BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Záróvizsga, 2017. július 3
Matematika szak

I. TÉTEL. Algebra

Legyen V egy vektortér a K kommutatív test felett.

1. Igazoljuk, hogy ha $f : V \to V$ egy endomorfizmusa V-nek, akkor $\operatorname{Ker} f$ és $\operatorname{Im} f$ részterei V-nek.
2. Tekíntsük az $\mathbb{R}$-feletti $V = \mathbb{R}^2$ vektorteret és az $f : V \to V$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -2x_1 + x_2)$ függvényt.
   (a) Igazoljuk, hogy f lineáris.
   (b) Határozzuk meg az $[f]_{e,e}$ mátrixot, ahol $e = (e_1, e_2)$ a V kanonikus bázisa.
   (c) Határozzuk meg az $[f]_{v,v}$ mátrixot, ahol $v = (v_1, v_2)$, $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (2, 5)$.
   (d) Határozzunk meg egy-egy bázist a $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ és $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ részterekben.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. Jelentsük ki és bizonyítsuk a pozitív tagú sorok konvergenciájára vonatkozó (Cauchy-féle) gyökkritériumot!
2. Írjuk fel az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ függvényre vonatkozó negyedrendű ($n = 4$) Maclaurin-sort (Taylor-sort, az $x_0 = 0$ pontban, a Lagrange-féle maradékkal), explicitálva a maradékot is.
3. Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket: $\frac{23}{96} < \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} dx < \frac{1}{4}$.
4. Számtsuk ki: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

III. TÉTEL. Geometria

1. Adottak az $A(0, 5)$ şi $B(4, 1)$ pontok, valamint a $(\Delta) : x - 4y + 7 = 0$ egyenes. Határozzunk meg egy C pontot a (Δ) egyenesen úgy, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú legyen, AB alappal.
2. Határozzuk meg a Δ egyenes egyenleteit, ha tudjuk, hogy áthalad a $P(3, 2, -1)$ ponton, és merőleges a Δ_1 és Δ_2 egyenesekre, amelyeknek egyenletei

$$(\Delta_1) : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + t, \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

és

$$(\Delta_2) : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-3}.$$

Megjegyzés:
- Minden tétel kötelező. Minden tételre teljes megoldást kell adni.
- Minden tétel külön-külön osztályozva lesz (1 és 10 közötti egész értékkel). A legkisebb átmenő jegy az 5-ös.
- Munkaidő: 3 óra.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 3 iulie 2017
Specializarea Matematică
– Barem de corectare şi soluţii -

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu .... (1p)

1. Avem $f(0) = 0$, deci vectorul nul $0 \in \operatorname{Ker} f$ şi $0 \in \operatorname{Im} f$; în particular, deducem că ambele submulţimi sunt nevide. .... (0,5p)

   Fie $\alpha \in K$ şi $x, x' \in \operatorname{Ker} f$; atunci $f(x + x') = f(x) + f(x') = 0$ deci $x + x' \in \operatorname{Ker} f$ .... (0,5p)

   şi $f(\alpha x) = \alpha f(x) = 0$, deci $\alpha x \in \operatorname{Ker} f$. .... (0,5p)

   Fie $\alpha \in K$ şi $y, y' \in \operatorname{Im} f$; atunci există $x, x' \in V$ astfel ca $y = f(x)$ şi $y' = f(x')$; avem $y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x') \in \operatorname{Im} f$ .... (0,5p)

   şi $\alpha y = \alpha f(x) = f(\alpha x) \in \operatorname{Im} f$. .... (0,5p)

2. Vom nota $x = (x_1, x_2)$ un vector din $V = \mathbb{R}^2$ şi avem $x = x_1e_1 + x_2e_2$, unde $e_1 = (1, 0)$ şi $e_2 = (0, 1)$.

   (a) Fie $x, x' \in V$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Avem $f(x + x') = f(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2) = (2(x_1 + x'_1) - (x_2 + x'_2), -2(x_1 + x'_1) + x_2 + x'_2) = (2x_1 - x_2, -2x_1 + x_2) + (2x'_1 - x'_2, -2x'_1 + x'_2) = (fx) + f(x')$ .... (0,5p)
   şi $f(\alpha x) = f(\alpha x_1 + \alpha x_2) = (2\alpha x_1 - \alpha x_2, -2\alpha x_1 + \alpha x_2) = \alpha(2x_1 - x_2, -2x_1 + x_2) = \alpha f(x)$, deci f este liniară. .... (0,5p)

   (b) Avem $f(e_1) = (2, -2)$ şi $f(e_2) = (-1, 1)$, deci $[f]_{e,e} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. .... (0,5p)

   (c) Matricea de trecere de la e la v este $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\det T = 1$, deci T este inversabilă, $T^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ şi, în particular, v este într-adevar bază în V. .... (0,5p)

   Avem $[f]_{v,v} = T^{-1}[f]_{e,e}T = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$. .... (0,5p)

   (d) Rezolvarea ecuaţiei $f(x) = y$ în V este echivalentă cu rezolvarea sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = y_1 \\ -2x_1 + x_2 & = y_2 \end{cases}$. Observăm că rangul matricii acestui sistem este $\operatorname{rang}[f]_{e,e} = 1$.

   - Determinarea subspaţiului $\operatorname{Ker} f$ se reduce la rezolvarea în $\mathbb{R}^2$ a ecuaţiei $2x_1 - x_2 = 0$, care are soluţiie $x_1 = \alpha$, $x_2 = 2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, adică $x = \alpha(1, 2)$. Deci vectorul $u = (1, 2)$ formează o bază a lui $\operatorname{Ker} f$. .... (1p)
   - Pentru determinarea subspaţiului $\operatorname{Im} f$ trebuie găsiţi vectorii $y = (y_1, y_2)$ pt care sistemul de mai sus este compatibil. Condiţia ca matricea extinsă $\begin{pmatrix} 2 & -1 & y_1 \\ -2 & 1 & y_2 \end{pmatrix}$ să aibă rang$= 1$ implică $y_1 = -y_2 = \alpha \in \mathbb{R}$, adică $y = \alpha(1, -1)$. Deci vectorul $w = (1, -1)$ formează o bază a substaţiului $\operatorname{Im} f$. .... (1p)
   - Fie $x = \alpha(1, 2) = \beta(1, -1) \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im}$. Obţinem sistemul $\begin{cases} \alpha & = \beta \\ 2\alpha & = -\beta \end{cases}$, de unde $\alpha = \beta = 0$. Rezultă că $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} = \{0\}$, baza acestui subspaţiu fiind mulţimea vidă $\emptyset$. .... (1p)
   - Avem $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \{\alpha u + \beta w \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ este subspaţiul generat de u şi w. Din cele de mai sus rezultă că u şi w sunt liniar independenţi, deci formează o bază a lui $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Deoarece $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$, deducem că $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = V$. .... (1p)

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1,0p)
1. Enunţul teoremei .... (1,5p)
Demonstraţie .... (1,5p)
2. Formula: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, ... (0,5p)
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4!}\sin c$, cu c între 0 şi x .... (1,5p)
3. $\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} < \frac{1-\cos x}{x} < \frac{x}{2!}$ .... (1p)
$\frac{23}{96} = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{24}\right) dx < \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} dx < \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4}$ .... (1p)
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .... (1p)
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$. .... (1p)

Soluţie

1. Teoremă (criteriul radicalului, criteriul Cauchy) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

   (a) Dacă există un număr real $q \in [0,1)$ şi un număr natural n_0 astfel încât

   $$\sqrt[n]{u_n} \le q,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0, \qquad \text{atunci seria } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ este convergentă.}$$

   (b) Dacă există un număr natural n_0 astfel încât

   $$\sqrt[n]{u_n} \ge 1,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0, \qquad \text{atunci seria } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ este divergentă.}$$

