BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

ZÁRÓVIZSGA
MAGYAR MATEMATIKA SZAK
2015 szeptember

I. Tétel – **Algebra**

1. Adjuk meg a csoport és a részcsoport meghatározását. Jelentsük ki és bizonyítsuk be a Lagrange-tételt.
2. Találjuk meg az összes olyan (m, n) szigorúan pozitív egész számpárt, amire a $2^m 3^n$ számnak pontosan 10 pozitív osztója van.
3. Mutassuk meg, hogy az $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{nx}$, $n \in \{1, 2, 3\}$ függvények lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vektortérben.

II. Tétel – **Matematikai analízis**

1. Értelmezzük egy függvény Taylor-polinomját egy rögzített pontban. Jelentsük ki és bizonyítsuk be a Taylor–Young-tételt.
2. Írjuk fel egy $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény egy Riemann-összegét egyenletes felosztás esetén. Számítsuk ki a $x_n = \dfrac{1}{1+na} + \dfrac{1}{2+na} + \cdots + \dfrac{1}{n+na}$ sorozat határértékét, ahol $a > 0$.
3. Határozzuk meg az $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{a + \cos x}$, $(a > 1)$ függvény egy primitív függvényét a $[0, 2\pi]$ intervallumon.

III. Tétel – **Mértan**

1. Írjuk fel egy térbeli egyenes vektoriális egyenletét és ebből vezessük le az egyenes kanonikus egyenletét egy ortonormált koordinátarendszerben.
2. Az xOy koordinátarendszerben tenkintsük az $(\alpha, 0)$, $(0, \beta)$ illetve (α, β) koordinátájú A, B, C pontokat, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha + \beta = 1$. Jelöljük P-vel a C pont AB egyenesre eső vetületét.
   (a) Írjuk fel a PC egyenes egyenletét.
   (b) Mutassuk meg, hogy a PC egyenes átmegy egy rögzített ponton (ami nem függ α-tól és β-tól).

Megjegyzés:
Munkaidő: 3 óra
Minden tétel kötelező.
Minden tételre 1 és 10 közötti jegy adható.

UNIVERSITATEA „BABEŞ-BOLYAI" CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

EXAMEN DE LICENŢĂ
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ ~~Iunie~~ Sept, 2015
Barem de corectare

Subiectul I. **Algebră**
Oficiu 1p

1. (a) Definiţiile 1p
   (b) Enunţ 1p
   (c) Demonstraţia 1p
2. (a) Numărul divizorilor $(m+1)(n+1)$ 1p
   (b) Rezolvarea $(m+1)(n+1) = 10$ 1p
   (c) Finalizare: $(1,4),(4,1)$ 1p
3. (a) Scrierea $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$ 1p
   (b) Alegerea a 3 puncte e.g. $x = 0, 1, 2$ şi scrierea sistemului rezultat 1p
   (c) Determinantul sistemului $\neq 0$(Vandermonde) deci $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. 1p

Subiectul II. **Analiză Matematică**
Oficiu 1p

1. (a) Definiţia 1p
   (b) Enunţ 1p
   (c) Demonstraţie 1p
2. (a) Scrierea unei sume Rieman de ex $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$ 1p
   (b) $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k/n+a}$ 1p
   (c) $\lim x_n = \int_0^1 \frac{1}{a+x}\,\mathrm{d}x = \ln(1+1/a)$ 1p
3. (a) Schimbarea de variabilă $\tan(x/2) = t$ 1p
   (b) Primitiva F pe $[0,2\pi]\setminus\{\pi\}$: $\frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \arctan \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}} + C_1, C_2$ 1p
   (c) Alegerea constantelor e.g. $C_1 = 0,\ C_2 = 2\pi/\sqrt{a^2-1},\ F(\pi) = \pi/\sqrt{a^2-1}$ 1p

Subiectul III. **Geometrie.**
Oficiu 1p

1. (a) Ecuaţia vectorială 1p
   (b) Deducerea ecuaţiilor parametrice 1p
   (c) Ecuaţiile carteziene 1p

2. (a) Determinarea pantei dreptei $AB : m = -\beta/\alpha$ 1p
   (b) Determinarea pantei dreptei $CP : m' = \alpha/\beta$ 1p
   (c) Ecuaţia dreptei PC 1p
   (d) Un punct $(x_0, y_0) \in CP$ verifică $\alpha(x_0 + y_0 - 2) + 1 - y_0 = 0$ 1p
   (e) Punct fix: $x_0 + y_0 - 2 = 0,\ 1 - y_0 = 0$ 1p
   (f) Finalizare: $(1, 1)$ 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.