1.1. Alapfeladatok

1.1.1. Feladat. *A méhek családfája alapján állapítsd meg, hogy hány n-ed rendű nagyapja és nagyanyja van egy herének! A méheknél a királynő megtermékenyített petéiből kelnek ki a dolgozó méhek és a meg nem termékenyített petékből a hímek.*

1.1.2. Feladat. *Írjuk növekvő sorrendbe az összes olyan számot, amelyben nem szerepel a* 6*-os és a* 7*-es számjegy. Milyen szám áll a* 2010*-edik helyen?*

1.1.3. Feladat. *Egy béka ugrál az $A_1A_2\dots A_8$ szabályos nyolcszög csúcsain. Az A_5 csúcs kivételével minden csúcsról ugorhat szomszédos csúcsra, de ha az A_5 csúcsra ugrott, akkor ott kell maradnia. Jelöljük a_n-nel azoknal az n ugrásból álló különböző ugrássorozatoknak a számát, amelyek kezdőpontja A_1 és végpontja A_5. Igazold, hogy $a_{2n-1}=0$ és*

$$a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left((2+\sqrt{2})^{n-1}-(2-\sqrt{2})^{n-1}\right).$$

1.1.4. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy az*

$$x_0=1, x_1=41,\ x_{n+2}=3x_n+\sqrt{8\left(x_n^2+x_{n+1}^2\right)},\ \forall n\geq 0$$

összefüggésekkel értelmezett sorozat minden tagja természetes szám!

1.1.5. Feladat. *Hány különböző módon fedhető le egy $2\times n$-es tábla 2×1-es dominókkal?*

1.1.6. Feladat. *Hány különböző módon fedhető le egy $3\times 2n$-es tábla 2×1-es dominókkal?*

1.2. Versenyfeladatok

1.2.1. Feladat. *A mellékelt táblázat képzési szabálya ugyanaz, mint a Pascal háromszögnek, csak az oldalakon a kezdőértékek mások. Határozd meg az n-edik sor k-adik elemét!*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & 2 & & & \\
 & & 3 & & 4 & & 3 & & \\
 & 4 & & 7 & & 7 & & 4 & \\
5 & & 11 & & 14 & & 11 & & 5
\end{array}$$

1.1. ábra. Pascal háromszög

1.2.2. Feladat. *Hány fixpontja van az $f:[0,1]\to[0,1]$,*

$$f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2}, & ha\ x<\frac{1}{2}\\ 2-2x, & ha\ x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$$

függvény n-edik iteráltjának?

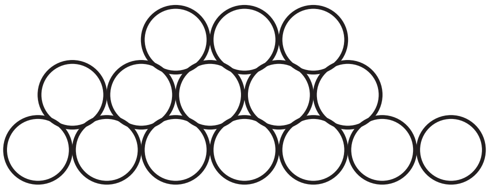
1.2.3. Feladat. *Az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sorozat teljesíti az*

$$a_{n+1} = \frac{1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}}{16}$$

rekurziót $n \geq 1$ *esetén és* $a_1 = 1$. *Határozd meg a sorozat általános tagját!*

1.2.4. Feladat. *A* P_n *polinom teljesíti a* $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ *egyenlőséget minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén. Jelölje* S_n *a* P_n *együtthatóinak abszolút értékéből képezett összeget! Számítsd ki* S_n*-et az* n *függvényében!*

1.2.5. Feladat. *Azonos méretű korongokat helyezünk egymás mellé úgy, hogy az alsó sor összefüggő legyen és minden további sorban az összes korong az alatta levő sor pontosan két korongját érintse (lásd a mellékelt ábrát). Az ilyen elrendezések közül nevezzük korongtömbnek azokat az elrendezéseket, amelyekben minden sor összefüggő. Hány különböző korongtömbnek tartalmazhat az első sora* n *korongot?*



1.2. ábra. Korongtömb