UNIVERSITATEA „BABEŞ-BOLYAI" CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

EXAMEN DE LICENŢĂ
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ
Septembrie, 2015

Subiectul I. **Algebră**

1. Definiţi grupul şi subgrupul. Enunţaţi şi demonstraţi teorema lui Lagrange.
2. Găsiţi toate perechile de numere întregi pozitive (m, n) pentru care numărul $2^m 3^n$ are 10 divizori pozitivi.
3. Arătaţi că funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{nx}$, $n \in \{1, 2, 3\}$ sunt liniar independente în $\mathbb{R}-$spaţiul vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Subiectul II. **Analiză Matematică**

1. Definiţi polinomul Taylor ataşat unei funcţii într-un punct fixat. Enunţaţi şi demonstraţi teorema Taylor-Young.
2. Scrieţi o sumă Riemann având puncte echidistante ale diviziunii pentru o funcţie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Pentru $a > 0$ calculaţi limita şirului $x_n = \dfrac{1}{1+na} + \dfrac{1}{2+na} + \cdots + \dfrac{1}{n+na}$.
3. Găsiţi o primitivă definită pe $[0, 2\pi]$ a funcţiei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{a + \cos x}$, $a > 1$.

Subiectul III. **Geometrie.**

1. Scrieţi ecuaţia vectorială a unei drepte în spaţiu şi deduceţi ecuaţiile carteziene ale dreptei în raport cu un reper ortonormat.
2. În reperul cartezian xOy se consideră punclele A, B, C având coordonatele $(\alpha, 0)$, $(0, \beta)$ şi (α, β) unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha + \beta = 1$. Se notează cu P proiecţia punctului C pe dreapta AB.
   (a) Scrieţi ecuaţia dreptei PC.
   (b) Arătaţi că dreapta PC trece printr-un punct fix (care nu depinde de α, β).

Notă.
Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Pentru fiecare subiect se acordă o notă de la 1 la 10.

UNIVERSITATEA „BABEŞ-BOLYAI" CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

EXAMEN DE LICENŢĂ
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ ~~Iunie~~ Sept, 2015
Barem de corectare

Subiectul I. **Algebră**
Oficiu 1p

1. (a) Definiţiile 1p
   (b) Enunţ 1p
   (c) Demonstraţia 1p
2. (a) Numărul divizorilor $(m+1)(n+1)$ 1p
   (b) Rezolvarea $(m+1)(n+1) = 10$ 1p
   (c) Finalizare: $(1,4),(4,1)$ 1p
3. (a) Scrierea $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$ 1p
   (b) Alegerea a 3 puncte e.g. $x = 0,1,2$ şi scrierea sistemului rezultat 1p
   (c) Determinantul sistemului $\neq 0$(Vandermonde) deci $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. 1p

Subiectul II. **Analiză Matematică**
Oficiu 1p

1. (a) Definiţia 1p
   (b) Enunţ 1p
   (c) Demonstraţie 1p
2. (a) Scrierea unei sume Rieman de ex $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$ 1p
   (b) $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k/n+a}$ 1p
   (c) $\lim x_n = \int_0^1 \frac{1}{a+x}\,\mathrm{d}x = \ln(1+1/a)$ 1p
3. (a) Schimbarea de variabilă $\tan(x/2) = t$ 1p
   (b) Primitiva F pe $[0,2\pi]\setminus\{\pi\}$: $\frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \arctan \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}} + C_1, C_2$ 1p
   (c) Alegerea constantelor e.g. $C_1 = 0,\ C_2 = 2\pi/\sqrt{a^2-1},\ F(\pi) = \pi/\sqrt{a^2-1}$ 1p

Subiectul III. **Geometrie.**
Oficiu 1p

1. (a) Ecuaţia vectorială 1p
   (b) Deducerea ecuaţiilor parametrice 1p
   (c) Ecuaţiile carteziene 1p

2. (a) Determinarea pantei dreptei $AB : m = -\beta/\alpha$ 1p
   (b) Determinarea pantei dreptei $CP : m' = \alpha/\beta$ 1p
   (c) Ecuaţia dreptei PC 1p
   (d) Un punct $(x_0, y_0) \in CP$ verifică $\alpha(x_0 + y_0 - 2) + 1 - y_0 = 0$ 1p
   (e) Punct fix: $x_0 + y_0 - 2 = 0,\ 1 - y_0 = 0$ 1p
   (f) Finalizare: $(1, 1)$ 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzator.