BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Záróvizsga, 2019. július 1.
Matematika szak

I. TÉTEL. Algebra

Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Igazoljuk, hogy az $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX - XA$ függvény $\mathbb{R}$-linearis, és határozzuk meg az $[f]_{e,e}$ mátrixot, ahol e az $M_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-feletti vektortér kanonikus bázisa.
2. Igazoljuk, hogy a $V = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA \right\}$ halmaz résztere $M_2(\mathbb{R})$-nek, és határozzunk meg V-nek egy bázisát.
3. Határozzuk meg az f függvény $\mathrm{Im}(f)$ képterének a dimenzióját, illetve $\mathrm{Im}(f)$-nek egy bázisát.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n^{1+\alpha}}$ határértéket, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ és $(a_n)_{n\geq 1}$ olyan pozitív tagú sorozat, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = l \in (0, +\infty)$.
2. Számtsuk ki: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(|x| + x^{2019}\right) e^{-x^2} dx$.

III. TÉTEL. Geometria

1. Az xOy ortonormált koordináta rendszerre vonatkoztatott euklidészi síkban adottak a

$$\begin{aligned} d_1 &: \ 4x - y - 7 = 0 \\ d_2 &: \ x + 3y - 31 = 0 \\ d_3 &: \ x + 5y - 7 = 0 \end{aligned}$$

egyenesek. Legyen $\{A\} = d_1 \cap d_2$, $\{B\} = d_2 \cap d_3$ és $\{C\} = d_3 \cap d_1$.

   a) Határozzuk meg az A, B és C pontok koordinátáit.
   b) Határozzuk meg az A pontból a d_3 egyenesre, illetve a C pontból a d_2 egyenesre húzott merőleges egyenesek egyenleteit.
   c) Határozzuk meg az ABC háromszög ortocentrumának koordinátáit.
   d) Számítsuk ki az ABC háromszög területét.

2. Tekintsük az AB egyenest, ahol $A(-1, 0, 1)$ és $B(-2, 1, 0)$, illetve a

$$d : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

egyenest. Számítsuk ki a két egyenes közötti távolságot.

Megjegyzés:
- Minden tétel kötelező. Minden tételre teljes megoldást kell adni.
- Minden tétel külön-külön osztályozva lesz (1 és 10 közötti egész értékkel).
- Az írásbeli vizsga végső jegyét a következő képlet adja: $\frac{\text{JegyI}+\text{JegyII}+\text{JegyIII}}{3}$. A legkisebb átmenő jegy az 5-ös.
- Munkaidő: 3 óra.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 1 iulie 2019
Specializarea Matematică
– Barem de corectare şi soluţii -

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu .... (1p)

1. Avem $f(aX+bY) = A(aX+bY) - (aX+bY)A = a(AX - XA) + b(AY - YA) = af(X) + bf(Y)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ .... (0,5p)

   Fie $e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ baza canonică a lui $M_2(\mathbb{R})$, unde $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. .... (0,5p)

   Avem $f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .... (1p)

   Rezultă că $[f]_{e,e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .... (1p)

2. Observăm că $V = \mathrm{Ker}(f)$, deci V este subspaţiu .... (0,5p)

   (Altfel, se verifică direct că $0_2 \in M_2(\mathbb{R})$ şi $aX + bY \in V$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi $X, Y \in V$; într-adevăr, avem $A0_2 = 0_2A = 0_2$; $A(aX + bY) = aAX + bAY = aXA + bYA = (aX + bY)A$.)

   Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$; calculând $AX = \begin{pmatrix} x+2y & y+2t \\ -x+3z & -y+3t \end{pmatrix}$ şi $XA = \begin{pmatrix} x-y & 2x+3y \\ z-t & 2z+3t \end{pmatrix}$

   sau folosind matricea $[f]_{e,e}$, obţinem sistemul omogen

   $$[f]_{e,e}[x\ y\ z\ t]^t = [0\ 0\ 0\ 0]^t, \quad \text{care devine} \quad \begin{cases} y + 2z & = 0 \\ x + y - t & = 0 \\ -x + 2z + t & = 0 \end{cases};$$

   .... (1p)

   Rangul matricei sistemului este $\mathrm{rang}[f]_{e,e} = 2$ şi putem alege necunoscutele secundare $z = \alpha$, $t = \beta \in \mathbb{R}$.
   Obţinem soluţia sistemului: $(x, y, z, t) = (2\alpha + \beta, -2\alpha, \alpha, \beta) = \alpha(2, -2, 1, 0) + \beta(1, 0, 0, 1)$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt parametri independenţi .... (1p)

