Farkas Gyula Feladatmegoldó szeminárium
Babeş-Bolyai Tudományegyetem

October 30, 2009

1 Alapfeladatok

1. Jelöljük $f(n)$ -nel annak a szorzatnak a legnagyobb lehetséges értékét, amelynek tényezői természetes számok és összegük n. Határozzuk meg $f(n)$-net!

2. Létezik-e injektív $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény amelyre
$$f(2^x) + f(3^x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Határozzuk meg az összes $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényt amelyre
$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3 \forall n \in Z, \text{ and } f(0) = 1.$$

4. Határozzuk meg az összes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely teljesíti a következő összefüggést:
$$f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2).$$

5. Van-e olyan nem konstans egész együtthatós polinom, amelyik minden pozitív egész helyen 2-hatvány értéket vesz föl?

6. Határozzuk meg az összes olyan $f : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos bijectív függvényt amelyre
$$\int_0^1 g(f(x))dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

7. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(g(x)) = g(f(x)) = -x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Igazoljuk, hogy ezek a függvények páratlanok, és adjunk példát ilyen függvényre.

8. Határozzuk meg az összes $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ amelyre teljesül minden $x, y \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{f(x) + f(y) + f(x)}{2x + f(y)} = \frac{2y + f(x)}{f(x + y) + f(y)}.$$

9. (a) Van-e olyan függvény amely minden értéket páros sokszor vesz fel?
   (b) Van-e olyan függvény amely minden értéket páratlan sokszor vesz fel?

10. Legyen $f_0 \in \mathcal{C}([0,1])$. Valamint értelmezzük a következő sorozatot

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt, \ (\forall)n \geq 1. \tag{1}$$

Tudva, hogy minden $x \in [0,1]$ esetén létezik, egy $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $f_n(x) = 0$, létezik-e olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre $f_0(x) \neq 0$?

2 Versenyfeladatok

1. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ olyan függvény, amelyre $f(x) = f(x+1)$ minden x, legyen továbbá $t \in [0, \frac{1}{4}]$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy az $f(x-t)$-ből az $f(x+t)$ pontba mutató vektor merőleges az $f(x)$-ből az $f(x+1/2)$-be mutató vektorra.

2. Igaz-e, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvény előáll $f = f_1 + f_2 + ...f_n$ alakban, ahol minden f_i valamilyen a_i szerint periódikus mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, akkor előáll $f = g_1 + g_2 + ...g_n$, ahol minden g_i egész értékű a_i szerint periódikus mérhető függvény

3. Meg lehet-e adni úgy köröket a síkon, hogy minden egyenes legalább 1-et, de legfeljebb 100-at messen közülük?

4. Milyen n-re igaz, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex zárt akkor
   (a) $A + A$ is konvex zárt?
   (b) $A - A$ is konvex zárt?

5. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Melyik állításból következik a másik?
   (i) f folytonos
   (ii) f grafikonja összefüggő zárt halmaz.