Összefoglaló feladatok

Vektoriális geometria

1. Igazold, hogy ha A, B, C és D négy pont a síkban, akkor az (AC,BD), (AB,DC) és (AD,BC) szakaszpárok felezőpontjai által meghatározott szakaszok felezőpontjai egybeesnek.
2. Bizonyítsd be, hogy ha G_A, G_B, G_C és G_D a $BCD_\Delta, CAD_\Delta, ABD_\Delta$, illetve ABC_Δ súlypontja, akkor az AG_A, BG_B, CG_C és DG_D egyenesek összefutnak.
3. Az $ABCD$ négyszög AB, BC, CD és DA oldalait meghosszabbítjuk és rendre felvesszük az M,N,P és Q pontot úgy, hogy $\frac{AB}{BM}=\frac{BC}{CN}=\frac{CD}{DP}=\frac{DA}{AQ}=k$. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ és $MNPQ$ négyszögek súlypontjai egybeesnek!

4. Egy négyszög AB, BC, CD és DA oldalainak meghosszabbításain felvettük az M,N,P és Q pontokat úgy, hogy $\frac{AB}{BM}=\frac{BC}{CN}=\frac{CD}{DP}=\frac{DA}{AQ}=k$, majd az A,B,C és D pontokat kitöröltük. Megszerkeszthető-e az A,B,C és D pont az M,N,P és Q pont ismeretében?
5. Az ABC háromszögben $M \in (BC)$, $N \in (CA)$ és $P \in (AB)$ úgy, hogy $\frac{BM}{MC}=\frac{k_3}{k_2}$, $\frac{CN}{NA}=\frac{k_1}{k_3}$ és $\frac{AP}{PB}=\frac{k_2}{k_1}$, ahol k_1, k_2, $k_3 \in \mathbb{R}_+$.

a) Bizonyítd be, hogy $AM \cap BN \cap CP \neq \varnothing$.

b) Határozd meg az összefutási pont helyzetvektorát a csúcsok helyzetvektorainak függvényében.

6. Az ABC háromszög AB és AC oldalán felvettük az M és N pontokat. Bizonyítsd be, hogy MN pontosan akkor halad át a háromszög G súlypontján, ha $\frac{BM}{MA}+\frac{CN}{NA}=1$. Általánosítás.

7. Az ABC_Δ-ben az AA', BB' és CC' egyenesek összefutók, $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ és $C' \in (AB)$. Jelöljük M,N,P illetve M',N',P'-vel az ABC és $A'B'C'$ háromszögek oldalainak felezőpontjait. Bizonyítsd be, hogy $MM' \cap NN' \cap PP' \neq \emptyset$, ahol $M \in (BC), M' \in (B'C')$ stb.

8. Az ABC háromszög BC oldalának tetszőleges A_0 pontja esetén vegyünk fel az AA_0-n egy M pontot. A $BM \cap AC$ és $CM \cap AB$ metszeteket jelöljük C_1-gyel és B_1-gyel. Az A-n át a BC egyenessel húzott párhuzamos és A_0B_1 és A_0C_1 egyeneseket a B_2 illetve C_2 pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy a $[B_2C_2]$ szakasz felezőpontja éppen az A pont.

9. Megszerkeszthető-e egy n oldalú sokszög, ha ismerjük oldalainak felezőpontjait?

10. Igazold, hogy az $ABCD$ körbeírható négyszög esetén az ABC, BCD, CDA és DAB háromszögek súlypontjai egy körön vannak.