

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia  
Példa

Paraméterek  
tanulása

KL-távolság

Topológia  
tanulása

BIC pont

Tanulás  
algoritmusa

Implementálás

Adatgenerálás  
CPT-k meg-  
határozása

Topológia  
tanulása

# Bayes hálók és Bayes tanulás

Reiz Beáta

Témavezető: Csató Lehel

Babes - Bolyai Tudomány Egyetem  
Matematika Informatika Kar  
Informatika Szak

2006 április

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia  
Példa  
Paraméterek  
tanulása  
KL-távolság  
Topológia  
tanulása  
BIC pont  
Tanulás  
algoritmusa

Implementálás

Adatgenerálás  
CPT-k meg-  
határozása  
Topológia  
tanulása

- 1 Grafikus modellek
  - Bayes hálók
  - Függetlenség
  - Inferencia
  - Példa
  - Paraméterek tanulása
  - KL-távolság
  - Topológia tanulása
  - BIC pont
  - Tanulás algoritmus

## 2 Implementálás

# Grafikus modellek (GM)

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia  
Példa

Paraméterek  
tanulása

KL-távolság  
Topológia  
tanulása

BIC pont  
Tanulás  
algoritmus

Implementálás

Adatgenerálás  
CPT-k meg-  
határozása

Topológia  
tanulása

## Definíció:

- olyan gráf, melynek
  - csomópontjai valószínűségi változók
  - élei ezen változók közti függőségi viszonyokat jellemzik
- a modell paraméterei
  - a gráf csomópontjaihoz rendelt eloszlásfüggvények

## Osztályozás:

- irányított grafikus modellek (Bayes modellek)
  - alkalmazásai a mesterséges intelligencia területén fellelhetők
- irányítatlan grafikus modellek (Markov modellek)
  - alkalmazásai a fizika területén fellelhetők

# Bayes hálók (BN)

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

**Bayes hálók**

Függetlenség

Inferencia

Példa

Paraméterek  
tanulása

KL-távolság

Topológia  
tanulása

BIC pont

Tanulás  
algoritmusa

Implementálás

Adatgenerálás

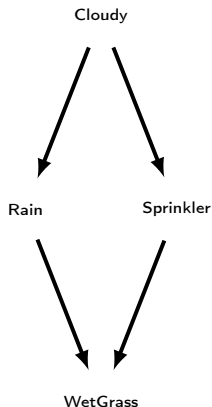
CPT-k meg-  
határozása

Topológia  
tanulása

- irányított aciklikus gráf (DAG)
- paraméterei:  
feltételes  
valószínűség táblák  
(Conditional  
Probability Table)
- az  $A \rightarrow B$  él azt  
jelenti, hogy a  $B$   
változó értéke függ  
az  $A$  változó  
értékétől

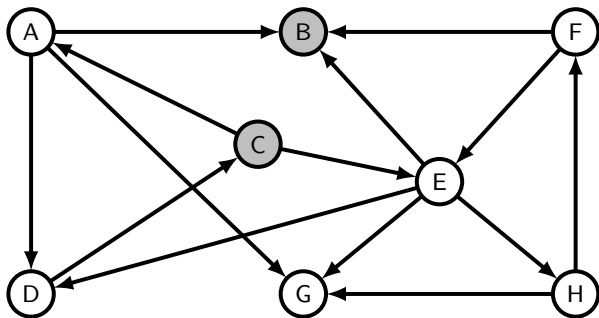
$C$	$P(R C)$
0	0.2
1	0.8

$P(C)$
0.5



- legegyszerűbb szabály:
  - Egy csomópont minden más csomóponttól független, ha ismert a csomópont minden szülőjének értéke.
- Bayes labda szabály:
  - Egy  $A$  csomópont független egy  $B$  csomóponttól, ha nem létezik  $A \rightarrow B$  út a következő megkötésekkel:
    - Ha az út egy  $C$  csomópontjának értéke ismert, akkor  $C$ -ből csak az érkező éleken mehetünk tovább
    - Ha az út egy  $C$  csomópontjának értéke ismeretlen, akkor  $C$ -ből csak a kimenő éleken mehetünk tovább

# Példa függetlenségi relációk meghatározására



Ha ismerjük  $B$  és  $C$  értékét (szürke):

- független-e  $A$  és  $H$  ?

nem:  $A, B, E, H$

- független-e  $D$  és  $G$  ?

igen

# Inferencia Bayes hálókbán

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség

**Inferencia**  
Példa

Paraméterek  
tanulása

KL-távolság

Topológia  
tanulása

BIC pont

Tanulás  
algoritmusa

Implementálás

Adatgenerálás

CPT-k meg-  
határozása

Topológia  
tanulása

A Bayes háló egy teljes valószínűség-táblát határoz meg.

