Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică și Informatică

**EXAMEN DE LICENȚĂ**
Proba scrisă – 5 septembrie 2016
Specializarea Matematică

1. În $\mathbb{R}^3$ considerăm vectorii $v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (1,2,0)$ şi $v_3 = (1,2,a)$, unde $a \in \mathbb{R}$.
   a) Să se arate că vectorii $v_1$ şi $v_2$ sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$.
   b) Să se determine valorile parametrului real $a$ pentru care $(v_1, v_2, v_3)$ este o bază a $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$.

2. a) Fie $n \in \mathbb{N}$ arbitrar fixat. Să se arate că $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este un subgrup al grupului $(\mathbb{Z}, +)$.
   b) Să se determine mulţimea
   $$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \ x = \frac{n^2+1}{n-1},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$
   c) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care $(n^2+1)\mathbb{Z}$ este subgrup al grupului $((n-1)\mathbb{Z}, +)$.

3. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin
   $$f(x) = \operatorname{arctg} x, \qquad g(x) = f(x+1) - f(x) - f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right).$$
   a) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b) Să se demonstreze că $g(x) = 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
   c) Să se calculeze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^2}$ .

4. Punctul $A(5,-1)$ este unul dintre vârfurile unui pătrat care are o latură pe dreapta de ecuație
   $$4x - 3y - 7 = 0.$$
   Găsiți ecuațiile dreptelor pe care sunt situate celelalte laturi ale pătratului. Câte soluții are problema? (Se cere reprezentare grafică.)

5. Fie cubul $[ABCDA'B'C'D']$ raportat la reperul ortonormat $Oxyz$, având vârfurile $A$, $B$, $D$, $A'$ de coordonate $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ și respectiv $(0,0,a)$, unde $a > 0$.
   a) Să se determine ecuația planului care conține punctul $C'$ și este perpendicular pe dreapta $A'C$.
   b) Să se determine coordonatele punctului de proiecție $P$ a punctului $C'$ pe dreapta $A'C$.
   c) Să se demonstreze că dreptele $AP$ și $D'P$ sunt perpendiculare.

Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică
Specializarea Matematică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă – 5 septembrie 2016
Specializarea Matematică
Barem de corectare

# Algebră

Oficiu ..................................................................... 1 pt

1. a) $v_1$ şi $v_2$ sunt liniar independenţi dacă (şi numai dacă)
$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$ ............................. 1 pt
$\alpha_1(1,0,0)1 + \alpha_2(1,2,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$ ............. 1,5 pt
Concluzia ..................................................................... 0,5 pt

b) $(v_1, v_2, v_3)$ bază în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ......................... 2 pt

2. a) Aplicarea teoremei de caracterizare a subgrupului (mulţimea $n\mathbb{Z}$ a multiplilor întregi de $n$ este nevidă şi diferenţa oricăror multipli de $n$ e multiplu de $n$) ..................... 1,5 pt

b) $x = \dfrac{n^2+1}{n-1} = \dfrac{n^2-1+2}{n-1} = n+1+\dfrac{2}{n-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow (n-1)\,|\,2 \Rightarrow n-1 \in \{-2,-1,1,2\}$,
adică $n \in \{-1,0,2,3\}$ ..................................................... 1 pt
Atunci $n \in \{0,2,3\}$, $\dfrac{n^2+1}{n-1} \in \{-1,5\}$ şi cum $x \in \mathbb{N}$, deducem $A = \{5\}$ ............ 0,5 pt

c) Cum $(n^2+1)\mathbb{Z}$ şi $(n-1)\mathbb{Z}$ sunt grupuri în raport cu operaţia indusă de $+$ din $(\mathbb{Z},+)$, condiţia $(n^2+1)\mathbb{Z} \leq ((n-1)\mathbb{Z},+)$ devine, succesiv,
$(n^2+1)\mathbb{Z} \subseteq (n-1)\mathbb{Z} \Leftrightarrow (n-1)|(n^2+1)$ (în $\mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow n \in \{0,2,3\}$ ...................... 1 pt

# Analiză

Oficiu ..................................................................... 1pt

3. (a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x)'\operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$ .......................... 2pt
$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ ...................................... 1pt

(b) $g'(x) = \dfrac{1}{1+(x+1)^2} - \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+\frac{1}{(1+x+x^2)^2}}\left(-\dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}\right)$ .................. 1pt

$g'(x) = \dfrac{-2x-1}{\big(1+(x+1)^2\big)(1+x^2)} + \dfrac{2x+1}{1+(1+x+x^2)^2}$ ............................ 0.5pt

$g'(x) = (2x+1)\left(\dfrac{1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} - \dfrac{1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}\right) = 0$ .......... 1pt

$\Rightarrow$ $g$ este constantă și cum $g(0)=0$, rezultă $g(x)=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ .................... 0.5pt

(c) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+k+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \Big( \operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg} k \Big)$ ............................ 1pt

$s_n = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4}$ .................................... 1pt

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ ................................................ 1pt

# Geometrie

Oficiu ........................................................................ 1pt

4. reprezentarea grafică ........................................................ 2pt

   ecuația dreptei care trece prin $A$ și este paralelă cu dreapta dată $d:\ 4x-3y-7=0$ ...... 1pt

   determinarea vârfurilor pătratelor ........................................ 2pt

   determinarea laturilor pătratelor .......................................... 1pt

5. a) ........................................................................ 1pt

   b) ........................................................................ 1pt

   c) ........................................................................ 1pt