   Rezultă că $\dim V = 2$ şi matricele $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ formează o bază a lui V ...... (0,5p)

3. Ştim că $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, deci $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ .... (1p)

   Matricele E_{ij}, $i, j = 1, 2$, de mai sus formează baza canonică a lui $M_2(\mathbb{R})$, deci matricele $f(E_{ij})$, $i, j = 1, 2$, formează o familie de generatori ai lui $\mathrm{Im}(f)$ .... (1p)

   Deoarece coloanele 1 şi 2 ale lui $[f]_{e,e} = 2$ sunt liniar independente, rezultă că matricele $f(E_{11})$ şi $f(E_{12})$ calculate la 1) formează o bază a lui $M_2(\mathbb{R})$ .... (1p)

   (Sunt posibile şi alte alegeri a două coloane liniar independente.)

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1,0p)

1. Cazul $\underline{\alpha+1>0}$.

Aplicăm teorema lui Cesàro-Stolz: $L := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}^\alpha}{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}}$ ...... (1,0p)

$L = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_{n+1}}{n+1}\right)^\alpha \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\alpha \dfrac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} - 1} = l^\alpha \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} - 1}$ .... (1,0p)

Aplicăm regula lui L'Hospital: $L = l^\alpha \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{x}{(1+x)^{1+\alpha}-1} = l^\alpha \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{1}{(1+\alpha)(1+x)^\alpha} = \dfrac{l^\alpha}{1+\alpha}$ ...... (1,0p)

Cazul $\underline{\alpha=-1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{a_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = l \in (0,+\infty)$ .... (0,5p)

Seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă .... (0,5p)

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}\right) = +\infty$ .... (0,25p)

Cazul $\underline{\alpha+1<0}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^{-\alpha}}}{\frac{1}{a_n^{-\alpha}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{n}\right)^{-\alpha} = l^{-\alpha} \in (0,+\infty)$ .... (0,5p)

Seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{-\alpha}}$ este convergentă $(-\alpha>1)$ .... (0,5p)

Seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n^{-\alpha}}$ este convergentă $(-\alpha>1)$ .... (0,25p)

$\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1-\alpha} = +\infty$ .... (0,25p)

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1-\alpha} \left(\dfrac{1}{a_1^{-\alpha}} + \dfrac{1}{a_2^{-\alpha}} + \ldots + \dfrac{1}{a_n^{-\alpha}}\right) = +\infty$ .... (0,25p)

2. $I := \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(|x| + x^{2019}\right) e^{-x^2} dx = \int_{-1}^{0} \left(-x + x^{2019}\right) e^{-x^2} dx + \int_{0}^{1} \left(x + x^{2019}\right) e^{-x^2} dx$ .... (1,0p)

Schimbare de variabilă $x=-t$ pentru integrala considerată pe intervalul $[-1,0]$ .... (1,0p)

$I = \displaystyle\int_0^1 \left(t - t^{2019}\right) e^{-t^2} dt + \int_0^1 \left(x + x^{2019}\right) e^{-x^2} dx = \int_0^1 2xe^{-x^2} dx = -e^{-x^2}\Big|_0^1 = \dfrac{e-1}{e}$ .... (1,0p)

Soluţie

1. Distingem următoarele trei cazuri:

(a) Cazul $\underline{\alpha+1>0}$. Aplicăm teorema lui Cesàro-Stolz şi ipoteza $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = l$:

$$\begin{aligned} L &:= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_{n+1}^\alpha) - (a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha)}{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^\alpha}{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)^\alpha \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} - 1} \\ &= l^\alpha \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} - 1}. \end{aligned}$$

Aplicăm regula lui L'Hospital:

$$L = l^\alpha \lim_{x\searrow 0} \frac{x}{(1+x)^{1+\alpha}-1} = l^\alpha \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{(1+\alpha)(1+x)^\alpha} = \frac{l^\alpha}{1+\alpha}.$$

În continuare vom aplica următorul criteriu: *dacă* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *şi* $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ *sunt două serii cu termeni pozitivi astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \in (0,+\infty)$, *atunci seriile* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *şi* $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ *au aceeaşi natură.*

(b) Cazul $\underline{\alpha=-1}$. Avem $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=l\in(0,+\infty)$. Dar seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ este divergentă, astfel

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1^{-1}+a_2^{-1}+\ldots+a_n^{-1}\right)=+\infty.$$

