Hatványsorok normált gyűrűkben és Banach-algebrákban

Darvas Tamás
Babeș-Bolyai Tudományegyetem
Matematika-informatika szak, II. év

2006. május 10.

A problémakör ...

Legyen A egy kommutatív normált gyűrű, és $p, q \in A[[X]]$. Legyen R_p és R_q, a megfelelő sorokhoz tartozó konvergenciasugár, $p \cdot q$ pedig jelöli a p és q Cauchy-szorzatát. Tanulmányozzuk azt az esetet, amikor:

$$R_{p \cdot q} > \min \{R_p, R_q\}$$

Hadamard tételei

Értelmezés: Legyen $\rho \in \mathbf{C}[[X]]$, azaz $\rho(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ egy komplex hatványsor. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$D_{m,p} = \left\| \begin{matrix} a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \cdots & a_{m+p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & a_{m+3} & \cdots & a_{m+p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m+p} & a_{m+p+1} & a_{m+p+2} & \cdots & a_{m+2p} \end{matrix} \right\|$$

$$l_p = \limsup_{m \to \infty} |D_{m,p}|^{\frac{1}{m}}$$

$$l = \limsup_{m \to \infty} |a_m|^{\frac{1}{m}}$$

Hadamard tételei

Tétel: [Hadamard tételei]

- $l_p \leq l^{p+1}$ $\forall p \in \mathbf{N}$
- Annak az elégséges és szükséges feltétele, hogy létezik olyan p-ed fokú P polinom, melyre a $P \cdot \rho$ hatványsor konvergenciasugara nagyobb mint a ρ soré, a következő:

$$l_p < l^{p+1}$$

Hadamard tételei

- Ha $l_{p-1} = l^p$ és $l_p < l^{p+1}$, akkor képezve a következő A_m rendszereket $[A_m^1,\ A_m^2, ..., A_m^p]$ ismeretlenekkel:

$$A_m : \begin{cases} a_{m+p} + A_m^1 a_{m+p-1} + \ldots + A_m^p a_m & = 0 \\ a_{m+p+1} + A_m^1 a_{m+p} + \ldots + A_m^p a_{m+1} & = 0 \\ \ldots & \\ a_{m+2p-1} + A_m^1 a_{m+2p-2} + \ldots + A_m^p a_{m+p-1} & = 0 \end{cases}$$

kapjuk, hogy $\exists \lim_{m\to\infty}[A_m^1, A_m^2, ..., A_m^p] = [A^1, A^2, ..., A^p]$. Képezve a $P(X) = 1 + A^1 X + ... + A^p X^p$ polinomot, a $P \cdot \rho$ hatványsor konvergenciaköre nagyobb mint a ρ soré.

Alkalmazás

Példa: A fenti tétel alkalmazásaként nézzük a következő példát. Legyen $\theta \in C[[X]]$ a következő hatványsor:

$$\theta(X) = 1 - 2X + X^2 + X^3 - 2X^4 + X^5 + X^6 - 2X^7 + X^8 + \dots$$

Határozzuk meg θ összegét tudva, hogy a keresett összegfüggvény racionális törtfüggvény ($\frac{R(X)}{P(X)}$ alakú, ahol R es P polinomok).

Megoldás: Komplex analízisből tudjuk, hogy a θ sor konvergenciasugara egyenlő lesz a P polinom gyökeinek abszolút érténeinek minimumával. Annak függvényében, hogy hány ilyen minimális abszolút értékű gyök létezik, annyiad fokú lesz az Hadamard tételeiben szereplő legkisebb fokú P polinom.

Alkalmazás

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \ 3k+2 \text{ vagy } 3k \text{ alakú} \\ -2, & \text{ha } n \ 3k+1 \text{ alakú} \end{cases}$$

A fentiek alapján: $l = \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}} = 1.$ Egyszerű számításokkal kapjuk:$l_1 = \limsup_{m\to\infty} \|D_{m,1}\|^{\frac{1}{m}} = l^2 = 1.$ Tehát nem létezik első fokú P polinom úgy, hogy a $P \cdot \theta$ sor konvergenciasugara nagyobb legyen mint a θ soré. Hasonló számítások után viszont : $0 = l_2 = \limsup_{m\to\infty} \|D_{m,2}\|^{\frac{1}{m}} < l^3 = 1.$ Vagyis a keresett P polinom másodfokú.