   Demonstraţie:

   (a) Presupunem că există $q \in [0,1)$ şi un număr natural n_0 astfel încât $\sqrt[n]{u_n} \le q$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0$, atunci $u_n \le q^n$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0$, şi

   $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \le \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n =$$
   $$= \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + q^{n_0-1}\lim_{k\to\infty}\frac{1-q^k}{1-q} \overset{q\in[0,1)}{=} \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \frac{q^{n_0-1}}{1-q} \in \mathbb{R},$$

   astfel, rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă (monoton crescătoare şi mărginită superior).

   (b) Dacă există un număr natural n_0 astfel încât $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0$, atunci rezultă că $u_n \ge 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0$, de unde

   $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \ge \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} 1 = \infty,$$

   deci $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

2. Se aplică formula:

   $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

   unde c se află între 0 şi x. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, şi $n = 4$ avem:

   $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \sin c \frac{x^5}{5!}$$

3. Folosind dezvoltarea $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$, pentru $x \neq 0$ avem $\frac{1-\cos x}{x} = \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \sin c \frac{x^4}{5!}$, de unde, pentru $x > 0$ avem

$$\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} < \frac{1 - \cos x}{x} < \frac{x}{2!} \Longrightarrow$$
$$\frac{23}{96} = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} \right) dx < \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x} dx < \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4}.$$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. Oficiu .... (1 p)
2. (a) Punctul C se află pe mediatoarea segmentului AB .... (0.5p)
   (b) Coordonatele mijlocului C' ale segmentului AB .... (1p)
   (c) Ecuaţia mediatoarei CC' .... (2p)
   (d) $C = CC' \cap \Delta$ .... (1.5p)
3. (a) vectorul director $\mathbf{v}_1$ al dreptei Δ_1 .... (0.5p)
   (b) vectorul director $\mathbf{v}_2$ al dreptei Δ_2 .... (0.5p)
   (c) vectorul director $\mathbf{v}$ al dreptei Δ (coliniar cu $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$) .... (2p)
   (d) Ecuaţile canoniice ale dreptei Δ .... (1p)

Soluţie

1. Dacă triunghiul ABC este isoscel, cu baza AB, atunci vârful C trebuie să se afle pe mediatoarea segmentului AB, deci acest punct se află la intersecţia dintre această mediatoare şi dreapta (Δ).

   Pentru a determina mediatoarea, determinăm mai întâi coordonatele mijlocului C' al segmentului AB. Obţinem, imediat, $C'(2,3)$. Mediatoarea este dreapta care trece prin C' şi este perpendiculară pe dreapta AB.

   Panta dreptei AB este
$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4}{4} = -1,$$
   ceea ce înseamnă că panta mediatoarei este $k = 1$, aşadar ecuaţia sa este
$$(m) : y - 3 = x - 2$$
   sau $(m) : x - y + 1 = 0$ În concluzie, coordonatele punctului C sunt date de soluţia sistemului
$$\begin{cases} x - 4y + 7 = 0, \\ x - y + 1 = 0, \end{cases}$$
   adică $C = C(1,2)$.

2. Vectorul director al dreptei Δ_1 este $\mathbf{v}_1(-1,1,3)$, iar vectorul director al dreptei Δ_2 este $\mathbf{v}_2(2,4,-3)$. Pentru ca dreapta Δ să fie perpendiculară pe cele două drepte date, ea trebuie să fie perpendiculară pe fiecare dintre ele, deci vectorul său director, $\mathbf{v}$ trebuie să fie perpendicular pe $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$, adică să fie coliniar cu produsul lor vectorial. Avem
$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -15\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.$$
   Aşadar, putem lua ca vector director al dreptei Δ vectorul $\mathbf{v}(5,-1,2)$, prin urmare ecuaţiile dreptei sunt
$$(\Delta) : \frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$