Automatikus párhuzamosítás – egy szisztolikus példa

Áttekintés

- Bevezetés
- Példa – konkrét szisztolikus algoritmus
- Automatikus párhuzamosítási módszer – ötlet

Áttekintés

- Bevezetés
- Példa – konkrét szisztolikus algoritmus
- Automatikus párhuzamosítási módszer – ötlet

Áttekintés

- Bevezetés
- Példa – konkrét szisztolikus algoritmus
- Automatikus párhuzamosítási módszer – ötlet

Motiváció

Növekvő igény a gyors adatfeldolgozásra

Pl. néhány számításigényes feladatra:

- időjárás modellezés
- kép- illetve jelfeldolgozás
- szeizmológiai számítások
- tengeri áramlatok modellezése
- ...

megoldási lehetőségek:

- a hardver tökéletesítése – fizikai korlátok
- párhuzamos programozás

Gyorsítás

n processzor $=$ n-szeres sebességnövekedés?

pl.

“Proc.” száma	Idő	Feladat
1 tyúk	10 nap alatt	10 tojás
10 tyúk	1 nap alatt (10-szer gyorsabban)	10 tojás

Gyorsítás

n processzor $=$ n-szeres sebességnövekedés?

pl.

"Proc." száma	**Idő**	**Feladat**
1 tyúk	10 nap alatt	10 tojás
10 tyúk	1 nap alatt (10-szer gyorsabban)	10 tojás
	$* * *$	
1 nő	9 hónap alatt	1 gyerek
9 nő	~~1 hónap alatt~~ ...	

Párhuzamosság

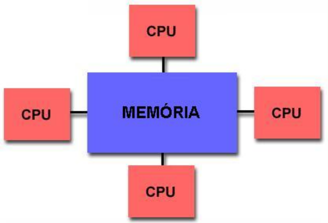
párhuzamosság megvalósítása:

- a feladatot kisebb részekre bontjuk
- az egyes részfeladatokat szétosztjuk a processzorok között, melyek párhuzamosan dolgozhatnak
- szükség van a processzorok munkájának az összehangolására
- a részfeladat megoldása lehetőleg ne tartson rövidebb ideig, mint ami szükséges a feladat kiosztásához

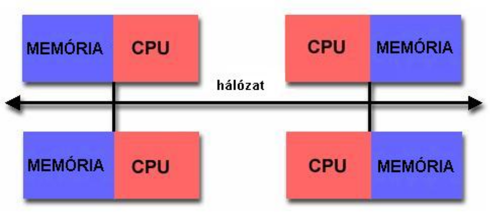
felmerülő kérdések:

- hogyan kapcsolódnak egymáshoz a processzorok (milyen párhuzamos architektúra)
- hogyan osszuk szét a feladatokat az egyes processzorok között

Különböző osztályozási kritériumok. . .



Szorosan összekapcsolt rendszerek (shared memory)



Gyengén összekapcsolt (szét)osztott rendszerek (distributed memory)

processzorok kapcsolatrendszere – különböző topológiák

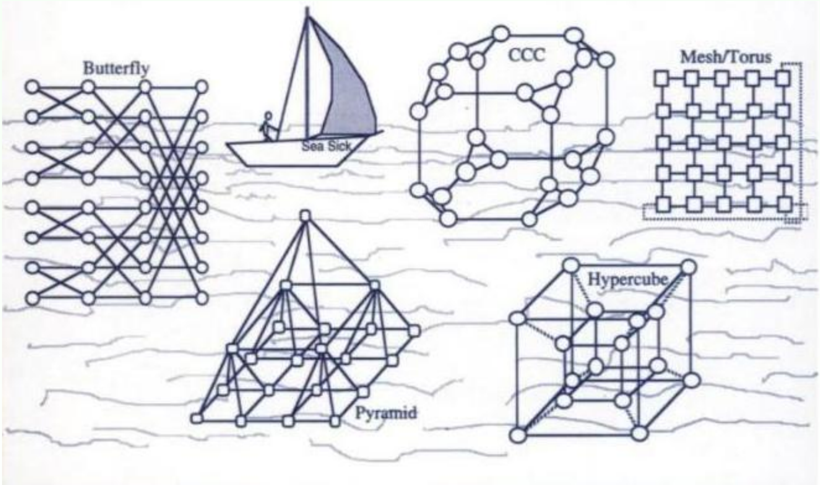


Figure: Az összekötő hálózatok “tengere” [Par:02]

Szisztolikus architektúrák

jellemzők:

- azonos (általában egyszerű) műveleteket végző processzorok (PE)
- szabályos struktúra, lokális kapcsolat a szomszédos PE-k közt
- szinkron működés (globális órajelre)
- globális be-/ kimenet (a "szélen" levő PE-ken keresztül)

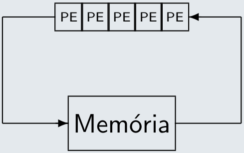


Figure: Lineáris szisztolikus architektúra

Példa – “Hosszú” egészek szorzása (szekvenciális alg.)

Feladat:

Adott két egész szám:
$\overline{A} = \overline{a_{m-1} a_{m-2} \dots a_1 a_0}$, illetve $\overline{B} = \overline{b_{n-1} b_{n-2} \dots b_1 b_0}$.
Számítsuk ki: $\overline{C} = \overline{c_{m+n-1} c_{m+n-2} \dots c_1 c_0} = \overline{A} \times \overline{B}$.

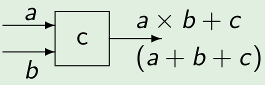


Figure: Processzor, mely képes elvégezni két számjegy “átviteles” szorzását (illetve összeadását)

Pl. $\overline{A} = 321$, $\overline{B} = 987$:

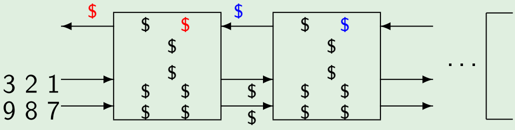
$$
\begin{array}{r}
\underline{321} \times 987 \\
2247 \\
2568 \\
\underline{2889} \\
316827
\end{array}
$$

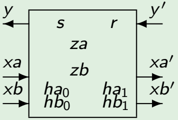
A szekveciális algoritmus bonyolultsága:

$O(m \times n)$

Példa – “Hosszú” (tetszőleges pontosságú) egészek szorzása (online szisztolikus alg.)

Lépés: 0





$\langle y, r\rangle =$

$d[1 \times 7] = \langle 7, 0\rangle$

$\langle \$, \$\rangle$

$\langle y, r\rangle =$

$d[xa \times xb], \text{if } s = \$ \neq xa$

$\langle \$, \$\rangle, \text{if } s = \$ = xa$

$d[a] = \langle a \mod \beta, \lfloor \frac{a}{\beta} \rfloor\rangle$

Eredmény:

Alg. bonyolultsága:

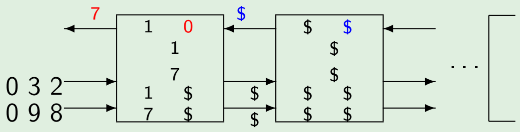
$O(m + n)$

Processzorok száma:

$\mathrm{Max}\{m, n\}/2$

Példa – “Hosszú” (tetszőleges pontosságú) egészek szorzása (online szisztolikus alg.)

Lépés: 1



$\langle y, r \rangle =$
$d[0 + 7 \times 2 + 1 \times 8] =$
$\langle 2, 2 \rangle$

$\langle \$, \$ \rangle$

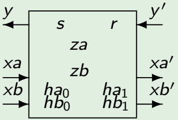
Eredmény: 7

Alg. bonyolultsága:

$O(m + n)$

Processzorok száma:

$\mathrm{Max}\{m, n\}/2$



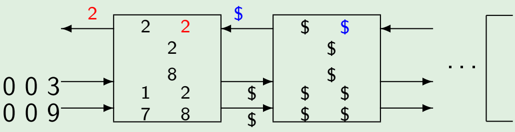
$\langle y, r \rangle =$
$d[r + hb_0 \times xa +$
$+ ha_0 \times xb], \text{if } s = 1$

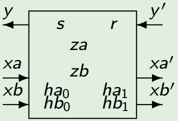
$\langle \$, \$ \rangle, \text{if } s = \$ = xa$

$$d[a] = \langle a \mod \beta, \lfloor \frac{a}{\beta} \rfloor \rangle$$

Példa – “Hosszú” (tetszőleges pontosságú) egészek szorzása (online szisztolikus alg.)