Alkalmazás

Keressük meg ezt a polinomot! Képezzük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 1 - A_m^1 \cdot 2 + A_m^2 \cdot 1 & = 0 \\ -2 + A_m^1 \cdot 1 + A_m^2 \cdot 1 & = 0 \end{cases}$$

Belátható, hogy a megoldások $A_m^1 = A_m^2 = 1 \ \forall m \in \mathbf{N}$, vagyis a keresett polinom:

$$P(x) = 1 + 1 \cdot X + 1 \cdot X^2$$

Szorozzuk össze a P polinomot a θ sorral: $P\theta(X) = 1 - X = R(X)$. Ezzel megkaptuk θ összegét:

$$\theta(x) = \frac{1 - x}{1 + x + x^2}$$

Alkalmazás

Megjegyzés: Általánosítás tetszőleges ρ komplex hatványsorra, melynek az összege racionális törtfüggvény :

1. i $= 0$, meghatározzuk ρ konvergenciasugarát($\frac{1}{l} = R$)
2. megkeressük a Hadamard tételében szereplő P_i polinomot
3. összeszorozzuk a P_i polinomot a ρ sorral, vagyis $\rho = \rho \cdot P_i$
4. ha ρ egy polinom, akkor végeztünk, ha végtelen sor, akkor alkalmazzuk a 2. lépést miközben növeljük az i indexet
5. összegzünk: a keresett racionális törtfüggvény számlálója $P_0 \cdot P_1 \cdot \ldots \cdot P_i \cdot \rho$ lesz, míg nevezője $P_0 \cdot P_1 \cdot \ldots \cdot P_i$.

Normált gyűrűk

Értelmezés: Legyen $(A, +, \cdot)$ egy asszociatív gyűrű és $N : A \to \mathbf{R}$ egy pozitív függvény. Azt mondjuk, hogy $(A, +, \cdot, N)$ normált gyűrű, ha teljesülnek a következő feltételek:

- $N(0) = 0$ és $N(x) > 0\ \forall x \in A^*$
- $N(-x) = N(x)\ \forall x \in A$
- $N(x + y) \leq N(x) + N(y)\ \forall x, y \in A$
- $N(x \cdot y) \leq N(x) \cdot N(y)\ \forall x, y \in A$

Normált gyűrűk

N normát **"nem-Archimédeszinek"** nevezzük, ha a harmadik feltétel helyett a következő, ennél erősebb áll fenn:

- $N(x+y) \leq max\,\{N(x); N(y)\}\ \forall x, y \in A$

N norma **"homogén a szorzásra nézve"** vagy **"abszolút érték"**, ha a negyedik feltétel helyett a következő, ennél erősebb áll fenn:

- $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)\ \forall x, y \in A$

Példák

Példa:

- Normált gyűrűre a legegyszerűbb példa a valós vagy a komplex számok teste felruházva a szokásos abszolút értékkel.
- Legyen $x \in \mathbf{Q}$ tetszőleges és $p \in \mathbf{N}$ prím. Jelentse $|\cdot|_p : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ a következő függvényt:
$$|x|_p = \frac{1}{p^{ord_p(x)}}$$
$ord_p(x) \in \mathbf{Z}$-t úgy kapjuk, hogy x-et a következő alakba írjuk: $x = p^{ord_p(x)} \cdot \frac{u}{v}$, ahol sem u sem v nem osztható p-vel, és legyen definíció szerint $|0|_p = 0$ (pl.$\left|\frac{14}{5}\right|_2 = \frac{1}{2}$). Észrevehető, hogy $\mathbf{Q}_p = (\mathbf{Q}, +, \cdot, |\cdot|_p)$ egy normált test, melyben $|\cdot|_p$ norma nem-Archimédeszi.
- A fentihez hasonlóan megszerkeszthető $\mathbf{Z}_p = (\mathbf{Z}, +, \cdot, |\cdot|_p)$ kommutatív normált gyűrű is. Fontos megjegyzés, hogy $|\cdot|_p$ homogén a szorzásra nézve: $|x \cdot y|_p = |x|_p \cdot |y|_p \ \forall x, y \in \mathbf{Q}$.