- $X$  egy csomópont azonosítója a hálóból
- $not(X)$  a háló  $X$ -től különböző csomópontjainak halmaza
- $x$  a  $X$  csomópontban szereplő érték

- Kérdés:

**Mi a valószínűsége, hogy a  $X$  csomópontban szereplő érték  $x$  ?**

$$P(X = x) = \sum_z P(X = x | not(X) = z) \cdot P(not(X) = z)$$

# Példa

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia

**Példa**

Paraméterek  
tanulása

KL-távolság

Topológia  
tanulása

BIC pont

Tanulás  
algoritmusa

Implementálás

Adatgenerálás

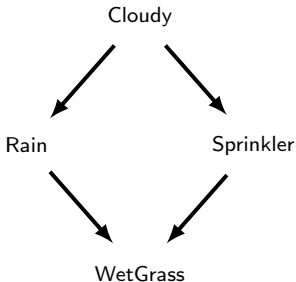
CPT-k meg-  
határozása

Topológia  
tanulása

$P(C)$
0.5

$C$	$P(R C)$
0	0.2
1	0.8

$C$	$P(S C)$
0	0.5
1	0.1



$S$	$R$	$P(W S, R)$
0	0	0.0
0	1	0.90
1	0	0.90
1	1	0.99



# Inferencia a hálóban

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség

Inferencia  
Példa

Paraméterek  
tanulása

KL-távolság  
Topológia  
tanulása

BIC pont

Tanulás  
algoritmus

Implementálás

Adatgenerálás

CPT-k meg-  
határozása

Topológia  
tanulása

Mi a valószínűsége, hogy esett az eső, ha most vizes a fű?

$$P(R = 1|W = 1) = \frac{P(R = 1, W = 1)}{P(W = 1)}$$

ahol

$$P(W = 1) = \sum_{c,s,r} P(C = c, S = s, R = r, W = 1)$$

$$P(C, S, R, W) = P(C) \cdot P(S|C) \cdot P(R|C, S) \cdot P(W|C, S, R)$$

A háló függőségi relációit felhasználva a következő kifejezést kapjuk:

$$P(C, S, R, W) = P(C) \cdot P(S|C) \cdot P(R|C) \cdot P(W|S, R)$$

# Alkalmazásokban előforduló Bayes hálók

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia

**Példa**

Paraméterek  
tanulása

KL-távolság

Topológia  
tanulása

BIC pont

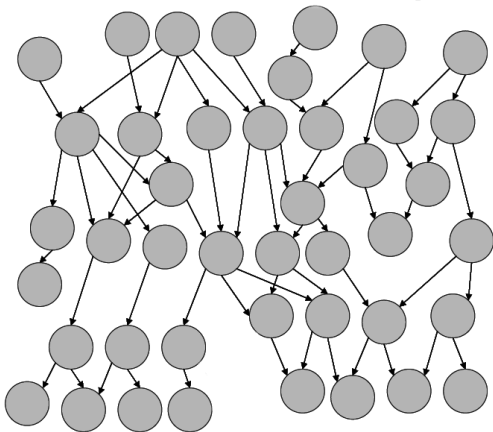
Tanulás  
algoritmus

Implementálás

Adatgenerálás

CPT-k meg-  
határozása

Topológia  
tanulása



- Hogyan építhető fel egy ilyen modell?
- Hogyan lehetne használni?

- **Quick Medical Reference**
- gyógyászatban alkalmazott diagnosztizáló rendszer
- 534 betegség
- 4040 lelet:
  - orvosi vizsgálatok eredményei
  - szimptómák
  - laborvizsgálatok eredményei

## INTERNIST-I projekt:

- didaktikai célokra használt rendszer
- CPCS hálót használja
  - Computer-based Patient Case Study
  - a QMR háló része
  - 448 csomópont, 908 él, kb. 600 valószínűség-értéket tárolnak

# Háló paramétereinek tanulása

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia  
Példa

**Paraméterek  
tanulása**

KL-távolság  
Topológia  
tanulása  
BIC pont  
Tanulás  
algoritmus

Implementálás

Adatgenerálás  
CPT-k meg-  
határozása  
Topológia  
tanulása

Feladat:

- a struktúrának megfelelő összes feltételes valószínűség meghatározása

Adott:

- a tanuló adatok
- adattagok közötti direkt függőségek

Lépések:

- meghatározzuk az aktuális csomópont szüleit
- a szülők minden egyes érték kombinációja esetén meghatározzuk a szülők, illetve az aktuális csomópont és a szülők együttes előfordulásának gyakoriságát
- a kért feltételes valószínűség az aktuális csomópont és a szülők, illetve a szülők együttes valószínűségének aránya

## KL-távolság:

- Egy távolság egy igaz (P) eloszlás és egy tetszőleges (Q) eloszlás között.
- Bayes hálóknban az adatok modellje és az adatok feltételezett modellje között számítjuk ki.

