1.1. Alapfeladatok

1.1.1. Feladat. *Jelöljünk meg két pontot a padlón, egymástól* $1m$ *távolságra és rögzítsük a két pontban egy* $2m$ *hosszúságú zsinor két végpontját, majd a zsinort próbáljuk a lehető legmagasabbra emelni. Ugyanezt ismételjük meg* $2m$ *távolság és* $3m$ *zsinor,* $3m$ *távolság és* $4m$ *zsinor illetve általában* n *méter távolság és* $n+1$ *méter zsinor esetén. Jelöljük az így kapott legnagyobb magasságok sorozatát* $(x_n)_{n\geq 1}$*-nel. Mit állíthatunk az* $(x_n)_{n\geq 1}$ *sorozat monotonitásáról?*

Jan Hendrik Müller, DQME II

1.1.2. Feladat. *Jelöljük* x_n*-nel egy* $h < 2m$ *magasságú emberke látótávolságát egy* $n > 6000km$ *sugarú gömb felszínén? Mit állíthatunk az* $(x_n)_{n\geq 6000}$ *sorozat monotonitásáról?*

Jan Hendrik Müller, DQME II

1.1.3. Feladat. *Egy asztalon* 100 *korong van. Minden korongnak az egyik oldala piros, a másik fekete és* 13 *korongnak a piros oldala látszik, a többinek a fekete. Bekötött szemmel hozzunk létre a korongokból két olyan csoportot, amelyek azonos számú piros oldalával felfele levő korongot tartalmaznak!*

1.1.4. Feladat. *Van* 1000 *darab* $10g$*-os és* 1000 *darab* $9,9g$*-os érménk és egy kétkarú mérlegünk. Legalább hány mérésre van szükségünk, ha ki szeretnénk alakítani két azonos számú érmét tartalmazó különböző tömegű érmecsoportot?*

Titu Andreescu, Dorin Andrica, Zuming Feng: *104 Number Theory Problems*, Birkhäuser, Boston, 2007.

1.1.5. Feladat. *Az* A *városban igazmondók (mindig igazat mondanak) és a* B *városban lókötők (ök mindig hazudnak) laknak. Egy vándor az* A *városba szeretne jutni és egy olyan útkereszteződéshez érkezett, ahonnan az egyik út az* A *városba, a másik a* B *városba vezet. A vándor nem tudja, hogy melyik út vezet az* A *városba és melyik a* B *városba, de éppen találkozik ott valamelyik város lakójával (de nem tudja, hogy melyik város lakójával!). Egyetlen kérdéssel el tudja-e dönteni, hogy melyik út vezet az* A *városba? Hát akkor, ha csak olyan kérdést tehet fel, amelyre igennel vagy nemmel lehet válaszolni?*

1.1.6. Feladat. *Számítsd ki az*

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 3 & 3 \\ 3 & x & 3 & 3 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásainak szorzatát!

Véglegesítő vizsga (szóbeli), 2009

1.1.7. Feladat. *Legyen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvények és tekintsük az*

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g(\xi_i')$$

összeget, ahol $\xi_i, \xi_i' \in \left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}, a + i\frac{b-a}{n}\right)$, $1 \leq i \leq n$.
Igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Véglegesítő vizsga (írásbeli variáns), 2009

1.1.8. Feladat. *Oldd meg és térgyald az $m \in \mathbb{R}$ paraméter függvényében az*

$$x + \sqrt{x+m} = m$$

egyenletet!

Tanári versenyvizsga, Hargita megye, 2009

1.1.9. Feladat. *Hány egészekből alkotott rendezett (a, b, c) számhármas teljesíti az $|a + b| + c = 19$ és $ab + |c| = 97$ egyenlőségeket?*

AHSME, 1997, Jimmy Chui, Crux Mathematicorum, 2002/1

1.1.10. Feladat. *A méhsejt alapja egy szabályos hatszög, oldallapjai kongruens trapézok és a teteje három kongruens rombuszból áll. Hogyan kell kinéznie a méhsejtnek ahhoz, hogy adott V térfogat mellett a legkisebb felszíne legyen?*

Heinrich Dörrie: 100 Great Problems of Elementary Mathematics,
Dover Publication, New York, 1958, Réaumur's problem

1.2. Versenyfeladatok

1.2.1. Feladat. *Tekintsük az ABC nem elfajult háromszöget a síkban és értelmezzük a $(C_n)_{n\geq 0}$ pontsorozatot a következőképpen:*

- $C_0 = C$;
- *C_{n+1} az ABC_n háromszögbe írt kör középpontja.*

Határozd meg a $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$ határértéket!

Vojtěch Jarník International Mathematical Competition, 2009

1.2.2. Feladat. *Az x, y valós számokra $[nx]$ osztható $[ny]$-nal minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy $x, y, \frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$.*

András Szilárd

1.2.3. Feladat. *Az a, b, c nemnulla valós számokra az $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$ és $cx^2 + ax + b = 0$ egyenletek mindegyikének van egy egész gyöke. Bizonyítsuk be, hogy az előbbi három egyenletnek van egy közös gyöke, ami egész!*

András Szilárd

1.2.4. Feladat. *Az $A_1A_2 \ldots A_n$ konvex sokszögben nem létezik három összefutó átló. Számold össze azokat a háromszögeket, amelyek oldalai illeszkednek az átlókra és oldalakra és csúcsai az eredeti sokszög csúcsaiban illetve az átlók metszéspontjaiban vannak!*

Jiři Herman, Radan Kučera, Jaromír Šimša:
Counting and configurations, CMS books in Mathematics

1.2.5. Feladat. *Az $A \in M_n(\mathbb{R})$ mátrix elemei szigorúan pozitívak és minden oszlopában az elemek összege 1. Igazold, hogy az A-nak az 1 egyszeres sajátértéke, minden más μ sajátértékre $|\mu| < 1$ és az 1-hez tartozik olyan sajátvektor, amelynem minden komponense pozitív!*

Perron-Frobenius