Feltételek

- A versenyszellem érdekében (na meg az ágrólszakadt mivoltom miatt :)) csak a leghamarabb beérkező (*agoston.roth@gmail.com*) helyes megoldást díjazom. Amennyiben egy feladat helyes megoldását egy csapat küldi be, a feladat díja szétoszlik a csapattagok között.
- Megoldásokat addig lehet beküldeni, míg az előadáson bemutatott dolgozat (3. oldal) nem elérhető az interneten.

1. feladat (20 ron)

Tekintsd a

$$\mathcal{V}_n = \langle 1, \cos(t), \sin(t), \ldots, \cos(nt), \sin(nt) \rangle$$

vektorteret (maximálisan *n-ed fokú trigonometrikus polinomok tere* vagy ún. *csonkolt Fourier-sorok tere*). Igazold, hogy a

$$\left(B_{0,n}(t), B_{1,n}(t), \ldots, B_{2n,n}(t)\right)$$

függvényrendszer a $\mathcal{V}_n$ térnek egy bázisa, ahol

$$B_{i,n}(t) = \frac{c_n}{2^n}\left(1 + \cos\left(t + \frac{2i\pi}{2n+1}\right)\right)^n, t \in [\tau, \tau + 2\pi]$$

($\tau \in \mathbb{R}$ rögzített szám) és

$$c_n = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

2. feladat (30 ron)

Igazold, hogy az *n-ed fokú*

$$\mathbf{g}_n(t) = \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{d}_i \cdot B_{i,n}(t), t \in [\tau, \tau + 2\pi]$$

ciklikus görbe rendelkezik az ún. *hullámzást csökkentő tulajdonsággal*, amely szerint egy hipersík legfennebb annyi pontban metszi a $\mathbf{g}_n$ görbét, mint az azt meghatározó

$$\mathbf{D}_n = [\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{2n}] \in \mathcal{M}_{1,2n+1}\left(\mathbb{R}^\delta\right), \delta \geq 2$$

kontrollpoligont. Felhasználva ezt a tulajdonságot, $\delta = 2$ esetén mutasd ki, hogy ha a $\mathbf{D}_n$ kontrollpoligon konvex, akkor a $\mathbf{g}_n$ görbe által közrezárt tartomány is konvex.

3. feladat (20 ron)

Dolgozz ki egy *fokszám növelési eljárás*t a $\mathbf{g}_n$ görbére nézve, azaz szerkessz egy olyan

$$\mathbf{P}_{n+r} = \left[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{2(n+r)}\right] \in \mathcal{M}_{1,2(n+r)+1}\left(\mathbb{R}^{\delta}\right), \delta \geq 2$$

kontrollpoligont, mely által generált $(n+r)$-ed fokú

$$\mathbf{a}_{n+r}(t) = \sum_{j=0}^{2(n+r)} \mathbf{p}_j \cdot B_{j,n+r}(t), t \in [\tau, \tau + 2\pi]$$

ciklikus görbe pontonként megegyezik az n-ed fokú $\mathbf{g}_n$ görbével, azaz

$$\mathbf{g}_n(t) \equiv \mathbf{a}_{n+r}(t), \forall t \in [\tau, \tau + 2\pi].$$

Általánosítsd a módszert az (n, m)-*ed fokú*

$$\mathbf{s}_{n,m}(u, v) = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} \mathbf{d}_{ij} \cdot B_{i,n}(u) B_{j,m}(v), (u, v) \in [\mu, \mu + 2\pi] \times [\nu, \nu + 2\pi]$$

tenzor szorzattal értelmezett *ciklikus felület*re is, ahol a $\mathbf{d}_{ij}$ kontrollpontok a

$$\mathbf{D}_{n,m} = [\mathbf{d}_{ij}]_{i=0,j=0}^{2n,2m} \in \mathcal{M}_{2n+1,2m+1}\left(\mathbb{R}^3\right)$$

kontrollhálót határozzák meg.

4. feladat (15 ron + 15 ron)

Igazold az előadáson bemutatott zárt görbe- és felületosztállyal kapcsolatos tételeket (23. és 29-30. oldalak).