Tétel: Ha $(A, +, \cdot, N)$-ben N abszolút értek, akkor $(A, +, \cdot)$ integritástartomány.

Bizonyítás: Feltételezzük, hogy nem igaz a tétel állítása. Legyenek $x, y \in A$ zérusosztók ú.h. $x, y \neq 0$ és $x \cdot y = 0$. Ekkor $N(x)N(y) =$ $= N(x \cdot y) = N(0) = 0$, tehát $N(x) = 0$ vagy $N(y) = 0$, ami ellentmondás. $\square$

Megjegyzés: Mivel A zerusosztómentes következik, hogy megszerkeszthető $frac(A) = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in A, b \in A^* \right\}$ hányadostest és $A \leq frac(A)$. Legyen $M : frac(A) \to \mathbf{R}$ a következő függvény:

$$M\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{N(a)}{N(b)}$$

Észrevehető, hogy M jólértelmezett függvény, amely abszolút érték $frac(A)$ fölött. Természetesen A topológiai teljessége nem elegendő a $frac(A)$ test teljességéhez a származtatott normával. Jelölje tehát a továbbiakban $Frac(A)$ a $frac(A)$ test topológiailag teljes burkolóját, amely szintén test.

Hadamard tételei normált gyűrűkre

Célkitűzés: Az előbbiekben ismertetett Hadamard eredmény kiterjesztése tetszőleges normált gyűrűre, melyben a norma abszolút érték. Jelölje $\rho \in A[[X]]$ a továbbiakban a következő hatványsort:

$$\rho(X) = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \ldots + c_n X^n + \ldots$$

Legyen $0 < l_\rho < +\infty$ a ρ hatványsor **Cauchy-féle állandó**ja, azaz $l_\rho = \limsup_{k\to\infty} \|c_k\|^{\frac{1}{k}}$. Ugyanakkor legyen $r_\rho = \frac{1}{l_\rho}$ a ρ konvergenciasugara.

Hadamard tételei normált gyűrűkre

Értelmezés: Legyen $A_\rho[X]$ és $Frac(A)_\rho[X]$ a következő két halmaz:

$$A_\rho[X] = \left\{\theta \in A[X] \middle| l_{\theta\cdot\rho} < l_\rho\right\}$$

$$Frac(A)_\rho[X] = \left\{\theta \in Frac(A)[X] \middle| l_{\theta\cdot\rho} < l_\rho\right\}$$

$A_\rho[X]$ $(Frac(A)_\rho[X])$ azon $A[X]$-beli ($Frac(A)[X]$-beli) polinomokat tartalmazza, melyeket összeszorozva ρ-val a kapott sor konvergenciaköre nagyobb mint a ρ soré.(pl. ha $\rho(X) = 1 + X + X^2 + \ldots$, akkor $1 - X \in A_\rho[X]$). Belátható, hogy $A_\rho[X] \subseteq Frac(A)_\rho[X]$.

Tétel: $A_\rho[X]$ ideálja $A[X]$-nek $(A_\rho[X] \trianglelefteq A[X])$. $Frac(A)_\rho[X]$ ideálja $Frac(A)[X]$-nek $(Frac(A)_\rho[X] \trianglelefteq Frac(A)[X])$.

Hadamard tételei normált gyűrűkre

Értelmezés: Azt mondjuk, hogy $P \in A[X]$ a ρ hatványsor egy **minimálpolinom**ja, ha teljesíti az alábbi két feltételt:

- $P \neq 0$ és $l_{P \cdot \rho} < l_\rho$
- $\nexists Q \in A[X]$ ú.h. $\deg(Q) < \deg(P)$ és $l_{Q \cdot \rho} < l_\rho$.

Tétel: Legyenek $P, Q \in A_\rho[X]$ minimálpolinomok, ekkor $\exists a, b \in A$ ú.h. $aP - bQ = 0$.

Hadamard tételei normált gyűrűkre

Értelmezés: Jelölje P_ρ azt a $Frac(A)_\rho[X]$-beli minimális fokú polinomot, melynek szabad tagja 1. A következő tétel megmutatja, hogy ez a polinom egyértelmű.

