UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă
Specializarea Matematică

SUBIECTUL I. Algebră

Să se arate că:

1. $\sqrt[3]{2}$ este număr iraţional;
2. 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$ sunt liniar independente în $\mathbb{Q}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}$;
3. Dacă determinantul matricei $M = \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$ este 0, atunci $a = b = c = 0$;
4. Mulţimea $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ este subcorp al corpului $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ al numerelor reale.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. Să se studieze monotonia funcţiei $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.
2. Să se calculeze limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{1+\alpha}}$, unde $\alpha = -(1 + b)^a (1 + a)^{-b}$ şi $0 < a < b$.
3. Să se demonstreze inegalităţile: $2018 \sqrt[2019]{2020} \leq \int_1^{2019} (1 + x)^{\frac{1}{x}} dx \leq 4036$.

SUBIECTUL III. Geometrie

1. În sistemul de coordonate ortonormat xOy se consideră triunghiul ABC cu vârfurile $A(1, -1)$, $B(-2, 1)$ şi $C(3, 5)$. Fie D mijlocul laturii AC
   a) Să se determine ecuaţia perpendicularei din vârful A pe dreapta BD.
   b) Să se calculeze aria triunghiului ABD.
   c) Să se calculeze $\operatorname{tg}(\widehat{BCA})$.
2. Determinaţi coordonatele proiecţiei punctului $P(3, -4, -2)$ pe planul determinat de dreptele

$$d_1 : \frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4} \qquad \text{şi} \qquad d_2 : \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}.$$

Notă.

- Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
- Nota lucrării este media aritmetică a notelor de la cele trei subiecte.
- Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă
Specializarea Matematică
– Barem de corectare şi soluţii -

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu .... (1p)

1. Presupunem prin absurd că $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, unde $\frac{m}{n}$ este o fracţie ireductibilă, adică $m, n \in \mathbb{N}$ şi $\text{cmmdc}(m, n) = 1$ .... (0,5p)
   Obţinem $m^3 = 2n^3$, deci $2 \mid n$, de unde $m = 2m_1$, cu $m_1 \in \mathbb{N}$ .... (0,5p)
   Înlocuind, obţinem $8m_1^3 = 2n^3$, $4m_1^3 = n^3$, de unde $n = 2n_1$, cu $n_1 \in \mathbb{N}$, ceea ce este în contradicţie cu $\text{cmmdc}(m, n) = 1$, deci $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ .... (0,5p)
2. Arătăm că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$. .... (0,5p)
   Dacă $c = 0$, atunci din 1) rezultă $a = b = 0$. .... (0,5p)
   Presupunem $\sqrt[3]{4} = a + b\sqrt[3]{2}$; înmulţind cu $\sqrt[3]{2}$ obţinem $2 = a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4} = ab + (a + b^2)\sqrt[3]{2}$ .... (1p)
   Deducem $ab = 2$, $a + b^2 = 0$, de unde $2 = -b^3$, ceea ce este contradicţie cu 1) .... (0,5p)
3. Avem $\det M = a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc$, cu $a, b, c \in \mathbb{Q}$ .... (0,5p)
   Scriem $\det M = 0$; prin aducere la numitor comun şi simplificarea factorilor comuni, putem presupune că $a, b, c \in \mathbb{Z}$ si $\text{cmmdc}(a, b, c) = 1$ .... (0,5p)
   Atunci din $\det M = 0$ deducem $a = 2a_1$ cu $a_1 \in \mathbb{Z}$; înlocuind, obţinem $4a_1^3 + b^3 + 2c^3 + 6a_1bc = 0$, de unde $b = 2b_1$ cu $b_1 \in \mathbb{Z}$; înlocuim din nou şi analog deducem $c = 2c_1$ cu $c_1 \in \mathbb{Z}$, ceea ce este în contradicţie cu $\text{cmmdc}(a, b, c) = 1$ .... (1p)
4. Trebuie să verificăm că $0, 1 \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ (ceea ce se vede imediat) şi pentru orice $\alpha = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, $\beta = x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ avem $\alpha - \beta, \alpha\beta, \alpha^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ (cu condiţia $\alpha \neq 0$) .... (1p)
   Avem $\alpha - \beta = (a - x) + (b - y)\sqrt[3]{2} + (c - z)\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$;
   $\alpha\beta = (ax + 2cy + 2bz) + (bx + ay + 2cz)\sqrt[3]{2} + (cx + by + az)\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ .... (0,5p)
   Căutăm α^{-1} sub forma $\alpha^{-1} = x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$; scriem $\alpha\alpha^{-1} = 1$; din calculul de mai sus şi din 2) deducem sistemul