Lépés: 2





$\langle y, r\rangle =$
$d[2+2\times 8+7\times 3+1\times 9] = \langle 8,4\rangle$

$\langle \$, \$\rangle$

Eredmény: 27

$\langle y, r\rangle =$
$d[r + ha_1 \times hb_1 + + hb_0 \times xa + + ha_0 \times xb], \text{if } s = 2$

$\langle \$, \$\rangle, \text{if } s = \$ = xa$

$d[a] = \langle a \mod \beta, \lfloor \frac{a}{\beta} \rfloor\rangle$

Alg. bonyolultsága:

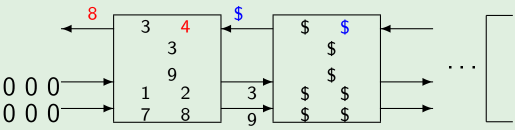
$O(m+n)$

Processzorok száma:

$\mathrm{Max}\{m,n\}/2$

Példa – “Hosszú” (tetszőleges pontosságú) egészek szorzása (online szisztolikus alg.)

Lépés: 3



$\langle y, r\rangle =$
$d[4 + 8 \times 3 + 2 \times 9 + 7 \times 0 + 1 \times 0] = \langle 6, 4\rangle$

$d[3 \times 9] = \langle 7, 2\rangle$

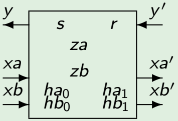
Eredmény: 827

Alg. bonyolultsága:

$O(m + n)$

Processzorok száma:

$\mathrm{Max}\{m, n\}/2$



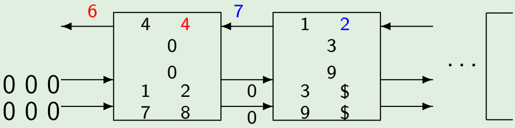
$\langle y, r\rangle =$
$d[r + hb_1 \times za + + ha_1 \times zb + + hb_0 \times xa + + ha_0 \times xb]$, if $s = 3$

$d[xa \times xb]$, if $s = \$ \neq xa$

$d[a] = \langle a \mod \beta, \lfloor \frac{a}{\beta} \rfloor \rangle$

Példa – “Hosszú” (tetszőleges pontosságú) egészek szorzása (online szisztolikus alg.)

Lépés: 4



$\langle y, r\rangle =$
$d[4+8\times 0+1\times 0+7\times 0+1\times 0+7] = \langle 1, 1\rangle$

$d[2+9\times 0+3\times 0] = \langle 2, 0\rangle$

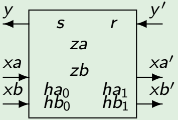
Eredmény: 6827

Alg. bonyolultsága:

$O(m+n)$

Processzorok száma:

$\mathrm{Max}\{m, n\}/2$



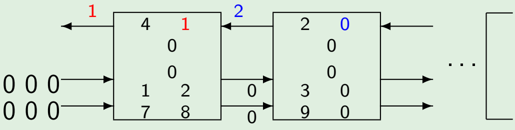
$\langle y, r\rangle =$
$d[r + hb_1 \times za + ha_1 \times zb + hb_0 \times xa + ha_0 \times xb + y'], \text{if } s = 4$

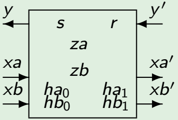
$d[r + hb_0 \times xa + ha_0 \times xb], \text{if } s = 1$

$d[a] = \langle a \mod \beta, \lfloor \frac{a}{\beta} \rfloor \rangle$

Példa – "Hosszú" (tetszőleges pontosságú) egészek szorzása (online szisztolikus alg.)

