1.1. Alapfeladatok

1.1.1. Feladat. *Számítsuk ki a* $\sum\limits_{k\geq 0} C_k^{n-k}$ *összeget!*

1.1.2. Feladat. *Határozd meg az* $y_n = ay_{n-1} + b^n,\ n \geq 1$, $y_0 = 1$ *sorozat általános tagját!*

1.1.3. Feladat. *Igazold, hogy* $C_{m+n}^k = \sum\limits_{j=0}^{k} C_m^j \cdot C_n^{k-j}$, *ha* $m, n, k \in \mathbb{N}^*$.

1.1.4. Feladat. *Egy zacskóba almát, banánt, narancsot és körtét kell tennünk, összesen* n *gyümölcsöt úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:*

- *az almák száma páros;*
- *a banánok száma öttel osztható;*
- *legfeljebb* 4 *narancs kerülhet a zacskóba;*
- *legfeljebb egy körte kerülhet a zacskóba.*

Hány különböző elrendezés lehetséges?

1.1.5. Feladat. *Határozzuk meg az összes* $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *függvényt, amelyre*

$$f(f(f(x))) + 4f(f(x)) + f(x) = 6x, \quad \forall x > 0.$$

Vojtěch Jarník International Mathematical Competition, 2008

1.1.6. Feladat. *(Kombinatorikus inverzió) Igazoljuk, hogy ha* $a_n = \sum\limits_{s\geq 0} C_n^s b_s$ *minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén, akkor*

$$b_n = \sum_{m\geq 0} (-1)^{n-m} C_n^m a_m,\ \forall n \geq 0.$$

1.1.7. Feladat. *Számítsd ki a*

$$\sum_{k\geq 0} C_{n+k}^{2k} 2^{n-k}$$

összeget, ha $n \geq 0$ *természetes szám!*

1.1.8. Feladat. *Hányféleképpen darabolhatunk háromszögekre egy* $n + 2$ *oldalú konvex sokszöget egymást belső pontban nem metsző átlók segítségével?*

1.1.9. Feladat. *Igazold a következő állításokat:*

a. *Ha $p \in (0,1)$ és $m = 1,2,3,\ldots,$ akkor*

$$\sum_{k=1}^{m} C_{2m-k-1}^{m-1}\left[\frac{1}{p^k}+\frac{1}{(1-p)^k}\right]=\frac{1}{p^m(1-p)^m}.$$

b. *Ha $k = 1,2,3,\ldots$ és $|x|<1$, akkor*

$$\left(\sqrt{1+x}-1\right)^k=\sum_{m\geq k}\frac{(-1)^{m-k}}{2^{2m-k}}\cdot\frac{kC_{2m-k}^{m}}{2m-k}\cdot x^m.$$

c. *Ha $k = 0,1,2,\ldots,m$ és m természetes szám, akkor*

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{j(j-2)\ldots(j-2m+2)}{(k-j)!j!}=(-1)^{m-k}\frac{(2m-k-1)!}{(2m-2k)!!(k-1)!}. \tag{1.1}$$

András Szilárd, Baricz Árpád

1.1.10. Feladat. *Legyen p egy páratlan prím. Határozd meg az $\{1,2,3,\ldots,p\}$ halmaz azon részhalmazainak a számát, amelyben az elemek összege osztható p-vel!*

1.2. Versenyfeladatok

1.2.1. Feladat. *Igazold, hogy ha az $a_1,a_2,\ldots,a_n$ és $b_1,b_2,\ldots,b_n$ pozitív egészekre az $a_i+a_j, i\neq j$ alakú összegek halmaza megegyezik a $b_i+b_j, i\neq j$ alakú összegek halmazával, akkor az n kettőhatvány!*

1.2.2. Feladat. *Igazold, hogy ha $b_n=\sum\limits_{k\geq 0} C_k^{n-k}a_k$, $\forall n\geq 0$, akkor*

$$n\cdot a_n=\sum_{k\geq 0} C_{2n-k-1}^{n-k}(-1)^{n-k}kb_k,\quad \forall n\geq 0.$$

1.2.3. Feladat. *Az $(a_n^{(1)})_{n\geq 0}$, $(a_n^{(2)})_{n\geq 0},\ldots(a_n^{(k)})_{n\geq 0}$ számtani haladványok az $\mathbb{N}$ egy partícióját alkotják. Jelölje r_i, $1\leq i\leq k$ az $(a_n^{(i)})_{n\geq 0}$ állandó különbségét. Igazold, hogy*

- $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\cdots+\dfrac{1}{r_k}=1$;
- *az $r_1,r_2,\ldots,r_k$ számok nem lehetnek páronként különbözőek.*

1.2.4. Feladat. *Számítsd ki a*

$$\sum_{k\geq 0} C_{n+k}^{m+2k}C_{2k}^{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

összeget m és n függvényében!