi, hogy minden csúcsból minden más csúcs elérhető legyen!*

1.2. Versenyfeladatok

1.2.1. Feladat. *Anna, Beáta és Csenge ugyanazon a vizsgasorozaton vett részt. Minden vizsgán az* x, y, z *különböző jegyeket kapták valamilyen sorrendben. A végén az Anna jegyeinek összege* 20, *a Beáta jegyeinek összege* 10 *és a Csenge jegyeinek összege* 9 *volt és az algebra vizsgán Beáta kapta a legnagyobb jegyet. Ki kapta a második legnagyobb jegyet a geometria vizsgán?*

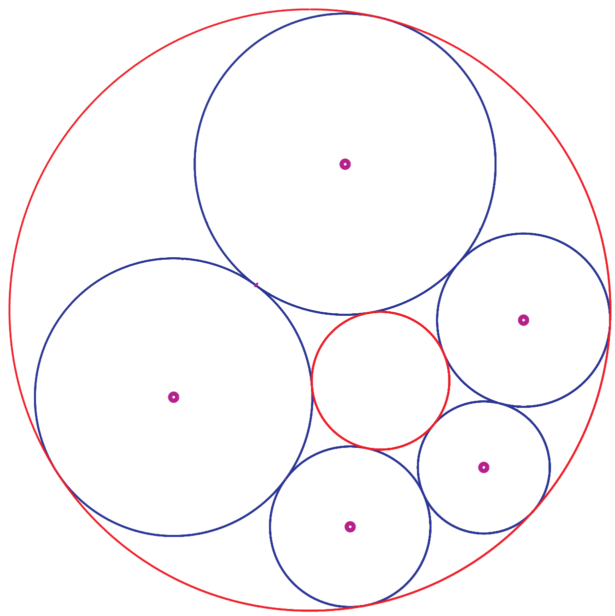
1.2.2. Feladat. *Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az* $a \times b$ *méretű téglalap belsejében elhelyezhető legyen egy* $c \times d$ *méretű téglalap?*

1.2.3. Feladat. *Igazold, hogy ha* $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ *és* $abc = 1$, *akkor*

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \le 1.$$

1.2.4. Feladat. *Az* $ABCDEF$ *konvex hatszögben* $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ *és* $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{EFA}) = 60°$. *Tekintsük a* G *és* H *pontokat a hatszög belsejében úgy, hogy* $m(\widehat{AGB}) = m(\widehat{DHE}) = 120°$. *Igazold, hogy* $AG + GB + GH + DH + HE \ge CF$.

1.2.5. Feladat. *(Steiner bezáródási tétele) Adott a $\mathcal{K}_1$ kör és annak belsejében a $\mathcal{K}_2$ kör. A $\mathcal{K}_1$ tetszőleges A_1 pontjából kiindulva szerkesztünk egy $\mathcal{C}_1$ kört, amely $\mathcal{K}_1$-et A_1-ben érinti és érinti a $\mathcal{K}_2$-t is. Ez után rekurzíven megszerkesztjük a $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \ldots, \mathcal{C}_p, \ldots$ köröket úgy, hogy minden $\mathcal{C}_j$ kör érintse $\mathcal{K}_1$-et, $\mathcal{K}_2$-t és $\mathcal{C}_{j-1}$-et ha $j \geq 2$. A szerkesztést periodikusnak nevezzük, ha létezik olyan $p \in \mathbb{N}$, amelyre $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_{p+1}$. Igazold, hogy ha valamilyen A_1 pontból kiindulva a szerkesztés periodikus és a periódusa p, akkor tetszőleges $A_1 \in \mathbb{K}_1$-ből kiindulva a szerkesztés periodikus és a periódus szintén p.*



1.1. ábra. Steiner bezáródási tétele