Tétel:

$$Q \in A_\rho[X] \Leftrightarrow \exists F \in Frac(A)[X] \text{ ú.h.} Q(X) = F(X)P_\rho(X) \in A[X]$$

Bizonyítás: Mivel $Frac(A)[X]$ főideálgyűrű következik, hogy $\exists E \in Frac(A)[X]$ ú.h. $Frac(A)_\rho[X] = (E)$. Legyen $P_\rho = \frac{E}{e_0}$. Mivel $A_\rho[X] \subseteq Frac(A)_\rho[X]$ következik a tétel állítása. $\square$

Megjegyzés: A fenti állítás következménye, hogy a $A_\rho[X]$ elemei egyértelműen meghatározottak P_ρ által. A következőkben módszert adunk P_ρ meghatározására (ha létezik ilyen polinom).

Hadamard tételei normált gyűrűkre

Értelmezés: Hozzárendeljük a $\rho \in A[[X]]$ sorhoz a következő állandókat:

$$D_{m,p} = \left\| \begin{array}{ccccc} c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+p} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} & \cdots & c_{m+p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+p} & c_{m+p+1} & c_{m+p+2} & \cdots & c_{m+2p} \end{array} \right\|$$

$$l_p = \limsup_{m\to\infty} \| D_{m,p} \|^{\frac{1}{m}}$$

$$l = \limsup_{m\to\infty} \| c_m \|^{\frac{1}{m}}$$

Hadamard tételei normált gyűrűkre

Tétel: Legyen $(A_n)_{n\geq k}$ a következő "determináns-sorozat":

$$A_n = \left\| \begin{matrix} c_{n+i^n_{1,1}} & c_{n+i^n_{1,2}} & c_{n+i^n_{1,2}} & \cdots & c_{n+i^n_{1,p}} \\ c_{n+i^n_{2,1}} & c_{n+i^n_{2,2}} & c_{n+i^n_{1,2}} & \cdots & c_{n+i^n_{2,p}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+i^n_{p,1}} & c_{n+i^n_{p,2}} & c_{n+i^n_{p,2}} & \cdots & c_{n+i^n_{p,p}} \end{matrix} \right\|$$

ahol $i^n_{i,j} \in \mathbf{N}$ es $|i^n_{i,j}| \leq k \ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ (k tetszőleges pozitív szám). Azt állítjuk, hogy: $\limsup_{n\to\infty} \|A_n\|^{\frac{1}{n}} \leq l^p$

Következmény: $l_p \leq l^{p+1} \ \forall p \in \mathbf{N}$

Hadamard tételei normált gyűrűkre

Tétel: Tételezzük fel, hogy létezik olyan $P(X) = C^0 + C^1 X + \ldots + C^p X^p \in Frac(A)[X]$ polinom ($C^0 \neq 0$), melyre a $P \cdot \rho$ hatványsor konvergenciasugara nagyobb mint a ρ soré. Ekkor állíthatjuk, hogy:

$$l_p < l^{p+1}$$

Tétel: Ha $l_p < l^{p+1}$ és $l_{p-1} = l^p$, akkor létezik olyan $P(Z) = 1 + C^1 Z + \ldots + C^p Z^p \in Frac(A)[X]$ polinom, melyre a $P \cdot \rho$ sor konvergenciasugara nagyobb mint a ρ soré.

Megjegyzés: Könnyen igazolható, hogy:

$$l_p < l^{p+1} \Rightarrow \exists Q \in Frac(A)_\rho[X] \text{ ú.h. } \deg Q = p$$

Ez közvetlen következménye annak, hogy P_ρ oszt minden $Frac(A)_\rho[X]$-beli polinomot.