Diszkrét esetben a következő képlet segítségével számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned} D_{KL}(P\|Q) &= \sum_{x \in \Omega} P(x) \cdot \log \frac{P(x)}{Q(x)} \\ &= \sum_{x \in \Omega} P(x) \cdot \log(P(x)) - \sum_{x \in \Omega} P(x) \cdot \log(Q(x)) \end{aligned}$$

# KL-távolság változása különböző hálóknál esetén

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia  
Példa

Paraméterek  
tanulása

**KL-távolság**

Topológia  
tanulása

BIC pont

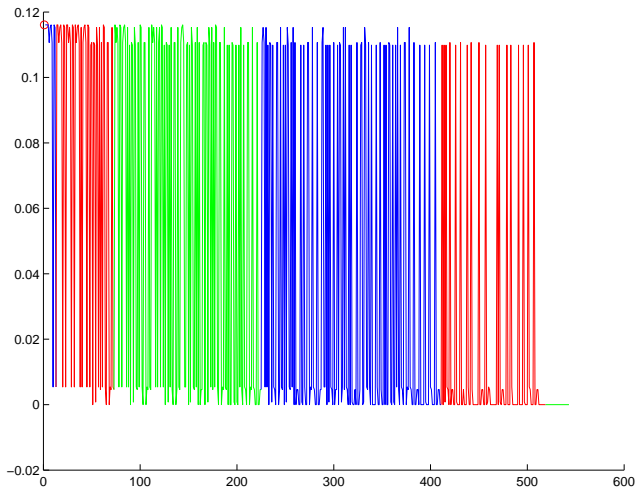
Tanulás  
algoritmus

Implementálás

Adatgenerálás

CPT-k meg-  
határozása

Topológia  
tanulása



## Feladat:

- optimális szerkezet (gráf) megkeresése
- probléma: a keresési tér mérete exponenciális a gráf csomópontjainak száma szerint

## Módszerek:

- Empirikus penalizáló
- Függetlenség-vizsgálaton alapuló

# Kiértékelő függvény meghatározása

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia  
Példa

Paraméterek  
tanulása

KL-távolság  
Topológia  
tanulása

**BIC pont**

Tanulás  
algoritmusa

Implementálás

Adatgenerálás  
CPT-k meg-  
határozása

Topológia  
tanulása

- topológia tanulása esetén pontozzuk a hálót:
  - a paraméterek illeszkedése szerint
  - a gráf szerkezete szerint
- használt kiértékelőfüggvény a *BICscore* (**B**ayesian **I**nformation **C**riterion)

$$BICscore(G|D) = \sum_i \sum_{x_i \in \Omega} [\log(Q(x_i)) \cdot card(Q(x_i)|D)] - \frac{\log(N) \cdot df(G)}{2}$$

ahol

- $card(Q(x_i)|D)$  az  $x_i$  értékkombináció előfordulásának száma az adatokban
- $df(G)$  a hálóban található CPT-k sorainak száma



# BICscore változása különböző hálók esetén

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

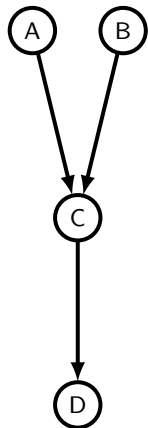
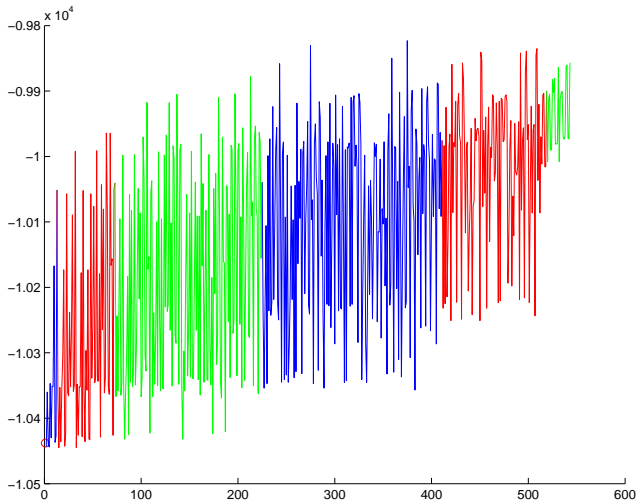
Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia  
Példa

