BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Záróvizsga, 2019.
Matematika szak

I. TÉTEL. Algebra

Igazoljuk, hogy:

1. $\sqrt[3]{2}$ irracionális szám;
2. Az 1, $\sqrt[3]{2}$ és $\sqrt[3]{4}$ számok lineárisan függetlenek a $\mathbb{Q}$ test feletti $\mathbb{R}$ vektortérben;
3. Ha az $M = \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$ mátrix determinánsa egyenlő 0-val, akkor $a = b = c = 0$;
4. A $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ halmaz részteste az $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ valós számok testének.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. Tanulmányozzuk az $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ függvény monotonitását.
2. Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{1+\alpha}}$ határértéket, ahol $\alpha = -(1+b)^a(1+a)^{-b}$ és $0 < a < b$.
3. Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket: $2018\sqrt[2019]{2020} \leq \int_1^{2019} (1+x)^{\frac{1}{x}} dx \leq 4036$.

III. TÉTEL. Geometria

1. Az xOy ortonormált koordináta rendszerben adott az ABC háromszög, melynek csúcsai $A(1, -1)$, $B(-2, 1)$ és $C(3, 5)$. Legyen D az AC oldal felezőpontja.
   a) Határozzuk meg az A csúcsból a BD egyenesre húzott merőleges egyenes egyenletét.
   b) Számítsuk ki az ABD háromszög területét.
   c) Számítsuk ki: $tg(\widehat{BCA})$.
2. Határozzuk meg a $P(3, -4, -2)$ pont merőleges vetületének koordinátáit a

$$d_1 : \frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4} \qquad \text{és} \qquad d_2 : \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$$

egyenesek által meghatározott síkra.

Megjegyzés:

- Minden tétel kötelező. Minden tételre teljes megoldást kell adni.
- Minden tétel külön-külön osztályozva lesz (1 és 10 közötti egész értékkel).
- Az írásbeli vizsga végső jegyét a következő képlet adja: $\frac{\text{JegyI+JegyII+JegyIII}}{3}$. A legkisebb átmenő jegy az 5-ös.
- Munkaidő: 3 óra.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă
Specializarea Matematică
– Barem de corectare şi soluţii -

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu ..... (1p)

1. Presupunem prin absurd că $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, unde $\frac{m}{n}$ este o fracţie ireductibilă, adică $m, n \in \mathbb{N}$ şi cmmdc$(m, n) = 1$ ..... (1p)
Obţinem $m^3 = 2n^3$, deci $2 \mid n$, de unde $m = 2m_1$, cu $m_1 \in \mathbb{N}$ ..... (0,5p)
Înlocuind, obţinem $8m_1^3 = 2n^3$, $4m_1^3 = n^3$, de unde $n = 2n_1$, cu $n_1 \in \mathbb{N}$, ceea ce este în contradicţie cu cmmdc$(m, n) = 1$, deci $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ ..... (0,5p)

2. Arătăm că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$. ..... (0,5p)
Dacă $c = 0$, atunci din 1) rezultă $a = b = 0$. ..... (0,5p)
Presupunem $\sqrt[3]{4} = a + b\sqrt[3]{2}$; înmulţind cu $\sqrt[3]{2}$ obţinem $2 = a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4} = ab + (a + b^2)\sqrt[3]{2}$ ..... (0,5p)
Deducem $ab = 2$, $a + b^2 = 0$, de unde $2 = -b^3$, ceea ce este contradicţie cu 1) ..... (1p)

3. Avem $\det M = a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc$, cu $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ..... (0,5p)
Scriem $\det M = 0$; prin aducere la numitor comun şi simplificarea factorilor comuni, putem presupune că $a, b, c \in \mathbb{Z}$ si cmmdc$(a, b, c) = 1$ ..... (0,5p)
Atunci din $\det M = 0$ deducem $a = 2a_1$ cu $a_1 \in \mathbb{Z}$; înlocuind, obţinem $4a_1^3 + b^3 + 2c^3 + 6a_1bc = 0$, de unde $b = 2b_1$ cu $b_1 \in \mathbb{Z}$; înlocuim din nou şi analog deducem $c = 2c_1$ cu $c_1 \in \mathbb{Z}$, ceea ce este în contradicţie cu cmmdc$(a, b, c) = 1$ ..... (0,5p)