(c) Cazul $\underline{\alpha+1<0}$. Avem $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{-\alpha}}}{\frac{1}{a_n^{-\alpha}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}\right)^{-\alpha}=l^{-\alpha}\in(0,+\infty)$. Dar seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{-\alpha}}$ este convergentă, deoarece $-\alpha>1$, astfel seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{a_n^{-\alpha}}$ este tot convergentă. Evident $\lim_{n\to\infty}n^{-1-\alpha}=+\infty$. În concluzie

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1^{\alpha}+a_2^{\alpha}+\ldots+a_n^{\alpha}}{n^{1+\alpha}}=\lim_{n\to\infty}n^{-1-\alpha}\left(\frac{1}{a_1^{-\alpha}}+\frac{1}{a_2^{-\alpha}}+\ldots+\frac{1}{a_n^{-\alpha}}\right)=+\infty.$$

2. Descompunem integrala dată în două:

$$I:=\int_{-1}^{1}\left(|x|+x^{2019}\right)e^{-x^2}\,dx=\int_{-1}^{0}\left(-x+x^{2019}\right)e^{-x^2}\,dx+\int_{0}^{1}\left(x+x^{2019}\right)e^{-x^2}\,dx.$$

Efectuăm schimbarea de variabilă $x=-t$ pentru integrala considerată pe intervalul $[-1,0]$. Atunci

$$I=\int_0^1\left(t-t^{2019}\right)e^{-t^2}\,dt+\int_0^1\left(x+x^{2019}\right)e^{-x^2}\,dx=\int_0^1 2xe^{-x^2}\,dx=-e^{-x^2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{e}.$$

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu .... (1,0p)

1. a) Coordonatele punctului A se obţin rezolvând sistemul $\begin{cases}4x-y-7&=0\\x+3y-31&=0\end{cases}$.

Rezultă $A(4,9)$. .... (0,5p)

Coordonatele punctului B se obţin rezolvând sistemul $\begin{cases}x+3y-31&=0\\x+5y-7&=0\end{cases}$.

Rezultă $B(67,-12)$ .... (0,5p)

Coordonatele punctului C se obţin rezolvând sistemul $\begin{cases}x+5y-7&=0\\4x-y-7&=0\end{cases}$.

Rezultă $C(2,1)$ .... (0,5p)

b) Panta dreptei d_3 este $-\frac{1}{5}$. Panta perpendicularei din A pe d_3 este 5.
Ecuaţia perpendicularei din A pe d_3 este $y-9=5(x-4)\Leftrightarrow 5x-y-11=0$ .... (0,5p)
Panta dreptei d_2 este $-\frac{1}{3}$. Panta perpendicularei din C pe d_2 este 3.
Ecuaţia perpendicularei din C pe d_2 este $y-1=3(x-2)\Leftrightarrow 3x-y-5=0$ .... (0,5p)

c) Coordonatele ortocentrului H se obţin rezolvând sistemul $\begin{cases}5x-y-11&=0\\3x-y-5&=0\end{cases}$.

Rezultă $H(3,4)$ .... (0,5p)

d) Aria triunghiului ABC este: $\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}x_A&y_A&1\\x_B&y_B&1\\x_C&y_C&1\end{vmatrix}\right|=273$ .... (1,0p)

2. Ecuaţiile dreptei AB sunt: $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}\Leftrightarrow\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ .... (1,0p)

Ecuaţiile dreptei d prin punct şi vector director se obţin (de exemplu) rezolvând sistemul format de ecuaţiile celor două plane: $\begin{cases}x+y+z-1&=0\\2x-y-5z&=0\end{cases}$. Mulţimea soluţiilor este

$S = \{(\frac{1+4\alpha}{3}, \frac{2-7\alpha}{3}, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Un vector director al dreptei d este $\vec{d}(4,-7,3)$. Un punct pe dreapta d este $P(-1,3,-1)$.

Rezultă ecuaţiile dreptei d: $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-3}{-7} = \dfrac{z+1}{3}$ ....(1,0p)

Distanţa dintre dreptele (necoplanare) AB şi d este $\delta(AB,d) = \dfrac{|(\vec{PA},\vec{AB},\vec{d})|}{\| \vec{AB} \times \vec{d} \|}$, unde

$\vec{PA}(x_A - x_P, y_A - y_P, z_A - z_P) \Leftrightarrow \vec{PA}(0,-3,2)$, $\vec{AB}(-1,1,-1)$, $\vec{d}(4,-7,3)$.

Avem produsul mixt $(\vec{PA},\vec{AB},\vec{d}) = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 9$ ....(1,0p)

Produsul vectorial $\vec{AB} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & 3 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ....(1,0p)

Rezultă distanţa $\delta(AB,d) = \dfrac{9}{\sqrt{26}}$ ....(1,0p)