Paraméterek  
tanulása  
KL-távolság  
Topológia  
tanulása

**BIC pont**  
Tanulás  
algoritmus

Implementálás

Adatgenerálás  
CPT-k meg-  
határozása  
Topológia  
tanulása



# Topologikus tanulás algoritmus

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia  
Példa

Paraméterek  
tanulása

KL-távolság

Topológia  
tanulása

BIC pont

**Tanulás  
algoritmus**

Implementálás

Adatgenerálás  
CPT-k meg-  
határozása

Topológia  
tanulása

## Az algoritmus lépései:

1. modell  $\leftarrow$  init
2. cpt  $\leftarrow$  FeltValTablak(modell)
3. ertek  $\leftarrow$  BICpont(cpt)
4. ujmodell  $\leftarrow$  KovModell(modell)
5. ujcpt  $\leftarrow$  FeltValTablak(ujmodell)
6. ujertek  $\leftarrow$  BICpont(ujcpt)
7. mig ujertek  $>$  ertek  $\rightarrow$  megjegyezzuk a generalt modellt és visszalepunk 4.-re
8. return(cpt)

# Implementálás

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia  
Példa  
Paraméterek  
tanulása  
KL-távolság  
Topológia  
tanulása  
BIC pont  
Tanulás  
algoritmusa

Implementálás

Adatgenerálás  
CPT-k meg-  
határozása  
Topológia  
tanulása

## 1 Grafikus modellek

## 2 Implementálás

- Adatgenerálás
- CPT-k meghatározása
- Topológia tanulása

Mesterséges adatokból a tanulás eredményeként visszkapjuk-e az eredeti hálót?

# Adatgenerálás adott háló alapján

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia  
Példa

Paraméterek  
tanulása

KL-távolság

Topológia  
tanulása

BIC pont

Tanulás  
algoritmusa

Implementálás

**Adatgenerálás**

CPT-k meg-  
határozása

Topológia  
tanulása

- adott:
  - a csomópontok száma
  - a függőségi relációk
  - a modell paraméterei
- az adattagok Bernoulli eloszlást követnek, a függőségi relációk figyelembevételével
- egyetlen adattag generálásának lépései:
  - egy  $[0, 1]$  intervallumba eső egyenletes eloszlású val. vált. generálása
  - csomópont szülei értékének meghatározása
  - az eloszlás paraméterének és a generált val.vált. értékének megfelelően a csomópont értékének meghatározása

# Feltételes valószínűség táblák meghatározása

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség

Inferencia  
Példa

Paraméterek  
tanulása

KL-távolság

Topológia  
tanulása

BIC pont

Tanulás  
algoritmusai

Implementálás

Adatgenerálás  
CPT-k meg-  
határozása

Topológia  
tanulása

- Adottak a gráf függőségi relációi.
- Lépések:
  1. meghatározzuk az aktuális csomópont szüleit
  2. kitöltjük a feltételes valószínűség tábla sorait:

Legyen

- $X$  az aktuális csomópont
- $Pa(X)$  az aktuális csomópont szülei
- $x$  a szülők egy érték kombinációja

$$P(X = 1 | Pa(X) = x) = \frac{P(X = 1, Pa(X) = x)}{P(Pa(X) = x)}$$

- Az együttes valószínűségeket az adatokból számított relatív gyakoriságokkal helyettesítjük.

- struktúra inicializálásának módszerei
  - maximális élszámú gráf generálása
  - generáljuk az élek számát majd az éleket
  - a gráf üres
  
- lokálisan keresünk egy "jobb" hálót
  - elveszünk egy élt a gráfból
  - a már meglévő élekhez hozzáadunk még egyet