Tétel: [Hadamard tételei "normált gyűrűkre"]

- $l_p \leq l^{p+1}\ \forall p \in \mathbf{N}$
- Ha $l_{p-1} = l^p$ és $l_p < l^{p+1}$, akkor képezve az alábbi A_m "egyenletrendszer-sorozatot" $[C_m^1, C_m^2, \ldots, C_m^p]$ ismeretlenekkel:

$$A_m : \begin{cases} c_{m+p} + C_m^1 c_{m+p-1} + \ldots + C_m^p c_m & = 0 \\ c_{m+p+1} + C_m^1 c_{m+p} + \ldots + C_m^p c_{m+1} & = 0 \\ \ldots & \\ c_{m+2p-1} + C_m^1 c_{m+2p-2} + \ldots + C_m^p c_{m+p-1} & = 0 \end{cases}$$

$\exists \lim_{m\to\infty}[C_m^1, C_m^2, \ldots, C_m^p] = [C^1, C^2, \ldots, C^p] \in Frac(A)^p$.
Ha $[C^1, C^2, \ldots, C^p] \in frac(A)^p \Rightarrow \exists Z \in A[X]$ ú.h. $\deg Z = p$ és Z a ρ sor minimálpolinomja

Példák

Megjegyzés: Az $l_{p-1} = l^p$ és $l_p < l^{p+1}$ feltételek szükségesek, de ellentétben a komplex esettel, nem elégségesek a minimálpolinom létezéséhez, mint ahogy ezt az alábbi példa is igazolja.

Példa: Legyen a gyűrű, amely fölött dolgozunk **Z**, az abszolút értékkel ellátva, és legyen $\rho \in \mathbf{Z}[[X]]$ az a hatványsor, melynek együtthatóit az alábbi képlet határozza meg:

$$z_n = [e^n]$$

Könnyen észrevehető, hogy $l = e$. Megkeressük a P_ρ polinomot, de előbb lássuk be az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$-1 < [e^{n+1}] - e[e^n] < e$$

Következik, hogy $|[e^{n+1}] - e[e^n]| < e \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Példák

Vizsgáljuk meg $D_{m,1}$ értéket:

$$|D_{m,1}| = \left| \begin{Vmatrix} z_m & z_{m+1} \\ z_{m+1} & z_{m+2} \end{Vmatrix} \right| = \left| \begin{Vmatrix} [e^m] & [e^{m+1}] - e[e^m] \\ [e^{m+1}] & [e^{m+2}] - e[e^{m+1}] \end{Vmatrix} \right| \leq$$

$$\leq 2\left[e^{m+2}\right] \cdot \max\left\{ \left| \left[e^{m+2}\right] - e\left[e^{m+1}\right] \right|, \left| \left[e^{m+1}\right] - e\left[e^m\right] \right| \right\} \leq$$

$$\leq 2e \cdot \left[e^{m+2}\right]$$

Írhatjuk, hogy:

$$l_1 = \limsup_{m\to\infty} |D_{m,1}|^{\frac{1}{m}} \leq \limsup_{m\to\infty} \left(2e \cdot \left[e^{m+2}\right]\right)^{\frac{1}{m}} = e < e^2 = l^2$$

Következik, hogy $\deg(P_\rho) = 1$.

Példák

Keressük meg P_ρ polinomot:

$$A_m : \{ \; z_{m+1} + C_m^1 z_m \quad = 0$$

A megoldás $C_m^1 = -\frac{z_{m+1}}{z_m} = -\frac{[e^{m+1}]}{[e^m]}$. Könnyen észrevehető, hogy $\lim_{m\to\infty} C_m^1 = -e$, tehát:

$$P_\rho(X) = 1 - eX$$

Nyilvánvaló, hogy $P_\rho \in Frac(A)[X] \backslash frac(A)[X] = \mathbf{R}[X] \backslash \mathbf{Q}[X]$. Mivel P_ρ oszt minden $A_\rho[X]$-beli polinomot következik, hogy $A_\rho[X]$ a null-polinomon kívül nem tartalmaz semmit.

Példák

Példa: Ez a példa megmutatja, hogy $Q \in A_\rho[X]$ minimálpolinom esetén nem mindig lesz $\deg(P_\rho) = \deg(Q)$. Legyen a gyűrű, amely fölött dolgozunk **Z** , ellátva az abszolút értékkel, és legyen $\rho \in \mathbf{Z}[[X]]$ az a hatványsor, melynek együtthatóit az alábbi képlet szerint határozzuk meg:

$$z_n = \left[\sqrt{2}^n\right]$$

Észrevehető, hogy $l = \sqrt{2}$. Megkeressük a P_ρ polinomot, de előbb lássuk be, hogy $|[\sqrt{2}^{n+1}] - \sqrt{2}[\sqrt{2}^n]| < \sqrt{2}\ \forall n \in \mathbf{N}$.