4. Trebuie să verificăm că $0, 1 \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ (ceea ce se vede imediat) şi pentru orice $\alpha = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, $\beta = x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ avem $\alpha - \beta, \alpha\beta, \alpha^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ (cu condiţia $\alpha \neq 0$) ..... (1p)
Avem $\alpha - \beta = (a - x) + (b - y)\sqrt[3]{2} + (c - z)\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$;
$\alpha\beta = (ax + 2cy + 2bz) + (bx + ay + 2cz)\sqrt[3]{2} + (cx + by + az)\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ..... (0,5p)
Căutăm α^{-1} sub forma $\alpha^{-1} = x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$; scriem $\alpha\alpha^{-1} = 1$; din calculul de mai sus şi din 2) deducem sistemul

$$\begin{cases} ax + 2cy + 2bz &= 1 \\ bx + ay + 2cz &= 0 \\ cx + by + az &= 0 \end{cases}$$

(cu necunoscutele $x, y, x \in \mathbb{Q}$) ..... (1p)
Determinantul sistemului este $\det M$ de la 3); deoarece $\alpha \neq 0$, din 3) rezultă că $\det M \neq 0$, deci avem sistem Cramer cu soluţie unică $x, y, z \in \mathbb{Q}$; în concluzie, $\alpha^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. ..... (0,5p)
(Observaţie. Se poate arăta existenţa inversei lui α fără a o calcula efectiv. Considerăm funcţia $f : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $f(\beta) = \alpha\beta$. Această funcţie este $\mathbb{Q}$-liniară. Deoarece $\alpha \neq 0$, se verifică uşor că f este injectivă. Deoarece $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ este $\mathbb{Q}$-spaţiu finit dimensional, rezultă că f este şi surjectivă. În particular, există $\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ astfel ca $f(\beta) = 1$.)

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu ..... (1,0p)

1. Pentru $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ avem $f'(x)=\frac{1}{x^2}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}\left[x-(1+x)\ln(1+x)\right]$ ..... (1,0p)
Fie $g(x)=x-(1+x)\ln(1+x)$, $x\in[0,+\infty)$ ..... (1,0p)
$g'(x)=-\ln(1+x)<0$ pentru $x\in(0,+\infty)$ şi $g'(0)=0$ ..... (0,5p)
$g(x)<g(0)=0$ pentru $x>0\Rightarrow f'(x)<0$ pentru $x>0$ ..... (0,5p)
f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$ ..... (0,5p)

2. $0<a<b\Rightarrow f(a)=(1+a)^{\frac{1}{a}}>f(b)=(1+b)^{\frac{1}{b}}$ ..... (0,5p)
$\alpha>-1\Rightarrow 1+\alpha>0$ ..... (0,5p)
Aplicăm teorema lui Cesàro-Stolz: ..... (0,5p)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1^\alpha+2^\alpha+\ldots+(n+1)^\alpha)-(1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha)}{(n+1)^{1+\alpha}-n^{1+\alpha}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{1+\alpha}-n^{1+\alpha}}=:L$$

.....

Aplicăm regula lui L'Hospital: ..... (1,0p)

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}-1}$$
$$= \lim_{x\searrow 0}\frac{x}{(1+x)^{1+\alpha}-1}=\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{(1+\alpha)(1+x)^\alpha}=\frac{1}{1+\alpha}$$

.....

3. Pentru $x\in[1,2019]$ avem $f(2019)\le f(x)\le f(1)$ ..... (1,0p)
$f(1)=2$ şi $f(2019)=\sqrt[2019]{2020}$ ..... (1,0p)
$\int_1^{2019}f(2019)dx\le\int_1^{2019}f(x)dx\le\int_1^{2019}f(1)dx$ ..... (1,0p)
$2018\sqrt[2019]{2020}\le\int_1^{2019}f(x)dx\le 4036$ ..... (0,5p)
..... (0,5p)

Soluţie

1. Calculăm derivata de ordinul întâi a lui f : $f'(x)=\frac{1}{x^2}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}\left[x-(1+x)\ln(1+x)\right]$. Considerăm funcţia $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-(1+x)\ln(1+x)$. Atunci $g'(x)=-\ln(1+x)<0$ pentru $x\in(0,+\infty)$ şi $g'(0)=0$. Astfel g este descrescătoare pe $[0,+\infty)$, deci $g(x)<g(0)=0$ pentru $x>0$, de unde rezultă că $f'(x)<0$ pentru $x>0$. În concluzie funcţia f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$.