# Program működése 1.

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia  
Példa

Paraméterek  
tanulása

KL-távolság

Topológia  
tanulása

BIC pont

Tanulás  
algoritmusa

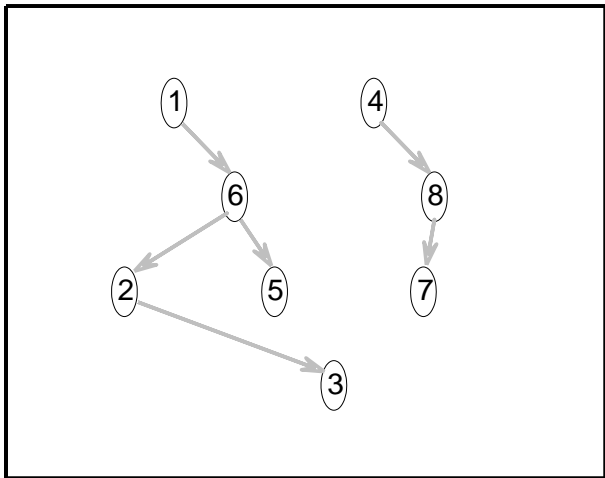
Implementálás

Adatgenerálás

CPT-k meg-  
határozása

**Topológia  
tanulása**

Az adatokat a következő struktúra alapján generáltam:



# Program működése 2.

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

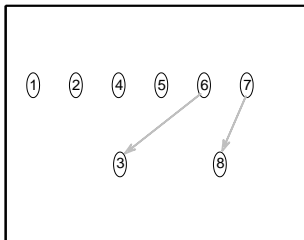
Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia  
Példa  
Paraméterek  
tanulása  
KL-távolság  
Topológia  
tanulása  
BIC pont  
Tanulás  
algoritmus

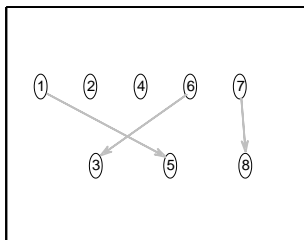
Implementálás

Adatgenerálás  
CPT-k meg-  
határozása

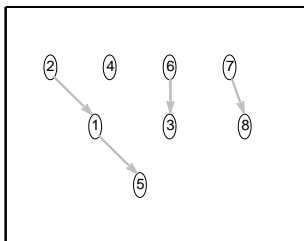
**Topológia  
tanulása**



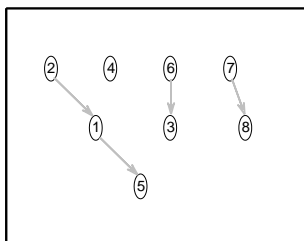
1.



2.



3.



4.



# Program működése 3.

Bayes hálók  
és Bayes  
tanulás

Reiz Beáta  
Témavezető:  
Csató Lehel

Grafikus  
modellek

Bayes hálók  
Függetlenség  
Inferencia  
Példa

Paraméterek  
tanulása

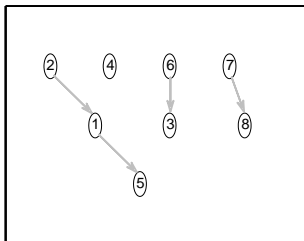
KL-távolság  
Topológia  
tanulása

BIC pont  
Tanulás  
algoritmus

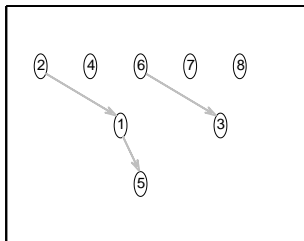
Implementálás

Adatgenerálás  
CPT-k meg-  
határozása

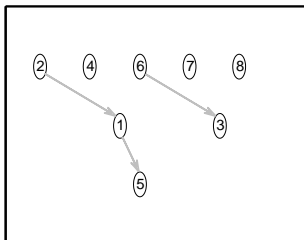
Topológia  
tanulása



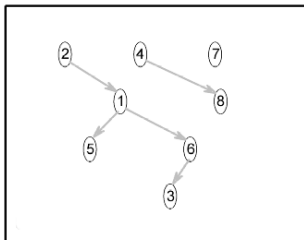
5.



6.



7.



8.

1. S. J. Russell, P. Norvig: Artificial Intelligence, Prentice Hall, 1995
2. Tom Mitchell: Machine Learning, McGraw-Hill, 1997
3. T. Jaakkola, M. Jordan: Variational probabilistic inference and the QMR database, 1998
4. Dimitris Margaritis: Learning Bayesian Network Model Structure from Data, 2003
5. Kevin Murphy's Bayes Net tutorial:  
[www.cs.ubc.ca/~murphyk/Bayes/bnintro.html](http://www.cs.ubc.ca/~murphyk/Bayes/bnintro.html)
6. David Heckerman's list of publications:  
[research.microsoft.com/~heckerman/](http://research.microsoft.com/~heckerman/)

Köszönöm a figyelmet.