

**ZÁRÓVIZSGA**  
**Írásbeli próba - 2018 szeptember**  
**Matematika Szak**

**I. TÉTEL. Algebra**

- Legyen  $(G, \cdot)$  egy csoport és  $f, g: G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^{-1}$ . Bizonyítsuk be, hogy:
  - $f$  akkor és csak akkor csoportmorfizmus, ha  $(G, \cdot)$  Abel-csoport.
  - $g$  akkor és csak akkor csoportizomorfizmus, ha  $(G, \cdot)$  Abel-csoport.
- Adottak az  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  mátrixok az  $M_2(\mathbb{R})$  valós vektortérben.
  - Bizonyítsuk be, hogy  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  rendezett bázisa az  $M_2(\mathbb{R})$  valós vektortérnek.
  - Határozzuk meg az  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  mátrix koordinátáit ebben a rendezett bázisban.
  - Határozzuk meg azt az  $N \in M_2(\mathbb{R})$  mátrixot, amelynek a koordinátái rendre 1,2,3,4 ebben a rendezett bázisban.

**II. TÉTEL. Matematikai Analízis**

- Taylor képlete. A maradékos tag alakjai Taylor képletében (kijelentés és bizonyítás).
- Határozzuk meg az  $f: [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x+2}$  függvény  $n$ -edrendű Taylor polinomját az  $x_0 = 0$  pontban.
- Legyen  $x_0 \in [-2, \infty)$  és értelmezzük az  $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ ,  $\forall n \geq 0$  sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy  $(x_n)_{n \geq 0}$  konvergens és számítsuk ki a határértékét.

**III. TÉTEL. Mértan**

- Határozzuk meg annak a síkbeli egyenesnek az egyenletét, amely ugyanakkora távolságra van a  $9x + 6y - 7 = 0$  és  $3x + 2y + 6 = 0$  párhuzamos egyenesektől.
- Határozzuk meg annak a térbeli egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $P(3, -4, 1)$  ponton, párhuzamos a  $2x + y - z - 5 = 0$  síkkal és metszi az

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{-1}$$

egyeneset.

**Megjegyzés**

- Minden tétel kötelező. Minden tételhez teljes megoldás megadása szükséges.
- A dolgozatra kapott jegy a számtani átlaga a három tételre kapott jegynek.
- A minimális átmenő jegy 5,00.
- A munkaidő 3 óra.