2. Deoarece f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$ şi $0<a<b$, obţinem că $f(a)=(1+a)^{\frac{1}{a}}>f(b)=(1+b)^{\frac{1}{b}}$. Astfel $\alpha>-1$, adică $1+\alpha>0$. Acum putem aplica teorema lui Cesàro-Stolz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1^\alpha+2^\alpha+\ldots+(n+1)^\alpha)-(1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha)}{(n+1)^{1+\alpha}-n^{1+\alpha}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{1+\alpha}-n^{1+\alpha}}=:L$$

Folosind regula lui L'Hospital, avem

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}-1}$$
$$= \lim_{x\searrow 0}\frac{x}{(1+x)^{1+\alpha}-1}=\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{(1+\alpha)(1+x)^\alpha}=\frac{1}{1+\alpha}.$$

3. Deoarece f este strict descrescătoare pe intervalul $[1, 2019]$, obţinem că $f(2019) \leq f(x) \leq f(1)$ pentru $x \in [1, 2019]$. Atunci

$$\int_1^{2019} f(2019)\,dx \leq \int_1^{2019} f(x)\,dx \leq \int_1^{2019} f(1)\,dx.$$

Cum $f(1) = 2$ şi $f(2019) = \sqrt[2019]{2020}$, rezultă că $2018\sqrt[2019]{2020} \leq \int_1^{2019} f(x)\,dx \leq 4036$.

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu ..... (1,0p)

1. a) Punctul D are coordonatele $x_D = \frac{x_A+x_C}{2} = 2$, $y_D = \frac{y_A+y_C}{2} = 2$.

Ecuaţia dreptei BD este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 6 = 0$ ..... (1,0p)

Panta dreptei BD este $m_{BD} = \frac{1}{4}$. Panta perpendicularei din A pe BD este $m = -4$.
Ecuaţia perpendicularei din A pe BD este: $y - y_A = m(x - x_A) \Leftrightarrow 4x + y - 3 = 0$ ..... (1,0p)

b) Aria triunghiului ABD este $\frac{1}{2} \cdot \left|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{11}{2}$ ..... (1,0p)

c) Panta dreptei BC este $m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4}{5}$ ..... (0,5p)

Panta dreptei CA este $m_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = 3$ ..... (0,5p)

$\operatorname{tg}\widehat{BCA} = \frac{m_{CA} - m_{BC}}{1 + m_{CA} \cdot m_{BC}} = \frac{3 - \frac{4}{5}}{1 + 3 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{11}{17}$ ..... (1,0p)

2. Ecuaţia planului determinat de dreptele paralele d_1 şi d_2 este:
$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0,$
unde $x_1 = 5$, $y_1 = 6$, $z_1 = -3$, $x_2 = 2$, $y_2 = 3$, $z_2 = -3$, $p_1 = 13$, $q_1 = 1$, $r_1 = -4$.

În cazul nostru, ecuaţia planului este: $\begin{vmatrix} x - 5 & y - 6 & z + 3 \\ 13 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y + 3z + 10 = 0$ ..... (1,0p)

Un vector normal al planului este $\vec{n} = (1, -1, 3)$. Acesta este un vector director al dreptelor perpendiculare pe plan.

Deci ecuaţiile perpendicularei din P pe plan sunt: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+2}{3}$ ..... (1,0p)

Coordonatele proiecţiei lui P pe plan se determină rezolvând sistemul:
$\begin{cases} \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+2}{3} = t \\ x - y + 3z + 10 = 0 \end{cases}$

Obţinem $t = -1$ şi apoi coordonatele proiecţiei sunt : $x = 2$, $y = -3$, $z = -5$. ..... (2,0p)