UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 3 iulie 2017
Specializarea Matematică

SUBIECTUL I. Algebră

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul comutativ K.

1. Să se arate că dacă $f : V \to V$ este un endomorfism al lui V, atunci $\operatorname{Ker} f$ şi $\operatorname{Im} f$ sunt subspaţii ale lui V.
2. Considerăm $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $V = \mathbb{R}^2$ şi funcţia $f : V \to V$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -2x_1 + x_2)$.
   (a) Să se arate că f este liniară.
   (b) Să se determine matricea $[f]_{e,e}$, unde $e = (e_1, e_2)$ este baza canonică a lui V.
   (c) Să se determine matricea $[f]_{v,v}$, unde $v = (v_1, v_2)$, $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (2, 5)$.
   (d) Să se determine câte o bază în subspaţiile $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ şi $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. Să se enunţe şi să se demonstreze criteriul radicalului (Cauchy) pentru convergenţa unei serii cu termeni pozitivi.
2. Să se scrie formula lui Maclaurin (formula lui Taylor în puctul $x_0 = 0$, cu restul lui Lagrange) de ordinul $n = 4$ pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, explicitând şi restul corespunzător.
3. Să se demonstreze inegalităţile: $\frac{23}{96} < \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} dx < \frac{1}{4}$.
4. Calculaţi: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

SUBIECTUL III. Geometrie

1. Se dau punctele $A(0, 5)$ şi $B(4, 1)$, precum şi dreapta $(\Delta) : x - 4y + 7 = 0$. Determinaţi un punct C de pe dreapta (Δ) astfel încât triunghiul ABC să fie isoscel, cu baza AB.
2. Determinaţi ecuaţiile dreptei Δ care trece prin punctul $P(3, 2, -1)$ şi este perpendiculară pe dreptele Δ_1 şi Δ_2, de ecuaţii
$$(\Delta_1) : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + t, \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$
şi
$$(\Delta_2) : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-3}.$$

Notă.
- Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
- Nota lucrării este media aritmetică a notelor de la cele trei subiecte.
- Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 3 iulie 2017
Specializarea Matematică
– Barem de corectare şi soluţii -

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu .... (1p)

1. Avem $f(0) = 0$, deci vectorul nul $0 \in \operatorname{Ker} f$ şi $0 \in \operatorname{Im} f$; în particular, deducem că ambele submulţimi sunt nevide. .... (0,5p)

   Fie $\alpha \in K$ şi $x, x' \in \operatorname{Ker} f$; atunci $f(x + x') = f(x) + f(x') = 0$ deci $x + x' \in \operatorname{Ker} f$ .... (0,5p)

   şi $f(\alpha x) = \alpha f(x) = 0$, deci $\alpha x \in \operatorname{Ker} f$. .... (0,5p)

   Fie $\alpha \in K$ şi $y, y' \in \operatorname{Im} f$; atunci există $x, x' \in V$ astfel ca $y = f(x)$ şi $y' = f(x')$; avem $y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x') \in \operatorname{Im} f$ .... (0,5p)

   şi $\alpha y = \alpha f(x) = f(\alpha x) \in \operatorname{Im} f$. .... (0,5p)

2. Vom nota $x = (x_1, x_2)$ un vector din $V = \mathbb{R}^2$ şi avem $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, unde $e_1 = (1, 0)$ şi $e_2 = (0, 1)$.

   (a) Fie $x, x' \in V$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Avem $f(x + x') = f(x_1 + x_1', x_2 + x_2') = (2(x_1 + x_1') - (x_2 + x_2'), -2(x_1 + x_1') + x_2 + x_2') = (2x_1 - x_2, -2x_1 + x_2) + (2x_1' - x_2', -2x_1' + x_2') = (fx) + f(x')$ .... (0,5p)
   şi $f(\alpha x) = f(\alpha x_1 + \alpha x_2) = (2\alpha x_1 - \alpha x_2, -2\alpha x_1 + \alpha x_2) = \alpha(2x_1 - x_2, -2x_1 + x_2) = \alpha f(x)$, deci f este liniară. .... (0,5p)

   (b) Avem $f(e_1) = (2, -2)$ şi $f(e_2) = (-1, 1)$, deci $[f]_{e,e} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. .... (0,5p)

   (c) Matricea de trecere de la e la v este $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\det T = 1$, deci T este inversabilă, $T^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ şi, în particular, v este într-adevar bază în V. .... (0,5p)

   Avem $[f]_{v,v} = T^{-1}[f]_{e,e}T = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$. .... (0,5p)

   (d) Rezolvarea ecuaţiei $f(x) = y$ în V este echivalentă cu rezolvarea sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= y_1 \\ -2x_1 + x_2 &= y_2 \end{cases}$. Observăm că rangul matricii acestui sistem este $\operatorname{rang}[f]_{e,e} = 1$.