Példák

Vizsgáljuk meg $D_{m,1}$ értékét:

$$|D_{m,1}| = \left| \left\| \begin{matrix} z_m & z_{m+1} \\ z_{m+1} & z_{m+2} \end{matrix} \right\| \right| =$$

$$= \left| \left\| \begin{matrix} \left[\sqrt{2}^m\right] & \left[\sqrt{2}^{m+1}\right] - \sqrt{2}\left[\sqrt{2}^m\right] \\ \left[\sqrt{2}^{m+1}\right] & \left[\sqrt{2}^{m+2}\right] - \sqrt{2}\left[\sqrt{2}^{m+1}\right] \end{matrix} \right\| \right| \leq 2\sqrt{2} \cdot \left[\sqrt{2}^{m+2}\right]$$

Tehát írhatjuk:

$$l_1 = \limsup_{m\to\infty} |D_{m,1}|^{\frac{1}{m}} \leq \limsup_{m\to\infty} (2\sqrt{2} \cdot \left[e^{m+2}\right])^{\frac{1}{m}} = \sqrt{2} < \sqrt{2}^2 = l^2$$

vagyis $\deg(P_\rho) = 1$.

Példák

Keressük meg P_ρ-t:

$$A_m : \left\{ \; z_{m+1} + C_m^1 z_m \quad = 0 \right.$$

A megoldás $C_m^1 = -\frac{\left[\sqrt{2}^{m+1}\right]}{\left[\sqrt{2}^{m}\right]}$. Könnyen észrevehető, hogy $\lim_{m\to\infty} C_m^1 = \sqrt{2}$, tehát:

$$P_\rho(X) = 1 - \sqrt{2}X$$

Feltételezzük, hogy létezik $Q \in A_\rho[X]$ minimálpolinom. Láttuk, hogy $P_\rho \in \mathbf{R}[X] \backslash \mathbf{Q}[X]$. Mivel P_ρ oszt minden $A_\rho[X]$-beli polinomot következik, hogy $\deg(Q) > \deg(P_\rho)$. Legyen Q alakja a következő:

$$Q(X) = 1 - 2X^2 = (1 - \sqrt{2}X)(1 + \sqrt{2}X)$$

tehát Q lehet a ρ egy minimálpolinomja, és $\deg(Q) = 2$.

Jelentésen a továbbiakban $(A, +, \cdot, \|\cdot\|)$ egy kommutatív normált **K** fölötti Banach-algebrát (**K** = **C** vagy **K** = **R**). Azt mondjuk, hogy a egy A-beli hatványsor, ha $a : \mathbf{K} \longrightarrow A$:

$$a(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n + \ldots \quad \forall x \in \mathbf{K}$$

Legyen p és q két A-beli hatványsor, melyeknek együtthatói $(p_m)_{m \in \mathbf{N}}$ és $(q_m)_{m \in \mathbf{N}}$. Így azonosítható p és q a következő A^∞-beli oszlopvektorokkal:

$$p \longrightarrow [p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots]^t$$

$$q \longrightarrow [q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots]^t$$

Értelmezés: Legyen $D : A^\infty \to M_\infty(A)$ a következő függvény:

$$D(p) = \begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_1 & p_0 & 0 & 0 & \dots \\ p_2 & p_1 & p_0 & 0 & \dots \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Könnyen igazolható, hogy D algebramorfizmus A^∞ és $M_\infty(A)$ között. A fent bemutatott D operátor segítségével értelmezünk egy $'\cdot'$ műveletet az A^∞ halmazon:

$$p \cdot q = D(p) \cdot q = D(q) \cdot p$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $(A, +, \cdot, \mathbf{K})$ kommutatív algebra voltából $(A^\infty, +, \cdot, \mathbf{K})$ is kommutatív algebra.