$$\begin{cases} ax + 2cy + 2bz & = 1 \\ bx + ay + 2cz & = 0 \\ cx + by + az & = 0 \end{cases}$$

(cu necunoscutele $x, y, x \in \mathbb{Q}$) .... (1p)
Determinantul sistemului este $\det M$ de la 3); deoarece $\alpha \neq 0$, din 3) rezultă că $\det M \neq 0$, deci avem sistem Cramer cu soluţie unică $x, y, z \in \mathbb{Q}$; în concluzie, $\alpha^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. .... (0,5p)
(Observaţie. Se poate arăta existenţa inversei lui α fără a o calcula efectiv. Considerăm funcţia $f : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $f(\beta) = \alpha\beta$. Această funcţie este $\mathbb{Q}$-liniară. Deoarece $\alpha \neq 0$, se verifică uşor că f este injectivă. Deoarece $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ este $\mathbb{Q}$-spaţiu finit dimensional, rezultă că f este şi surjectivă. În particular, există $\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ astfel ca $f(\beta) = 1$.)

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1,0p)

1. Pentru $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ avem $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}[x-(1+x)\ln(1+x)]$ .... (1,0p)
   Fie $g(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$, $x \in [0,+\infty)$ .... (0,5p)
   $g'(x) = -\ln(1+x) < 0$ pentru $x \in (0,+\infty)$ şi $g'(0) = 0$ .... (0,5p)
   $g(x) < g(0) = 0$ pentru $x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ pentru $x > 0$ .... (0,5p)
   f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$ .... (0,5p)

2. $0 < a < b \Rightarrow f(a) = (1+a)^{\frac{1}{a}} > f(b) = (1+b)^{\frac{1}{b}}$ .... (0,5p)
   $\alpha > -1 \Rightarrow 1+\alpha > 0$ .... (0,5p)
   Aplicăm teorema lui Cesàro-Stolz: .... (0,5p)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1^\alpha+2^\alpha+\ldots+(n+1)^\alpha)-(1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha)}{(n+1)^{1+\alpha}-n^{1+\alpha}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{1+\alpha}-n^{1+\alpha}} =: L$$

....

Aplicăm regula lui L'Hospital: .... (1,0p)

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}-1} = \lim_{x\searrow 0}\frac{x}{(1+x)^{1+\alpha}-1} = \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{(1+\alpha)(1+x)^\alpha} = \frac{1}{1+\alpha}$$

....

3. Pentru $x \in [1, 2019]$ avem $f(2019) \le f(x) \le f(1)$ .... (1,0p)
   $f(1) = 2$ şi $f(2019) = \sqrt[2019]{2020}$ .... (1,0p)
   $\int_1^{2019} f(2019)dx \le \int_1^{2019} f(x)dx \le \int_1^{2019} f(1)dx$ .... (1,0p)
   $2018\sqrt[2019]{2020} \le \int_1^{2019} f(x)dx \le 4036$ .... (0,5p)
   .... (0,5p)

Soluţie

1. Calculăm derivata de ordinul întâi a lui f : $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}[x-(1+x)\ln(1+x)]$. Considerăm funcţia $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x-(1+x)\ln(1+x)$. Atunci $g'(x) = -\ln(1+x) < 0$ pentru $x \in (0,+\infty)$ şi $g'(0) = 0$. Astfel g este descrescătoare pe $[0,+\infty)$, deci $g(x) < g(0) = 0$ pentru $x > 0$, de unde rezultă că $f'(x) < 0$ pentru $x > 0$. În concluzie funcţia f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$.