   - Determinarea subspaţiului $\operatorname{Ker} f$ se reduce la rezolvarea în $\mathbb{R}^2$ a ecuaţiei $2x_1 - x_2 = 0$, care are soluţiie $x_1 = \alpha$, $x_2 = 2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, adică $x = \alpha(1, 2)$. Deci vectorul $u = (1, 2)$ formează o bază a lui $\operatorname{Ker} f$. .... (1p)
   - Pentru determinarea subspaţiului $\operatorname{Im} f$ trebuie găsiţi vectorii $y = (y_1, y_2)$ pt care sistemul de mai sus este compatibil. Condiţia ca matricea extinsă $\begin{pmatrix} 2 & -1 & y_1 \\ -2 & 1 & y_2 \end{pmatrix}$ să aibă rang$= 1$ implică $y_1 = -y_2 = \alpha \in \mathbb{R}$, adică $y = \alpha(1, -1)$. Deci vectorul $w = (1, -1)$ formează o bază a substaţiului $\operatorname{Im} f$. .... (1p)
   - Fie $x = \alpha(1, 2) = \beta(1, -1) \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im}$. Obţinem sistemul $\begin{cases} \alpha &= \beta \\ 2\alpha &= -\beta \end{cases}$, de unde $\alpha = \beta = 0$. Rezultă că $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} = \{0\}$, baza acestui subspaţiu fiind mulţimea vidă $\emptyset$. .... (1p)
   - Avem $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \{\alpha u + \beta w \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ este subspaţiul generat de u şi w. Din cele de mai sus rezultă că u şi w sunt liniar independenţi, deci formează o bază a lui $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Deoarece $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$, deducem că $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = V$. .... (1p)

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1,0p)
1. Enunţul teoremei .... (1,5p)
Demonstraţie .... (1,5p)
2. Formula: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, ... (0,5p)
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4!}\sin c$, cu c între 0 şi x .... (1,5p)
3. $\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} < \frac{1-\cos x}{x} < \frac{x}{2!}$ .... (1p)
$\frac{23}{96} = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{24}\right) dx < \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} dx < \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4}$ .... (1p)
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .... (1p)
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$. .... (1p)

Soluţie

1. Teoremă (criteriul radicalului, criteriul Cauchy) Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

   (a) Dacă există un număr real $q \in [0, 1)$ şi un număr natural n_0 astfel încât

   $$\sqrt[n]{u_n} \leq q,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \qquad \text{atunci seria } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ este convergentă.}$$

   (b) Dacă există un număr natural n_0 astfel încât

   $$\sqrt[n]{u_n} \geq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \qquad \text{atunci seria } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ este divergentă.}$$

   Demonstraţie:

   (a) Presupunem că există $q \in [0, 1)$ şi un număr natural n_0 astfel încât $\sqrt[n]{u_n} \leq q$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, atunci $u_n \leq q^n$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, şi

   $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n =$$
   $$= \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + q^{n_0-1} \lim_{k\to\infty} \frac{1-q^k}{1-q} \overset{q\in[0,1)}{=} \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \frac{q^{n_0-1}}{1-q} \in \mathbb{R},$$

   astfel, rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă (monoton crescătoare şi mărginită superior).

   (b) Dacă există un număr natural n_0 astfel încât $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, atunci rezultă că $u_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, de unde

   $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \geq \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} 1 = \infty,$$

   deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

2. Se aplică formula:

   $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

   unde c se află între 0 şi x. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, şi $n = 4$ avem:

   $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \sin c \frac{x^5}{5!}$$

3. Folosind dezvoltarea $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$, pentru $x \neq 0$ avem $\frac{1-\cos x}{x} = \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \sin c \frac{x^4}{5!}$, de unde, pentru $x > 0$ avem

$$\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} < \frac{1-\cos x}{x} < \frac{x}{2!} \Longrightarrow$$
$$\frac{23}{96} = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{24}\right) dx < \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} dx < \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4}.$$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. Oficiu .... (1 p)
2. (a) Punctul C se află pe mediatoarea segmentului AB .... (0.5p)
   (b) Coordonatele mijlocului C' ale segmentului AB .... (1p)
   (c) Ecuaţia mediatoarei CC' .... (2p)
   (d) $C = CC' \cap \Delta$ .... (1.5p)
3. (a) vectorul director $\mathbf{v}_1$ al dreptei Δ_1 .... (0.5p)
   (b) vectorul director $\mathbf{v}_2$ al dreptei Δ_2 .... (0.5p)
   (c) vectorul director $\mathbf{v}$ al dreptei Δ (coliniar cu $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$) .... (2p)
   (d) Ecuaţile canoniice ale dreptei Δ .... (1p)

Soluţie

1. Dacă triunghiul ABC este isoscel, cu baza AB, atunci vârful C trebuie să se afle pe mediatoarea segmentului AB, deci acest punct se află la intersecţia dintre această mediatoare şi dreapta (Δ).

   Pentru a determina mediatoarea, determinăm mai întâi coordonatele mijlocului C' al segmentului AB. Obţinem, imediat, $C'(2,3)$. Mediatoarea este dreapta care trece prin C' şi este perpendiculară pe dreapta AB.

   Panta dreptei AB este
$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4}{4} = -1,$$
   ceea ce înseamnă că panta mediatoarei este $k = 1$, aşadar ecuaţia sa este
$$(m) : y - 3 = x - 2$$
   sau $(m) : x - y + 1 = 0$ În concluzie, coordonatele punctului C sunt date de soluţia sistemului
$$\begin{cases} x - 4y + 7 = 0, \\ x - y + 1 = 0, \end{cases}$$
   adică $C = C(1,2)$.

2. Vectorul director al dreptei Δ_1 este $\mathbf{v}_1(-1,1,3)$, iar vectorul director al dreptei Δ_2 este $\mathbf{v}_2(2,4,-3)$. Pentru ca dreapta Δ să fie perpendiculară pe cele două drepte date, ea trebuie să fie perpendiculară pe fiecare dintre ele, deci vectorul său director, $\mathbf{v}$ trebuie să fie perpendicular pe $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$, adică să fie coliniar cu produsul lor vectorial. Avem
$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -15\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.$$
   Aşadar, putem lua ca vector director al dreptei Δ vectorul $\mathbf{v}(5,-1,2)$, prin urmare ecuaţiile dreptei sunt
$$(\Delta) : \frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$