Lépés: 5





$\langle y, r\rangle =$
$d[1+8\times 0+1\times 0+7\times 0+1\times 0+2] = \langle 3, 0\rangle$

$d[0+0\times 0+9\times 0+3\times 0] = \langle 0, 0\rangle$

Eredmény: 16827

Alg. bonyolultsága:

$O(m+n)$

Processzorok száma:

$\mathrm{Max}\{m, n\}/2$

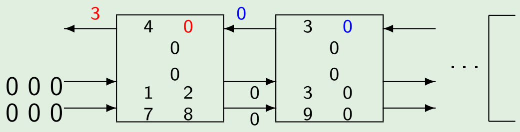
$\langle y, r\rangle =$
$d[r + hb_1 \times za + ha_1 \times zb + hb_0 \times xa + ha_0 \times xb + y'], \text{if } s = 4$

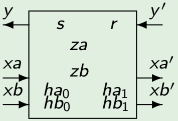
$d[r + ha_1 \times hb_1 + hb_0 \times xa + ha_0 \times xb], \text{if } s = 2$

$d[a] = \langle a \mod \beta, \lfloor \frac{a}{\beta} \rfloor \rangle$

Példa – “Hosszú” (tetszőleges pontosságú) egészek szorzása (online szisztolikus alg.)

Lépés: 6





$\langle y, r \rangle =$

Eredmény: 316827

Alg. bonyolultsága:

$O(m+n)$

Processzorok száma:

$\mathrm{Max}\{m, n\}/2$

$d[a] = \langle a \mod \beta, \lfloor \frac{a}{\beta} \rfloor \rangle$

Automatikus párhuzamosítás – ötlet

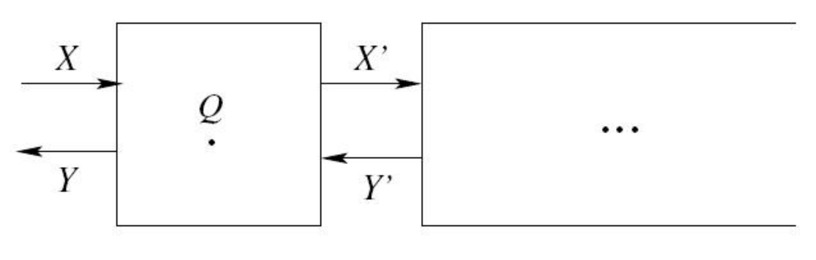


Figure: Lineáris szisztolikus rács – induktív (rekurzív) felépítése

- hasonlóság
  – a szisztolikus rács induktív felépítése, illetve
  – a feadat rekurzív megfogalmazása (funkcionális program argumentumának induktív dekompozíciója) között

Automatikus párhuzamosítás – ötlet

Két lépés:

konkrét architektúra–típus előzetes tanulmányozása

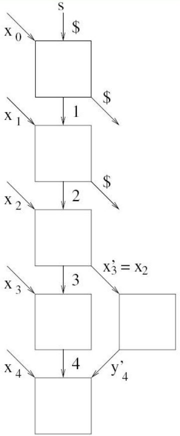
cél: találni egy rekurzív összefüggést, mely az illető típusú architektúra működését jellemzi

ugyanezt a logikát alkalmazzuk fordítva:

ha sikerül a feladatnak egy olyan rekurzív leírását megadni, ami megfelel egy (vagy több) bizonyos architektúra működését jellemző leírásnak $\Rightarrow$ a feladatot (viszonylag) egyszerű levetíteni az illető típusú architektúrára.

Egy konkrét architektúra–típus tanulmányozása

Adatfolyam egy online szisztolikus tömbben, mely a bemenetet $k = 2$ lépést követően kezdi továbbítni.