2. Deoarece f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$ şi $0 < a < b$, obţinem că $f(a) = (1+a)^{\frac{1}{a}} > f(b) = (1+b)^{\frac{1}{b}}$. Astfel $\alpha > -1$, adică $1+\alpha > 0$. Acum putem aplica teorema lui Cesàro-Stolz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1^\alpha+2^\alpha+\ldots+(n+1)^\alpha)-(1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha)}{(n+1)^{1+\alpha}-n^{1+\alpha}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{1+\alpha}-n^{1+\alpha}} =: L$$

Folosind regula lui L'Hospital, avem

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}-1} = \lim_{x\searrow 0}\frac{x}{(1+x)^{1+\alpha}-1} = \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{(1+\alpha)(1+x)^\alpha} = \frac{1}{1+\alpha}.$$

3. Deoarece f este strict descrescătoare pe intervalul $[1, 2019]$, obţinem că $f(2019) \leq f(x) \leq f(1)$ pentru $x \in [1, 2019]$. Atunci

$$\int_1^{2019} f(2019)\,dx \leq \int_1^{2019} f(x)\,dx \leq \int_1^{2019} f(1)\,dx.$$

Cum $f(1) = 2$ şi $f(2019) = \sqrt[2019]{2020}$, rezultă că $2018\sqrt[2019]{2020} \leq \int_1^{2019} f(x)\,dx \leq 4036$.

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu .... (1,0p)

1. a) Punctul D are coordonatele $x_D = \frac{x_A+x_C}{2} = 2$, $y_D = \frac{y_A+y_C}{2} = 2$.

Ecuaţia dreptei BD este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 6 = 0$ .... (1,0p)

Panta dreptei BD este $m_{BD} = \frac{1}{4}$. Panta perpendicularei din A pe BD este $m = -4$.
Ecuaţia perpendicularei din A pe BD este: $y - y_A = m(x - x_A) \Leftrightarrow 4x + y - 3 = 0$ .... (1,0p)

b) Aria triunghiului ABD este $\frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{11}{2}$ .... (1,0p)

c) Panta dreptei BC este $m_{BC} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{4}{5}$ .... (0,5p)

Panta dreptei CA este $m_{CA} = \dfrac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = 3$ .... (0,5p)

$\operatorname{tg}\widehat{BCA} = \dfrac{m_{CA} - m_{BC}}{1 + m_{CA} \cdot m_{BC}} = \dfrac{3 - \frac{4}{5}}{1 + 3 \cdot \frac{4}{5}} = \dfrac{11}{17}$ .... (1,0p)

2. Ecuaţia planului determinat de dreptele paralele d_1 şi d_2 este:
$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0,$
unde $x_1 = 5$, $y_1 = 6$, $z_1 = -3$, $x_2 = 2$, $y_2 = 3$, $z_2 = -3$, $p_1 = 13$, $q_1 = 1$, $r_1 = -4$.

În cazul nostru, ecuaţia planului este: $\begin{vmatrix} x - 5 & y - 6 & z + 3 \\ 13 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y + 3z + 10 = 0$ .... (1,0p)

Un vector normal al planului este $\vec{n} = (1, -1, 3)$. Acesta este un vector director al dreptelor perpendiculare pe plan.

Deci ecuaţiile perpendicularei din P pe plan sunt: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$ .... (1,0p)

Coordonatele proiecţiei lui P pe plan se determină rezolvând sistemul:
$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z+2}{3} = t \\ x - y + 3z + 10 = 0 \end{cases}.$$

Obţinem $t = -1$ şi apoi coordonatele proiecţiei sunt : $x = 2$, $y = -3$, $z = -5$. .... (2,0p)