Értelmezés: Legyen $l : A^\infty \to \mathbf{R}_\infty$ a következő valós "funkcionál":

$$l(q) = \limsup_{m\to\infty} \|q_m\|^{\frac{1}{m}}$$

Megjegyzés: A továbbiakban a $D(p)$ és $l(p)$ jelölések helyett, D_p és l_p lesz használatos.

Banach-algebrák

Tétel: $\forall p, q \in A^\infty$ esetén:

$$l_{p+q} \leq max\left\{l_p, l_q\right\}$$

Tétel: $\forall p, q \in A^\infty$ esetén:

$$l_{p \cdot q} \leq \max\left\{l_p, l_q\right\}$$

Értelmezés: Legyen $p \in A^\infty$ úgy, hogy $+\infty > l_p > 0$. Bevezetjük a következő három halmazt:

$$U_p = \{q \in A^\infty | l_{p\cdot q} < l_p\}$$

$$V_p = \{q \in A^\infty | l_q < l_p, l_{p\cdot q} < l_p\}$$

$$W_1 = \{q \in A^\infty | l_q < 1\}$$

Tehát U_p azon q hatványsorok halmaza, melyekre a $p \cdot q$ sor konvergenciaköre nagyobb mint a p soré ($l_{p\cdot q} < l_p$). Hasonlóan, V_p azon q hatványsorokat tartalmazza, melyeknek megvan az előbb elmondott tulajdonságuk és konvergenciasugaruk nagyobb mint a p soré ($l_q < l_p$), végül W_1 pedig azokat, amelyeknek konvergenciasugaruk szig. nagyobb mint 1.

Tétel: U_p résztere A^∞-nek.

Tétel: V_p résztere U_p-nek. V_p és W_1 részalgebrái A^∞-nek.

Értelmezés: Legyen $\rho \in A^\infty$ ú.h. $+\infty > l_\rho > 0$. Jelentse $T_\rho : A^\infty \to A^\infty$ a következő függvényt:

$$T_\rho(q) = \left[q_0, \frac{q_1}{l_\rho}, \frac{q_2}{l_\rho^2}, \frac{q_3}{l_\rho^3}, \frac{q_4}{l_\rho^4}, \ldots \right]^t$$

Egyértelmű, hogy T_ρ algebraautomorfizmus , tehát $U_\rho \simeq T_\rho(U_\rho)$, illetve $V_\rho \simeq T_\rho(V_\rho)$. Legyen $U'_\rho = T_\rho(U_\rho)$, $V'_\rho = T_\rho(V_\rho)$ és $\rho' = T_\rho(\rho) = \left[\frac{\rho_0}{l_\rho^0}, \frac{\rho_1}{l_\rho^1}, \frac{\rho_2}{l_\rho^2}, \frac{\rho_3}{l_\rho^3}, \frac{\rho_4}{l_\rho^4}, \ldots \right]^t \in A^\infty$.

Tétel: $U_\rho \simeq D_{\rho'}^{-1}(W_1)$ és $V_\rho \simeq W_1 \bigcap D_{\rho'}^{-1}(W_1)$

Megjegyzés: Az előző paragrafus utolsó tétele szerint V_ρ algebrailag megegyezik $W_1 \bigcap D_{\rho'}^{-1}(W_1)$-el, tehát elegendő egy normát bevezetni az utóbbi halmazon, amelyet bijektíven átvihetünk az előbbire.

Értelmezés: Legyen $|\cdot|_{W_1} : W_1 \to \mathbf{R}_+$ a következő függvény:

$$|q|_{W_1} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|q_n\|(1+\varepsilon)^n \middle| \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \right\}$$

Tétel: $(W_1, +, \cdot, |\cdot|_{W_1})$ kommutatív normált algebra .

Tétel: $(V_p', +, \cdot, |\cdot|_{W_1})$ kommutatív normált algebra.

Hadamard tétele Banach-algebrákra?

Sejtés[Hadamard tétele Banach-algebrákra?]:

$$D_{\rho'}\Big|_{W_1} \text{ Toeplitz-operátor folytonos a } V'_\rho \text{ halmazon}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists M_\rho \in \mathbf{R} \text{ ú.h. } |D_{\rho'}(q)|_{W_1} \leq M_\rho \cdot |q|_{W_1} \quad \forall q \in V'_\rho$$