- az $Y = F[X]$ eredménylista (az első 4 elem kivételével) kiszámolható rekurzívan X_4 illetve $F[X_2]$ függvényében

$A * B$ kifejezés kifejtése

kifejtés szabályai (polinomok szorzása esetén):

- skaláris elem hozzáadása egy polinomhoz:

$$a \dot{+} (b \dot{\smile} B) = (a \ddot{+} b) \dot{\smile} B$$

- két polinom összeadása:

$$(a \dot{\smile} A) + (b \dot{\smile} B) = (a \ddot{+} b) \dot{\smile} (A + B)$$

- skaláris elem szorzása egy polinommal:

$$a \dot{*} (b \dot{\smile} B) = (a \ddot{*} b) \dot{\smile} (a \dot{*} B)$$

- két polinom szorzása: $(a \dot{\smile} A) * (b \dot{\smile} B) =$
  $(a \ddot{*} b) \dot{\smile} ((a \dot{*} B) + (b \dot{*} A) + (0 \dot{\smile} (A * B)))$

$A * B$ kifejezés kifejtése (polinomok szorzása esetén)

$$
\begin{aligned}
& A * B = \\
& = (a_0 \dot{\smile} A_1) * (b_0 \dot{\smile} B_1) \\
& = \langle a_0 \ddot{*} b_0 \rangle \smile + \begin{cases} a_0 \dot{*} B_1 \\ b_0 \dot{*} A_1 \\ 0 \dot{\smile} (A_1 * B_1) \end{cases} \\
& = \langle a_0 \ddot{*} b_0 \rangle \smile + \begin{cases} a_0 \dot{*} (b_1 \dot{\smile} B_2) \\ b_0 \dot{*} (a_1 \dot{\smile} A_2) \\ 0 \dot{\smile} A_1 * B_1 \end{cases} \\
& = \langle a_0 \ddot{*} b_0,\ a_0 \ddot{*} b_1 \ddot{+} b_0 \ddot{*} a_1 \rangle \smile + \begin{cases} a_0 \dot{*} B_2 \\ b_0 \dot{*} A_2 \\ A_1 * B_1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \ldots \\
&= \langle \quad a_0 \ddot{*}\ b_0, \\
&\qquad a_0 \ddot{*}\ b_1 \ddot{+}\ b_0 \ddot{*}\ a_1, \\
&\qquad a_2 \ddot{*}\ b_0 \ddot{+}\ a_1 \ddot{*}\ b_1 \ddot{+}\ a_0 \ddot{*}\ b_2), \\
&\qquad a_3 \ddot{*}\ b_0 \ddot{+}\ a_2 \ddot{*}\ b_1 \ddot{+}\ a_1 \ddot{*}\ b_2 \ddot{+}\ a_0 \ddot{*}\ b_3 \ \rangle \smile \\
&\smile ((a_0 \dot{*}\ B_4) + (b_0 \dot{*}\ A_4) + \\
&\qquad +(a_1 \dot{*}\ B_3) + (b_1 \dot{*}\ A_3) + (A_2 * B_2))
\end{aligned}
$$

a kapott rekurzív összefüggés:

$$
T_4[A * B] = + \begin{cases} H_0[A] \dot{*}\ T_4[B] \\ H_0[B] \dot{*}\ T_4[A] \\ H_1[A] \dot{*}\ T_3[B] \\ H_1[B] \dot{*}\ T_3[A] \\ T_2[A] * T_2[B] \end{cases}
$$

Az átmenetfüggvény meghatározása a kapott rekurzív összefüggés alapján

a kifejezés elemeinek megfeleltetése az egyes regisztereknek:

- $T_2[A] * T_2[B] \longrightarrow y'$
- $T_4[A * B] \longrightarrow y$
- $T_4[A] \longrightarrow xa,\ T_4[B] \longrightarrow xb$
- $T_3[A] \longrightarrow za,\ T_3[B] \longrightarrow zb$
- $H_0[A] \longrightarrow ha_0,\ H_0[B] \longrightarrow hb_0$
- $H_1[A] \longrightarrow ha_1,\ H_1[B] \longrightarrow hb_1$

Az első négy elem kiszámítását megadó összefüggésből hasonló módon kapjuk az átmenetfüggvény y kiszámítására vonatkozó részét az első négy lépésben (amikor a jobboldali szomszéd PE még nem szolgáltat semmiféle részeredményt).